Savez-vous faire ? 28 - Dimension d'un espace vectoriel

Kit de survie du cours

Famille libre, famille liée

Définition 28.1 (*Famille libre, famille liée*). Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **liée** si et seulement s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ qui ne sont pas tous nuls tels que
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E.$$
- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **libre** si et seulement si elle n'est pas liée, autrement dit si, et seulement si, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, on a
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$
Dans ce cas, on dit que les vecteurs de la famille sont **linéairement indépendants**.

On convient que la famille vide est libre.

Définition 28.2 (*Famille de polynômes échelonnés en degré*). Soit $n \in \mathbf{N}$, $P_0, ..., P_n \in \mathbf{K}[X]$. On dit que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une **famille de polynômes échelonnés en degré** lorsque
$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n).$$

Proposition 28.3 - Quelques critères simples pour montrer qu'une famille est libre ou liée.

1. Une famille à un élément (x) est libre si, et seulement si, x est non nul.
2. Une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
3. Une famille de trois vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs ne sont pas coplanaires.
4. Une famille qui contient le vecteur nul 0_E est liée.
5. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires n'est pas libre.
6. Soit $n \in \mathbf{N}$, $P_0, ..., P_n \in \mathbf{K}[X]$. On suppose que $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de polynômes échelonnés en degré et que $P_0 \neq 0$. Alors la famille $(P_0, ..., P_n)$ est libre.

Proposition 28.4 - Ajouter/enlever un vecteur à une famille liée/libre.

1. Toute famille contenant une famille liée est liée. En particulier, si on ajoute un vecteur à une famille liée, celle-ci reste liée.
2. Toute famille extraite d'une famille libre est libre. En particulier, si on enlève un vecteur d'une famille libre, celle-ci reste libre.

Proposition 28.5 - CNS pour qu'une famille avec un vecteur en plus reste libre.

Soit $p \in \mathbf{N}$, $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $x \in E$.
La famille $(e_1, ..., e_p, x)$ est libre si et seulement si $x \notin \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_p)$.

Théorème 28.6 - Unicité de la décomposition dans une famille libre.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille libre. Pour tout vecteur $u \in \operatorname{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, il existe un unique p-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$.

Remarque 28.7. Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille libre. Le théorème précédente entraîne que pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p$,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = \mu_i.$$

On peut donc **identifier** les coefficients dans deux décompositions dans des familles libres.

Famille génératrice

Définition 28.8 (*Famille génératrice finie*). Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de E est dite **génératrice** si, et seulement si,

$$E = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Si $(v_1, ..., v_n)$ est génératrice, on dit que les vecteurs $v_1, ..., v_n$ **engendrent** E.

Proposition 28.9 - Ajouter un vecteur à une famille génératrice.

Tout famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E. En particulier, si on ajoute un vecteur de E à une famille génératrice, celle-ci reste génératrice.

Proposition 28.10 - CNS pour qu'une famille avec un vecteur en moins reste génératrice.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(e_1, ..., e_n)$ une famille génératrice de E. La famille $(e_1, ..., e_{n-1})$ reste génératrice de E si et seulement si $e_n \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$.

Base

Définition 28.11 (*Base*). Soit $n \in \mathbf{N}$, $e_1, ..., e_n \in E$. On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si, seulement si, cette famille est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 28.12 - Existence et unicité de la décomposition dans une base.

Une famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Le n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est le n-uplet de **composantes** (ou de **coordonnées**) de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Dimension d'un espace vectoriel

Définition 28.13 (*Dimension finie*). On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** si, et seulement si, il existe une famille finie de vecteurs de E qui soit génératrice de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Théorème 28.14 - Théorème de la base incomplète.

On suppose que E est de dimension finie.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.

Théorème 28.15 - Théorème de la base extraite.

On suppose que E est de dimension finie.
Toute famille génératrice de E contient une base finie de E.

Corollaire 28.16 - Existence d'une base en dimension finie.

Tout espace vectoriel de dimension finie différent de $\{0\}$ contient au moins une base.

Définition 28.17 (*Cardinal d'une famille de vecteurs*). Le **cardinal** d'une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est le nombre de vecteurs (distincts ou non) qui la composent. On notera $\mathrm{Card}(\mathcal{F})$ le cardinal de $\mathcal{F}$.

Définition 28.18 (*Dimension d'un espace vectoriel*). On suppose que E est de dimension finie.
Toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments. Cet entier n est appelé la **dimension** de E sur $\mathbf{K}$ et est noté $\dim(E)$ (ou $\dim_{\mathbf{K}}(E)$ lorsqu'il est important de préciser l'ensemble $\mathbf{K}$).

Exemple 28.19 (♥). On a, si n est un entier naturel non nul

Espace vectoriel	Base canonique	Dimension
$\mathbf{R}$	1	1
$\mathbf{C}$ comme $\mathbf{C}$-ev	1	1
$\mathbf{C}$ comme $\mathbf{R}$-ev	$(1, i)$	2
$\mathbf{R}^n$	$\big((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\big)$	n
$\mathbf{R}_n[X]$	$(1, X, \dots, X^n)$	$n+1$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$	$(E_{1,1},\dots,E_{1,p},E_{2,1},\dots,E_{2,p},\dots E_{n,p})$	$n \times p$

Voici quelques exemples :

Espace vectoriel	Base canonique	Dimension
$\mathbf{R}^3$	$\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$	3
$\mathbf{R}_2[X]$	$(1, X, X^2)$	3
$\mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R})$	$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$	6

Proposition 28.20 - Nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice.

On suppose que E est de dimension finie égale à n.

1. Toute famille libre de E possède au plus n éléments.
2. Toute famille libre de E qui possède n éléments est une base de E.
3. Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.
4. Toute famille génératrice de E qui possède n éléments est une base de E.

Théorème 28.21 - Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et

$$\dim(F) \leqslant \dim(E).$$

De plus si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 28.22 - Famille génératrice d'une somme de sous-espaces vectoriels.

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriel de E engendrés respectivement par deux familles finies $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. Alors

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G}_1) + \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G}_2)$$

ce qui signifie que $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ est une famille génératrice de $F + G$.

Théorème 28.23 - Formule de Grassmann.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors la somme $F + G$ est de dimension finie et plus précisément :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Théorème 28.24 - Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre.

Soit n, k deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leqslant k < n$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.
2. Si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont supplémentaires dans E.

Théorème 28.25 - Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. On note $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G. Si F et G sont en somme directe, alors la concaténation des familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ forme une base de $F \oplus G$. Une telle base dont les premiers vecteurs forment une base de F et les suivants une base de G est dite **adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

Théorème 28.26 - Existence de supplémentaires en dimension finie.

On suppose que E est de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E.
En outre, les supplémentaires de F dans E ont tous pour dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Théorème 28.27 - Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont supplémentaires.

(ii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(iii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 28.28 (*Rang d'une famille de vecteurs*). Soit $r \in \mathbf{N}$. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_r)$ une famille de vecteurs de E (famille vide si $r = 0$).
On appelle **rang** de la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille et on le note $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_r)$. Autrement dit

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_r) = \dim(\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_r)).$$

Proposition 28.29 - Lien entre le rang et le nombre de vecteurs.

Soit $(u_1, \ldots, u_r)$ une famille de vecteurs de E.

1. $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_r) \leqslant r$.
2. $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_r) = r$ si et seulement si $(u_1, \ldots, u_r)$ est libre.

Corollaire 28.30 - Caractérisation des bases avec le rang.

On suppose que E est de dimension finie et on note n sa dimension. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) = n$.

Méthodes et exercices à connaître

Décider si une famille est libre ou liée

En premier lieu, il faut voir si un des critères « simples » s'applique (cf. Proposition 28.3). Sinon, on utilise la définition (cf. Définition 28.1) : cela fonctionne toujours, mais c'est plus calculatoire (on se ramène très souvent à tester si un système linéaire admet une solution non nulle ou non ; si c'est le cas la famille est liée, sinon elle est libre).

Si on est dans un sous-espace vectoriel (cela peut aussi être un espace vectoriel de référence !) dont on connaît la dimension, alors on peut parfois décider rapidement si la famille est libre ou liée (cf. Proposition 28.20 ; dans un espace de dimension 3, tout famille de quatre vecteurs ou plus sera liée).

- Résultats du cours : Définition 28.1, Proposition 28.3, Proposition 28.20.
- Exercices : 28.1, 28.2, 28.11, 28.12
- Exercices :
- Exercices :

Décider si une famille est génératrice

Pour savoir si une famille de vecteurs (e_1, e_2, e_3) est génératrice d'un sous-espace vectoriel F, il faut vérifier si $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) = F$. Pour cela, il y a deux méthodes :

1. On montre que $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) \subset F$ (ce sens peut être assez simple, puisqu'il suffit de montrer que $e_1, e_2, e_3 \in F$ pour en déduire $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) \subset F$, car F est un sous-espace vectoriel et donc il contient n'importe quelle combinaison linéaire de ses vecteurs) et $F \subset \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$.
2. On montre que $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) \subset F$ (ce sens peut être assez simple, cf. point précédent) et on montre que $\dim(\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)) = \dim(F)$, ce qui permet de conclure que $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) = F$ (voir Théorème 28.21).

Si on est dans un sous-espace vectoriel (cela peut aussi être un espace vectoriel de référence !) dont on connaît la dimension, alors on peut parfois décider rapidement si la famille est génératrice (cf. Proposition 28.20 ; dans un espace de dimension 3, tout famille de deux vecteurs ou moins ne peut pas être génératrice).

- Résultats du cours : Définition 28.8, Proposition 28.20, Théorème 28.21.
- Exercices : 28.1, 28.2, 28.5, 28.7 (1,2,3)
- Exercices : 28.4
- Exercices : 28.6, 28.7 (4)

Déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Cela équivaut par définition à écrire le sous-espace vectoriel sous forme de sous-espace engendré, ce qui a déjà été travaillé dans le chapitre précédent.

- Résultats du cours : Définition 28.8.
- Exercices : 28.8
- Exercices :
- Exercices :

Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel ainsi que sa dimension

Dans cette section, on traite le cas où l'on ne connaît pas la dimension du sous-espace vectoriel dont on cherche une base.

On trouve d'abord une famille génératrice, puis on teste si cette famille est libre. Si ça n'est pas le cas, on enlève les vecteurs superflus.

- Résultats du cours : Proposition 28.4, Définition 28.8, Proposition 28.10, Définition 28.11.
- Exercices ☕ : 28.8, 28.9, 28.10, 28.18, 28.20
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Justifier qu'une famille est une base à l'aide de la dimension

Dans cette section, on traite le cas où l'on connaît la dimension du sous-espace vectoriel dont on cherche une base (le sous-espace vectoriel peut-être un espace vectoriel de référence, par exemple on peut vous demander de vérifier qu'une certaine famille de vecteurs est une base de $\mathbf{R}_4[X]$ par exemple).

En général, on se contente de vérifier que la famille proposée est libre et on compte qu'il y a bien autant de vecteurs que la dimension de l'espace dont on cherche une base.

- Résultats du cours : Définition 28.11, Définition 28.17, Définition 28.18, Proposition 28.20.
- Exercices ☕ : 28.3, 28.13, 28.14, 28.15
- Exercices ☕☕ : 28.20, 28.17
- Exercices ☕☕☕ :

Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux à l'aide de la dimension

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux, on peut se contenter de montrer que $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ (voir Théorème 28.21).

Si l'un des sous-espaces vectoriels est sous forme de sous-espace engendré, c'est généralement assez simple. Par exemple, pour montrer que $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$, on montre que $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset F$ (ce sens peut être assez simple, puisqu'il suffit de montrer que $e_1, e_2, e_3 \in F$ pour en déduire $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset F$, car F est un sous-espace vectoriel et donc il contient n'importe quelle combinaison linéaire de ses vecteurs) et on montre que $\dim(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \dim(F)$, ce qui permet de conclure que $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$

- Résultats du cours : Théorème 28.21.
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Compléter une famille libre en une base, par exemple pour déterminer un supplémentaire en dimension finie

En pratique, quand on veut compléter une famille libre en une base, on ajoute successivement des vecteurs issues d'une base canonique jusqu'à obtenir le bon nombre de vecteurs (il faut autant de vecteur que la dimension pour avoir une base) et on vérifie que pour chaque nouveau vecteur ajouté la famille reste libre (si la famille n'est plus libre, il faut pas ajouter le vecteur !).

- Résultats du cours : Proposition 28.5, Proposition 28.20, Théorème 28.14.
- Exercices ☕ : 28.11, 28.12, 28.21, 28.22, 28.24, 28.25
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ : 28.30

Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie

Si on a trois sous-espaces vectoriels E, F, G dont on connaît la dimension et qu'on veut montrer que $F \oplus G = E$, on montre généralement que $F \cap G = \{0\}$ (ce qui montre que F et G sont en somme directe) et on vérifie que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

- Résultats du cours : Théorème 28.27.
- Exercices ☕ : 28.19, 28.23
- Exercices ☕☕ : 28.26, 28.27
- Exercices ☕☕☕ : 28.29

Trouver le rang d'une famille de vecteurs

- Résultats du cours : Définition 28.28, Proposition 28.29.
- Exercices ☕ : 28.31
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :