Savez-vous faire ? 27 - Espaces vectoriels

Kit de survie du cours

Généralités

Les exemples fondamentaux d'espaces vectoriels sont les suivants :

- **L'ensemble des réels**. L'ensemble $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ des réels muni de l'addition et de la multiplication est un **R**-espace vectoriel.
- **L'ensemble des complexes**. L'ensemble $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ des complexes muni de l'addition et de la multiplication peut être vu comme un **R**-espace vectoriel ou un **C**-espace vectoriel.
- **L'ensemble des n-uplets $(\mathbf{K}^n)$.**
- **L'ensemble des polynômes $(\mathbf{K}[X])$.**
- **L'ensemble des matrices $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.**
- **L'ensemble des applications de Ω dans $\mathbf{K}$**, où Ω est un ensemble quelconque non vide. En particulier, l'ensemble des suites à valeurs dans **K** et l'ensemble des fonctions à valeurs dans **K** sont des **K**-espaces vectoriels.

Définition 27.1 (*Combinaison linéaire de vecteurs*). Soit E un **K**-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$

On dit qu'un vecteur u de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans **K** tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Sous-espaces vectoriels

Définition 27.2 (*Sous-espace vectoriel (sev)*). Soit F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si

SEV1 : $\forall\, u, v \in F, \quad u + v \in F$ (F est stable par addition)

SEV2 : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot u \in F$ (F est stable par multiplication externe)

SEV3 : $0_E \in F$.

Proposition 27.3 - Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F muni de l'addition et de la multiplication externe définies sur E est un **K**-espace vectoriel.

Proposition 27.4 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

Soit F un ensemble E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $F \subset E$.
2. $0_E \in F$.
3. $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Exemple 27.5 (♥). Les exemples suivants sont à retenir, ils sont tous utiles.

1. $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$.
2. Soit E une partie de $\mathbf{R}$.
   - $D^n(E, \mathbf{K})$ (ensemble des fonctions n fois dérivables de E vers $\mathbf{K}$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, \mathbf{K}), +, \cdot)$.
   - $\mathscr{C}^n(E, \mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, \mathbf{K}), +, \cdot)$.
   - $\mathscr{C}^\infty(E, \mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, \mathbf{K}), +, \cdot)$.
3. - L'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$.
   - L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$.
4. - L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures, resp. diagonales) est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.
   - L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.

Définition 27.6 (*Sous-espace engendré*). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $x_1, \dots, x_n$ et se note $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \,:\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}.$$

Définition 27.7 (*Vecteurs colinéaires*). Soit u et v deux vecteurs de E. On dit que u et v sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Proposition 27.8 - Un sous-espace engendré est un sous-espace vectoriel.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 27.9 - Le sev engendré par des vecteurs est le plus petit sev qui les contient.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient à la fois $x_1, x_2, \dots, x_n$
Cela signifie que pour tout sous-espace vectoriel G de E contenant $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset G$.

Proposition 27.10 - Simplifier un sous-espace engendré.

Soit $e_1, \dots, e_p, x$ des vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Soit $\lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbf{K}^\star$ des scalaires non nuls.

1. $\mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_p e_p) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$.
2. $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p, x) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$ si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Proposition 27.11 - L'intersection de sev est un sev.

Soit I un ensemble. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors,

$$G = \bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in F_i\},$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 27.12 (*Somme de sous-espaces vectoriels*). Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $F+G$ et on appelle **somme** des sous-espaces vectoriels F et G l'ensemble

$$F+G=\{f+g\ :\ f\in F, g\in G\}.$$

Proposition 27.13 - La somme de deux sev est un sev.

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 27.14 - La somme de deux sev est le plus petit sev qui les contient tous les deux.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $F\cup G$.
C'est-à-dire que pour tout sous-espace vectoriel H de E contenant $F\cup G$, on a :

$$F+G\subset H.$$

Proposition 27.15 - Écrire une somme de sev comme un sous-espace engendré.

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_p)$ deux familles de vecteurs de E. On note $F=\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ et $G=\operatorname{Vect}(y_1,\dots,y_p)$. Alors,

$$F+G=\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p).$$

Somme directe

Définition 27.16 (*Somme directe*). Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe** lorsque tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière **unique** en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\forall x,x'\in F, \forall y,y'\in G,\quad x+y=x'+y' \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & x' \\ y & = & y' \end{array}\right. .$$

Lorsque la somme de F et G est directe, on la note $F\oplus G$.

Proposition 27.17 - Deux caractérisations de la somme directe.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) F et G sont en somme directe.

(ii) $\forall (x,y)\in F\times G,\quad x+y=0_E \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0_E \\ y & = & 0_E \end{array}\right.$

(iii) $F\cap G=\{0_E\}$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 27.18 (*Sous-espaces supplémentaires*). Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout élément x de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\forall x \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

Si F et G sont supplémentaires, on note $E = F \oplus G$.

Proposition 27.19 - Deux caractérisations des espaces supplémentaires.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) F et G sont supplémentaires dans E.

(ii) $F + G = E$ et F et G sont en somme directe.

(iii) $F + G = E \quad$ et $\quad F \cap G = \{0_E\}$.

Méthode 27.20. *Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires*

En pratique, pour montrer que F et G sont supplémentaires, on peut faire un raisonnement par analyse-synthèse, en rédigeant soigneusement la phase d'analyse (qui montre l'unicité de la décomposition) ET la phase de synthèse (qui montre l'existence de la décomposition).

Méthodes et exercices à connaître

Tester si un vecteur appartient à un sous-espace engendré

Une des premières choses à savoir faire c'est de savoir tester si un vecteur x appartient à un sous-espace engendré de la forme $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, ce qui revient à chercher si x est combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_p$. Si c'est le cas, cela permet par exemple de faire la simplification suivante, utile en pratique (on le fera beaucoup dans le prochain chapitre) :

$$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, x) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p).$$

Cela peut aussi être utile pour montrer une inclusion du type $\text{Vect}(e_1, e_2) \subset \text{Vect}(e_3, e_4)$. Pour cela, on montre que $e_1 \in \text{Vect}(e_3, e_4)$ et $e_2 \in \text{Vect}(e_3, e_4)$, ce qui permet de conclure que $\text{Vect}(e_1, e_2) \subset \text{Vect}(e_3, e_4)$ (comme $\text{Vect}(e_3, e_4)$ est un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire de vecteurs de cet ensemble est encore dans cet ensemble).

- Résultats du cours : Définition 27.1, Définition 27.6, Définition 27.7
- Exercices ☕ : 27.3, 27.11, 27.12
- Exercices ☕☕ : 27.13
- Exercices ☕☕☕ :

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel avec la définition

Il faut connaître la définition mais en pratique on utilise plutôt la caractérisation donnée par la Proposition 27.4. De plus, si on veut montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel, il est très courant de l'écrire comme un sous-espace engendré ce qui donne automatiquement que c'est un sous-espace vectoriel.

- Résultats du cours : Définition 27.2, Proposition 27.3, Proposition 27.4
- Exercices ☕ : 27.1 (la question 8. est un peu plus pénible à bien justifier ; si vous comprenez sur un dessin c'est déjà bien !)
- Exercices ☕☕ : 27.2
- Exercices ☕☕☕ :

Écrire un ensemble sous forme de sous-espace engendré (pour en déduire que c'est un sous-espace vectoriel par exemple)

- Résultats du cours : Définition 27.6, Proposition 27.8, Proposition 27.10
- Exercices ☕ : 27.1 (pas toutes les questions, mais beaucoup !), 27.4, 27.5, 27.6, 27.9
- Exercices ☕☕ : 27.10
- Exercices ☕☕☕ :

Trouver un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel

Le reste est indispensable, cette méthode un peu moins. Elle est à étudier si le reste est déjà très bien compris.

- Résultats du cours :
- Exercices ☕ : 27.4 (3), 27.7, 27.8
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Montrer une égalité avec une somme de sous-espaces vectoriels

- Résultats du cours : Définition 27.12, Proposition 27.13, Proposition 27.15
- Exercices ☕ : 27.14, 27.15
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Déterminer l'intersection de sous-espaces vectoriels, par exemple pour montrer qu'une somme de sous-espaces vectoriels est directe

Pour montrer que deux sous-espaces sont en somme directe, on montre généralement que leur intersection est réduite à $\{0\}$. Il faut aussi savoir que si l'on décompose un vecteur dans une somme directe, alors cette décomposition est unique.

- Résultats du cours : Définition 27.16, Proposition 27.17
- Exercices ☕ : 27.14, 27.15
- Exercices ☕☕ : 27.16, 27.22
- Exercices ☕☕☕ :

Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires

Pour l'instant, la seule technique qu'on connaisse est l'analyse/synthèse (Méthode 27.20). Il faut apprendre le schéma de rédaction de ce raisonnement !

On verra dans le chapitre suivant une technique un peu plus courte pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires (mais qui ne donnera pas la décomposition explicite d'un vecteur comme somme de deux éléments de chaque espace supplémentaire ; la technique de ce chapitre est donc indispensable pour certaines questions !).

- Résultats du cours : Définition 27.18, Proposition 27.19, Méthode 27.20
- Exercices ☕ : 27.17, 27.18
- Exercices ☕☕ : 27.19, 27.20, 27.21, 27.24
- Exercices ☕☕☕ :