Savez-vous faire ? 26 - Séries numériques

Kit de survie du cours

Généralités

Définition 26.1 (*Série*). Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ définie par

$$\forall N \geqslant n_0, \quad S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N.$$

Cette série se note $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur la valeur de n_0.

Pour tout $N \geqslant n_0$, le nombre S_N est appelé la **somme partielle** de rang N de la série de terme général u_n.

Définition 26.2 (*Série convergente*). La série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ est convergente.

Sa limite finie est alors appelée **somme de la série** $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ et notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
Autrement dit, si $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ est convergente,

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{N} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Si la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est **divergente**.

Proposition 26.3 - Le terme général et le reste d'une série convergente tend vers 0.

Si la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente, **alors :**

1. la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0 ;
2. la suite $(R_N)_{N \geqslant n_0}$ des restes de la série converge vers 0.

Corollaire 26.4 - Divergence grossière.

Soit $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ une série numérique. Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge.
On dit que cette série **diverge grossièrement**.

Théorème 26.5 - Somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ deux séries numériques.
Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ divergente, alors $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + v_n)$ est divergente.

Proposition 26.6 - Critère de convergence d'une série à valeurs complexes.

Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geqslant n_0} \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geqslant n_0} \mathfrak{Im}(u_n)$ convergent. Le cas échéant,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n) + i \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n).$$

Définition 26.7 (*Série absolument convergente*). Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ converge.

Notation 26.8. Pour traduire qu'une suite est absolument convergente, on pourra noter $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ (attention, cette notation ne se généralise pas aux séries convergentes tout court).

Définition 26.9 (*Suite sommable*). On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **sommable** lorsque la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Définition 26.10 (*Somme d'une suite sommable*). Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est sommable, on appelle **somme de la suite** $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ la somme de la série qui lui associée, à savoir le nombre $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Théorème 26.11 - La convergence absolue entraîne la convergence.

Si une série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Séries usuelles

Définition 26.12 (*Série géométrique*). On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ où q est un nombre complexe.

Proposition 26.13 - Nature des séries géométriques.

Soit $q \in \mathbf{C}$. La série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Théorème 26.14 - Série exponentielle.

Soit $x \in \mathbf{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est appelée **série exponentielle**. C'est une série convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Définition 26.15 (*Série de Riemann*). On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

Théorème 26.16 - Nature des séries de Riemann.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

26.1 Comparaison série-intégrale

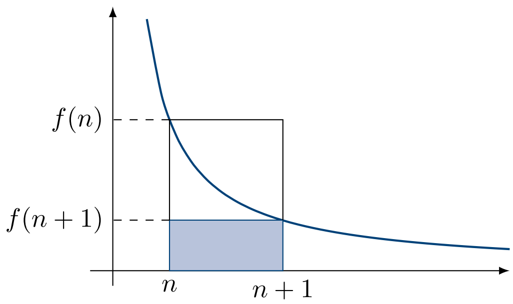
Les résultats de cette partie sont à savoir démontrer !

Lemme 26.17.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f : [n_0\,; +\infty[$. Pour tout $N \geqslant n_0$, on note $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$.

Si f est continue et décroissante, alors pour tout $N \geqslant n_0$,

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N) \leqslant S_N \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0).$$



Théorème 26.18 - Comparaison série-intégrale.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue, **décroissante** et positive ou nulle sur $[n_0\,; +\infty[$. Alors $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et $\left(\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant n_0}$ sont de même nature.

Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on pourra éventuellement retenir aussi le résultat suivant, un peu plus précis : il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{=} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + \mathrm{o}(1)\,.$$

En cas de divergence,

$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Critère de convergence pour des séries à termes positifs

Théorème 26.19 - Critère de comparaison par des inégalités.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}, (v_n)_{n\geqslant n_0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

1. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge aussi.
2. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ diverge aussi.

Théorème 26.20 - Règle de l'équivalent.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites à termes réels positifs ou nuls.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ sont de même nature.

Proposition 26.21 - Règle du grand O pour la convergence absolue.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels **positifs**.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Corollaire 26.22 - Règle du petit o pour la convergence absolue.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels **positifs**.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

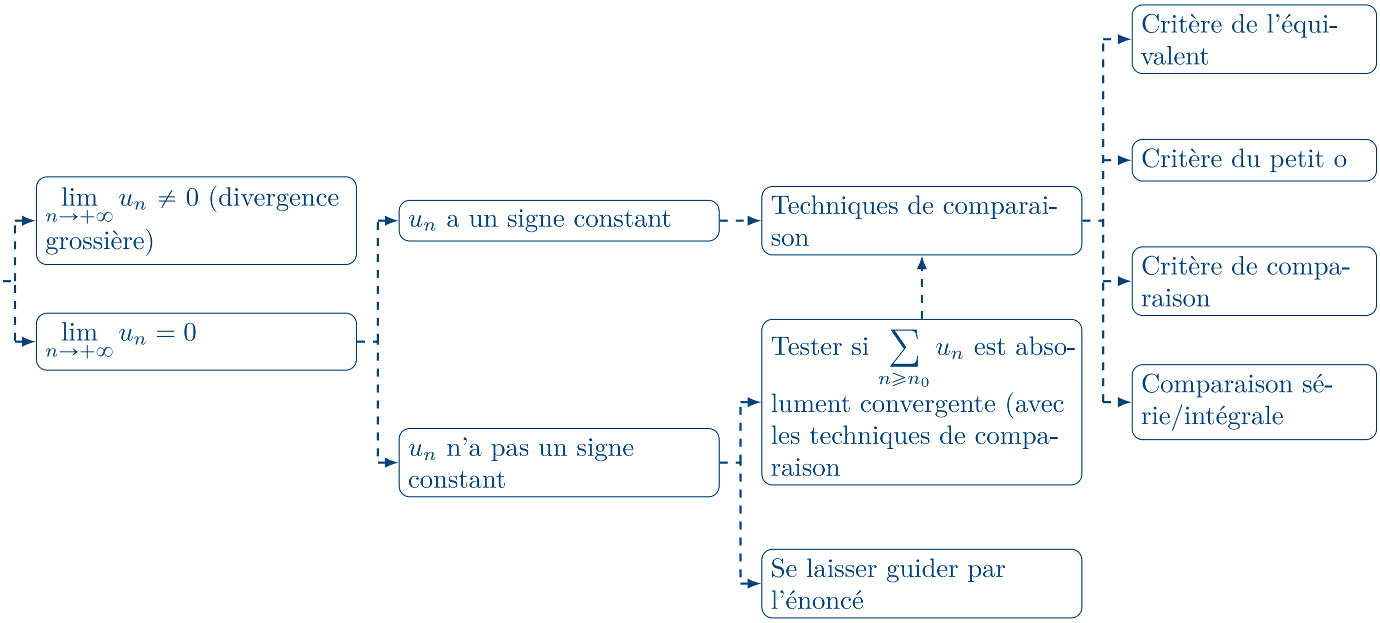
Lien entre suites et séries

Proposition 26.23 - Lien entre suite et série.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature.

Plan d'étude d'une série numérique

Considérons une série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ à termes quelconques.



Méthodes et exercices à connaître

Calcul de somme

Si on demande de déterminer la somme d'une série convergente, il n'y a pas tant de méthodes que cela : on reconnaît des sommes usuelles ou on fait un télescopage ! Ensuite on peut chercher la limite des sommes partielles.
On peut aussi utiliser le lien entre suite et série (voir un peu plus loin).

- Résultats du cours : Définition 26.1, Définition 26.2, Définition 26.12, Proposition 26.13, Théorème 26.14
- Exercices : 26.1 (1 à 11)
- Exercices : 26.1 (12), 26.2, 26.3 (2)
- Exercices : 26.4

Nature d'une série

Le plan d'étude est donné à la fin du kit de survie du cours. Savoir déterminer la nature d'une série est l'objectif prioritaire de ce chapitre !!

Si vous utilisez des résultats sur les séries à termes positifs, précisez bien que les séries sont à termes positifs !! C'est une erreur qui peut finir par coûter cher dans un devoir sur les séries.

Voici quelques conseils pour bien utiliser la règle du petit o. Supposons qu'on veuille trouver la nature d'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ (pas nécessairement à termes positifs).

1. On teste si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Si c'est le cas, comme pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), on peut conclure que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument, donc converge.

2. Si on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ mais que vous pensez que la série converge, essayez de montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $1 < \alpha < 2$.

3. Sinon, on teste si $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$. Si c'est le cas et que (u_n) est à termes positifs, comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann), la contraposée de la règle du petit o permet de conclure que $\sum_{n\geqslant 0}$ diverge.

- Résultats du cours : Définition 26.1, Définition 26.2, Corollaire 26.4, Théorème 26.5, Proposition 26.6, Définition 26.7, Théorème 26.11, Définition 26.12, Proposition 26.13, Théorème 26.14, Définition 26.15, Théorème 26.16, Théorème 26.19, Théorème 26.20, Proposition 26.21, Corollaire 26.22
- Exercices : 26.3 (1), 26.5, 26.6, 26.7
- Exercices :
- Exercices :

Comparaison série-intégrale

La méthode est à connaître car elle est parfois indispensable. Les deux résultats de cours sont à savoir redémontrer !

Les comparaisons entre séries et intégrales sont utiles pour justifier qu'une série converge ou diverge, mais aussi pour trouver un équivalent d'une série divergente.

- Résultats du cours : Lemme 26.17, Théorème 26.18.
- Exercices : 26.8
- Exercices :
- Exercices :

Lien entre suite et série

Inutile d'apprendre le résultat par cœur, il faut plutôt bien le comprendre et savoir le retrouver. Si vous avez une exercice avec une étude de suite et une série qui semble télescopique, ce paragraphe est utile ☺

- Résultats du cours : Proposition 26.23
- Exercices ☕ : 26.9
- Exercices ☕☕ : 26.10
- Exercices ☕☕☕ :

Exercices plus abstraits

Pour ces exercices, il faut se laisser guider et utiliser les résultats de comparaison des séries (pour ces exercices on se ramène rarement à des séries de référence mais plutôt à des séries données par l'énoncé mais qu'on ne connaît pas explicitement).

- Résultats du cours : Définition 26.1, Définition 26.2, Théorème 26.16, Théorème 26.19, Théorème 26.20, Proposition 26.21, Corollaire 26.22, Lemme 26.17, Théorème 26.18.
- Exercices ☕ : 26.12 (1, 2, 4), 26.13 (1)
- Exercices ☕☕ : 26.11, 26.14
- Exercices ☕☕☕ : 26.12 (3), 26.13 (2), 26.15