# Savez-vous faire ? 25 - Convexité de fonctions

## Kit de survie du cours

Dans tout ce chapitre, $I$ désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point.

**Définition 25.1 (*Fonction convexe, concave*).** Soit $f$ une fonction définie sur $I$ et à valeur dans $\mathbf{R}$.

1. On dit que $f$ est **convexe** sur $I$ si, seulement si,
$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0\,;\,1]\,,\quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$
2. On dit que $f$ est **concave** sur $I$ si, et seulement si, $-f$ est convexe autrement dit si, et seulement si,
$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0\,;\,1]\,,\quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

**Proposition 25.2 - Caractérisation graphique avec les cordes.**

1. Une fonction est convexe si, et seulement si, tout arc de sa courbe représentative est situé en dessous de la corde correspondante.
2. Une fonction est concave si, et seulement si, tout arc de sa courbe représentative est situé au dessus de la corde correspondante.

**Définition 25.3 (*Point d'inflexion*).** Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que $a$ est un **point d'inflexion** si $f$ est concave (resp. convexe) localement avant $a$ puis convexe (resp. concave) localement après $a$.

**Théorème 25.4 - Caractérisation des fonctions convexes/concaves dérivables.**

1. Une fonction $f$ dérivable sur $I$ est convexe sur $I$ si, et seulement si, sa dérivée $f'$ est croissante sur $I$.
2. Une fonction $f$ dérivable sur $I$ est concave sur $I$ si, et seulement si, sa dérivée $f'$ est décroissante sur $I$.

**Corollaire 25.5 - Caractérisation des fonctions convexes/concaves deux fois dérivables.**

1. Une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ deux fois dérivable sur $I$ est convexe sur $I$ si, et seulement si, sa dérivée seconde $f''$ est positive ou nulle sur $I$.
2. Une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ deux fois dérivable sur $I$ est concave sur $I$ si, et seulement si, sa dérivée seconde $f''$ est négative ou nulle sur $I$.

**Théorème 25.6 - Position de la courbe par rapport aux tangentes.**

La courbe représentative d'une fonction convexe (resp. concave) dérivable sur un intervalle $I$ est au-dessus (resp. en dessous) de chacune de ses tangentes sur $I$.

# Méthodes et exercices à connaître

## Exercices « abstraits » sur la convexité

- Résultats du cours : tout
- Exercices ☕ : 25.1
- Exercices ☕☕ : 25.2
- Exercices ☕☕☕ : 25.3

## Étude concrète de la convexité

On utilise essentiellement la dérivée seconde pour établir la convexité (car en pratique les fonctions étudiées sont très souvent deux fois dérivables), puis il faut se rappeler des résultats sur le courbes et tangentes pour tracer la fonction.

- Résultats du cours : Proposition 25.2, Corollaire 25.5, Théorème 25.6.
- Exercices ☕ : 25.4, 25.5, 25.6
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

## Inégalités de convexité

Une fois la convexité établie (souvent avec la dérivée seconde), on utilise les comparaisons par rapport aux cordes ou les tangentes pour conclure. Si l'énoncé ne donne pas d'indication, la tangente en zéro est souvent à considérer. Si on demande de montrer une inégalité sur $[a\,;\,b]$, la corde passant par les points d'abscisses $a$ et $b$ est à considérer, ainsi qu'éventuellement les tangentes en $a$ et en $b$.

- Résultats du cours : Proposition 25.2, Corollaire 25.5, Théorème 25.6.
- Exercices ☕ : 25.7
- Exercices ☕☕ : 25.8, 25.9
- Exercices ☕☕☕ : 25.10, 25.11