Savez-vous faire ? 23 - Étude de suites récurrentes

Kit de survie du cours

Dans ce chapitre, nous allons étudier les suites définies par la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \tag{23.1}$$

où f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles. Ce cours comporte peu de résultats théoriques, il présente plutôt des méthodes pour étudier de telles suites.

Généralités

Définition 23.1 (*Intervalle stable par une fonction*). Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}$. Un intervalle I contenu dans D est dit **stable** par f lorsque $f(I) \subset I$ c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

Proposition 23.2 - Condition suffisante pour que la suite donnée par (23.1) soit bien définie.

Si I est un intervalle stable par f et si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par (23.1) est bien définie et tous ses termes appartiennent à I.

Théorème 23.3 - Limites finies possibles pour u définie par (23.1) quand f est continue.

On suppose que I est un segment stable par f. Si f est continue, alors les limites finies possibles de u (définie par la relation (23.1)) sont les points fixes de f, à savoir les réels ℓ qui vérifient $f(\ell) = \ell$.

Cas où on ne guide pas vers une fonction contractante

Méthode 23.4. *Lien entre monotonie de la suite et signe de $f(x) - x$*

Le signe de $x \longmapsto f(x) - x$ sur I peut permettre d'obtenir le sens de variation de la suite.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \geqslant 0$, alors u est croissante (car si $u_n \in I$, alors $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ puis $u_{n+1} \geqslant u_n$; cette justification est à écrire à chaque fois).
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \leqslant 0$, alors u est décroissante (car si $u_n \in I$, alors $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ puis $u_{n+1} \leqslant u_n$; cette justification est à écrire à chaque fois).

Il faut être vigilant, ces résultats ne sont vrais que sur des intervalles stables (la stabilité de I permet d'obtenir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$).

Méthode 23.5. *Sens de variation de la suite si f est croissante*

Si f est croissante, alors la suite u est monotone (pas nécessairement croissante !). Comparer u_1 et u_0 permet alors de déterminer la monotonie de u. Si $u_1 \geqslant u_0$ on peut montrer que u est croissante, si $u_1 \leqslant u_0$ alors on peut montrer que u est décroissante.
Il faut systématiquement faire une récurrence pour démontrer ce résultat.

Méthode 23.6. *Cas où la fonction f est décroissante*

Si f est décroissante sur un intervalle stable, la suite u définie par (23.1) n'est pas monotone (elle n'admet donc pas toujours une limite). On sait tout de même que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Ce résultat est hors-programme et il faut le redémontrer à chaque fois.

- Si ces suites convergent vers une même limite alors u converge vers cette limite commune (d'après le théorème de convergence des suites extraites).
- Sinon u n'a pas de limite.

Cas où la fonction est contractante

Définition 23.7 (*Fonction contractante*). Un fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ est dite **contractante** lorsque f est k-lipschitzienne avec $k \in]0\,;1[$.

Méthode 23.8. *Plan d'étude lorsque f est contractante*

1. On montre que f est contractante sur un intervalle I (stable par f, évidemment !) en utilisant l'inégalité des accroissements finis.
2. On résout l'équation $f(x) = x$ pour chercher les points fixes de f (il en existe toujours un unique α, mais cette propriété n'est pas au programme).
3. Puisque f est contractante et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ (car I est stable par f), on obtient

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k\,|u_n - \alpha|\,,$$

ce qui s'écrit aussi $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\,|u_n - \alpha|$. On peut en déduire, avec un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant k^n\,|u_0 - \alpha|$.
4. Puisque $k \in]0\,;1[$, $k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc avec l'inégalité de **3.** et le théorème d'encadrement, $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Méthodes et exercices à connaître

On commence (presque) toujours les exercices d'étude de suites récurrentes par obtenir un intervalle stable pour la fonction f (car la Proposition 23.2) garantit alors que la suite est bien définie). On vous donne souvent les intervalles stables mais on peut dans des exercices plus difficiles vous laisser les trouver tout seul (des dessins peuvent alors aider !).

Cas où on ne guide pas vers une fonction contractante et f est croissante

Dans ces études, on cherche toujours à obtenir les variations de u en premier lieu. Si on n'est pas guidé, on peut s'intéresser au signe de $x \longmapsto f(x) - x$ (Méthode 23.4). Si on est guidé, c'est plutôt la Méthode 23.5 qu'il faut utiliser.

On applique ensuite le théorème de la limite monotone. Il y a alors deux situations :

1. la suite est croissante majorée (resp. décroissante minorée) donc le théorème de la limite monotone donne qu'elle converge vers une limite ℓ, qu'on peut obtenir en résolvant $f(\ell) = \ell$ cf. Théorème 23.3) ;
2. si on pense que la suite croissante n'est pas majorée (resp. décroissante minorée), on suppose par l'absurde qu'il y a une limite finie et on obtient une contraction ; la suite croissante (resp. décroissante) n'ayant pas de limite finie, elle diverge nécessairement vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) d'après le théorème de la limite monotone.

- Résultats du cours : Théorème 23.3, Méthode 23.4, Méthode 23.5.
- Exercices ☕ : 23.1, 23.3
- Exercices ☕☕ : 23.2, 23.8
- Exercices ☕☕☕ :

Cas où on ne guide pas vers une fonction contractante et f est décroissante ☕☕

À garder en seconde lecture, uniquement si vous avez déjà très bien compris tout le reste et que vous n'avez pas d'autres chapitres à réviser. En général, on vous guide pour ces exercices.

- Résultats du cours : définition de suites adjacentes, théorème de convergence des suites adjacentes, Théorème 23.3, Méthode 23.6.
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ : 23.7

Cas où la fonction est contractante

Le cas le plus simple selon moi, car la méthode est toujours la même (Méthode 23.8) donc si vous avez pris la peine de travailler/comprendre les différentes étapes de l'exercice, il ne vous posera jamais trop de problèmes.

- Résultats du cours : Définition 23.7, Méthode 23.8.
- Exercices ☕ : 23.4
- Exercices ☕☕ : 23.5
- Exercices ☕☕☕ : 23.6