Savez-vous faire ? — 22 - Développements limités

Kit de survie du cours

Définition et premières propriétés

Définition 22.1 (*Développement limité*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a**, ou plus simplement que f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ pour lesquels

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)\,.$$

La fonction $x \longmapsto a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$ est appelée **partie régulière** du développement limité.

Proposition 22.2 - Unicité des coefficients d'un développement limité.

En cas d'existence, la liste des coefficients d'un développement limité est unique.

Théorème 22.3 - Formule de Taylor-Young.

Soit I un intervalle, $n \in \mathbf{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ et :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)\,.$$

Théorème 22.4 - Lien développement limité, continuité, dérivabilité.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$.

- **Continuité**. f est continue en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_0(a)$. Le cas échéant, $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$.
- **Dérivabilité**. f est dérivable en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$. Le cas échéant, $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$.

Proposition 22.5 - Développement limité d'une fonction paire, impaire.

Supposons que f a un $\mathrm{DL}_n(0)$. Si f est paire (resp. impaire), son développement limité ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Théorème 22.6 - Intégration d'un développement limité.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f possède un développement limité en 0 à l'ordre n,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

alors toute primitive F de f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big(x^{n+1}\big)\,.$$

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une fonction dérivable f admet un développement limité à l'ordre n en a, sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité d'ordre $n-1$ en a. On ne PEUT PAS DÉRIVER des développements limités.

Développements limités usuels

- **DL qui se déduisent de celui de la fonction exponentielle.**
  - $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)\,;$
  - $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)\,;$
  - $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)\,;$
  - $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)\,;$
  - $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big).$
- **DL qui proviennent (directement ou indirectement) de celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.**
  - $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)\,;$
  - $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)\,;$
  - $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)\,;$
  - $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)\,;$
  - $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big).$

- **Autres DL à connaître.** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On note $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}$.
  - $\displaystyle (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)$;
  - $\displaystyle \tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.

Opérations et développements limités

Méthode 22.7. *Développement limité d'une combinaison linéaire*

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, soit $\lambda \in \mathbf{R}$, alors la fonction $f+\lambda g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f+\lambda g$ est la somme de la partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de f et de celui de g multiplié par λ.

Méthode 22.8. *Développement limité d'un produit*

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f\times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f\times g$ est obtenue en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières des DL à l'ordre n en 0 de f et g.

Méthode 22.9. *Développement limité en $a \neq 0$*

Pour calculer un $\mathrm{DL}_n(a)$, on calcule un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \longmapsto f(a+h)$ et on conclut avec le changement de variable $x = a+h$.

Méthode 22.10. *Développement limité d'un quotient de la forme $\frac{1}{1+f}$, où f tend vers 0*

Quand on veut calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+f}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on peut toujours composer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+u}$ avec un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

Méthode 22.11. *Développement limité d'un quotient de la forme $\frac{1}{f}$, où f tend vers une limite finie non nulle*

Si f tend vers $\ell \in \mathbf{R}^\star$, alors on peut trouver un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{f}$ en remarquant que, pour tout x au voisinage de 0,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1-\frac{\ell - f(x)}{\ell}}.$$

et que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\ell - f(x)}{\ell}$ tend vers 0 en 0.

Méthode 22.12. *DL d'un quotient de la forme $\frac{f}{g}$, où g tend vers une limite finie non nulle*

On a $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ et on sait calculer un développement limité de $\dfrac{1}{g}$ d'après la méthode précédente, donc il ne restera plus qu'à multiplier deux développements limités pour conclure.

Méthode 22.13. *DL d'un quotient de la forme $\frac{f}{g}$, où f et g tendent vers 0*

Si on veut un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{f}{g}$ et que f, g tendent toutes deux vers 0 en 0, alors il faut écrire le développement limité du numérateur et du dénominateur, puis simplifier le plus possible les polynômes obtenus, de sorte que le dénominateur ne tende plus vers 0 en 0. L'ordre jusqu'où écrire les développements limités n'est pas évident, il faudra faire une rapide analyse au brouillon avant de se lancer.

Applications des développements limités

Proposition 22.14 - DL et prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et a une extrémité de D qui n'appartient pas à D.

1. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_0(a)$ qu'on note $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + \mathrm{o}(1)$. Alors on peut prolonger f par continuité en a. Plus précisément, le prolongement sera la fonction ci-après :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccl} D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in D \\ a_0 & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

2. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$ qu'on note $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x-a)$. Alors le prolongement $\tilde{f}$ ci-avant est dérivable en a et $\tilde{f}'(a) = a_1$.

Proposition 22.15 - Trouver un équivalent à partir d'un DL.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}$. On note

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f, dans lequel $a_p \neq 0$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Proposition 22.16 - Lien entre DL et la tangente à la courbe.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite de a et que f admet un développement limité de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)\,,$$

avec $n \geqslant 2$ et $a_n \neq 0$. Alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est

$$y = a_0 + a_1(x-a).$$

De plus,

- Si n est impair, la courbe traverse la tangente (on dit alors que a est un **point d'inflexion**).
- Si n est pair et $a_n > 0$, alors f est au dessus de sa tangente.
- Si n est pair et $a_n < 0$, alors f est en dessous de sa tangente.

Définition 22.17 (*Asymptote d'une fonction en* $\pm\infty$). Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $\pm\infty$ et $a, b \in \mathbf{R}$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour **asymptote** au voisinage de $\pm\infty$ si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} ax + b + \mathrm{o}(1)$.

Proposition 22.18 - Lien entre extrema et équivalents.

Soit f une fonction dérivable définie à gauche et à droite de a qui vérifie

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} a_p (x-a)^p$$

avec $p \geqslant 2$.

- Si p est un nombre pair et $a_p < 0$, alors $f(a)$ est un maximum local de f.
- Si p est un nombre pair et $a_p > 0$, alors $f(a)$ est un minimum local de f.
- Si p est un nombre impair, alors $f(a)$ n'est pas un extremum local de f.

Méthodes et exercices à connaître

Déterminer un développement limité sur un exemple concret

Il faut connaître les développements limités usuels et les règles opératoires sur les DL. Il n'y a pas énormément de cours à connaître, mais il faut beaucoup vous entraîner pour maîtriser les développements limités, qui joueront un rôle très important pour le reste de cette année et l'année prochaine.

- Résultats du cours : Définition 22.1, Proposition 22.5, Théorème 22.6, Méthode 22.7, Méthode 22.8, Méthode 22.9, Méthode 22.10, Méthode 22.11, Méthode 22.12, Méthode 22.13.
- Exercices ☕ : 22.1, 22.2
- Exercices ☕☕ : 22.4, 22.5
- Exercices ☕☕☕ :

Déterminer un équivalent à l'aide d'un développement limité

Cette méthode est à bien connaître quand on cherche un équivalent d'une somme où l'on n'a pas de termes négligeables. Cette situation arrive très souvent pratique !

- Résultats du cours : Proposition 22.15.
- Exercices ☕ : 22.6, 22.7
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Déterminer un prolongement et la régularité du prolongement

Sans les DL on sait faire, mais c'est long ! Avec les DL, prolongement une fonction et étudier sa dérivabilité est presque immédiat.

- Résultats du cours : Théorème 22.4, Proposition 22.14.
- Exercices ☕ : 22.8
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Déterminer l'équation d'une tangente/d'une asymptote

- Résultats du cours : Proposition 22.16, Définition 22.17.
- Exercices ☕ : 22.9, 22.10
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :