

## Kit de survie du cours

### Fonction négligeable ou dominée par une autre au voisinage d'un point (petit o et grand O)

**Définition 21.1 (Négligeabilité, domination).** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .

1.  $f$  est **négligeable** devant  $g$  au voisinage de  $a$  si il existe une fonction  $\varepsilon : D \rightarrow \mathbf{R}$ , vérifiant  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  et telle qu'au voisinage de  $a$  on ait  $f = g \times \varepsilon$ .  
On écrit alors :  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  ou  $f \underset{a}{=} o(g)$  et on lit «  $f$  est un petit o de  $g$  au voisinage de  $a$  ».
2. On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe  $M \in \mathbf{R}_+$  tel qu'au voisinage de  $a$  on ait  $|f| \leq M|g|$ .  
On écrit alors :  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$  ou  $f \underset{a}{=} O(g)$  et on lit «  $f$  est un grand O de  $g$  au voisinage de  $a$  ».

#### Proposition 21.2 - Caractérisation de la négligeabilité.

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  sauf éventuellement en  $a$ . Si  $a \in D$  et  $g(a) = 0$ , on suppose que  $f(a) = 0$ .

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  si, et seulement si, la fonction  $\frac{f}{g}$  définie au voisinage de  $a$ , sauf éventuellement en  $a$ , tend vers 0 en  $a$ .

#### Proposition 21.3 - Opérations avec les petits o.

Soit  $f, g, h, u, v$  des fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{R}^*$ .

1. Les petits o absorbent les constantes multiplicatives. Si  $f \underset{a}{=} o(g)$ , alors  $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$  et  $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$ .
2. La somme de deux petits o est un petit o. Si  $f \underset{a}{=} o(h)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$ , alors  $f + g \underset{a}{=} o(h)$ .
3. Un petit o d'un petit o est un petit o (la relation « être négligeable » est transitive). Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$ , alors  $f \underset{a}{=} o(h)$ .
4. Avec le produit, tout va bien.
  - Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $u \underset{a}{=} o(v)$ , alors  $fu \underset{a}{=} o(gv)$ .
  - Si  $f \underset{a}{=} o(g)$ , alors  $fh \underset{a}{=} o(gh)$ .
5. Quand on inverse, la négligeabilité change. Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et que  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ , alors  $\frac{1}{g} \underset{a}{=} o\left(\frac{1}{f}\right)$ .

**Proposition 21.4 - Changement de variable.**

Soit  $f, g : D \rightarrow \mathbf{R}$  et  $h : E \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $h(E) \subset D$ . Soit  $a$  un point ou une extrémité de  $E$  et  $b$  un point ou une extrémité de  $D$

Si  $f(y) = o(g(y))$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ , alors  $f(h(x)) = o(g(h(x)))$ .

**Proposition 21.5 - Lien entre  $o$  et  $O$  (petit  $o$  entraîne grand  $O$ ).**

Soit  $f, g : D \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $f(x) = o(g(x))$ , alors  $f(x) = O(g(x))$ .

**Théorème 21.6 - Théorème des croissances comparées.**

Soit  $a, b > 0$ .

- |                          |                                                 |
|--------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. $\ln(x)^a = o(x^b)$ ; | 2. $ \ln(x) ^a = o\left(\frac{1}{x^b}\right)$ ; |
| 3. $x^b = o(e^{ax})$ ;   | 4. $ x^b  = o(e^{-ax})$ .                       |

**Proposition 21.7 - Comparaison de monômes en 0 et en  $+\infty$ .**

Si  $m, n \in \mathbf{N}$  tels que  $m < n$ , alors :

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $x^m = o(x^n)$ ; | 2. $x^n = o(x^m)$ ; | 3. $x^m = o(x^n)$ . |
|---------------------|---------------------|---------------------|

## Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

**Définition 21.8 (Équivalence de fonctions).** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .

On dit que  $f$  est **équivalente** à  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $u : D \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$  et telle qu'au voisinage de  $a$  on ait  $f = g \times u$ .

On écrit alors  $f \underset{a}{\sim} g$  ou  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et on lit «  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  ».

**Proposition 21.9 - Caractérisation par le quotient.**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  sauf éventuellement en  $a$ . Si  $a \in D$  et  $g(a) = 0$ , on suppose que  $f(a) = 0$ .

On peut affirmer que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  si, et seulement si, la fonction  $\frac{f}{g}$ , définie au voisinage de  $a$  sauf éventuellement en  $a$ , tend vers 1 en  $a$ .

**Théorème 21.10 - Lien entre équivalence et négligeabilité.**

Sous les hypothèses de la définition,  $f \underset{a}{\sim} g$  si et seulement si  $f = g + o(g)$ .

### Proposition 21.11 - Principales propriétés des équivalents.

Soit  $f, g, h, s, t$  des fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ . Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

1. Symétrie. Si  $f \sim_a g$ , alors  $g \sim_a f$ .
2. Transitivité. Si  $f \sim_a g$  et  $g \sim_a h$ , alors  $f \sim_a h$ .
3. Conservation du signe. Si  $f \sim_a g$  et si  $g$  est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de  $a$ , alors  $f$  l'est aussi.
4. Dans les petits  $o$ , on peut remplacer toute fonction par une fonction équivalente. Si  $g \sim_a f$ , si  $s \sim_a t$  et si  $f = o(s)$ , alors  $g = o(t)$ .
5. Produit. Si  $f \sim_a g$  et  $s \sim_a t$ , alors  $fs \sim_a gt$ .
6. Inverse. Si  $f \sim_a g$  et si  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors  $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$ .
7. Puissances. Si  $f \sim_a g$  et si  $f$  est strictement positive au voisinage de  $a$ , alors  $f^\alpha \sim_a g^\alpha$ .



### ATTENTION



Tout ce qui n'est pas écrit ci-avant ou ci-après est faux ! En particulier,

1. on n'écrit JAMAIS qu'une fonction non localement nulle est équivalente à 0 ;
2. on n'effectue JAMAIS de sommes d'équivalents ;
3. on n'applique JAMAIS une fonction à un équivalent (ce qui revient à : on ne compose JAMAIS un équivalent par une fonction ou encore : on ne remplace JAMAIS l'expression à l'« intérieur » d'une fonction par un équivalent).

### Proposition 21.12 - Changement de variable dans un équivalent.

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $h$  une fonction définie sur  $E$  telle que  $h(E) \subset D$ . Soit  $a$  un point ou une extrémité de  $E$  et  $b$  un point ou une extrémité de  $D$ .

Si  $f(y) \underset{y \rightarrow b}{\sim} g(y)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ , alors  $f(h(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(h(x))$ .

### Proposition 21.13 - Conservation de la limite.

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$ ,  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$  et  $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ .

Si  $f \sim_a g$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , alors  $g$  admet aussi une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .

### Proposition 21.14 - Équivalent d'une fonction qui admet une limite finie non nulle.

Soit  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ . Si  $f$  possède une limite **finie non nulle**  $\ell$  en  $a$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$ .

### Proposition 21.15 - Lien entre équivalent et grand O.

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .

Si  $f \sim_a g$ , alors  $f = O_a(g)$ .

**Proposition 21.16 - Équivalents usuels.**

- $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2};$
- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- Si  $\alpha \neq 0$ ,  $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x;$
- $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

**Théorème 21.17 - Théorème d'encadrement pour les équivalents.**

Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .  
Si  $f \leq g \leq h$  au voisinage de  $a$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ .

**Méthode 21.18.** *Obtention d'un équivalent d'un logarithme*

Soit  $u$  une fonction strictement positive définie sur  $D$ . Soit  $a$  un point ou une extrémité de  $D$ . On explique ici comment trouver un équivalent de  $x \mapsto \ln(u(x))$  en  $a$ .

- Si  $u$  possède en  $a$  une limite finie  $\ell$  strictement positive et différente de 1, alors  $\ln(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(\ell)$  (par composition de **limites**, surtout pas par composition d'équivalents!).
- Si  $u$  tend vers 1 en  $a$  alors  $\ln(u(x)) = \ln(1 + \underbrace{u(x) - 1}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0}) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x) - 1$  par changement de variable (calcul à refaire systématiquement).
- Si  $u$  tend vers 0 ou  $+\infty$  : on cherche un équivalent  $v(x)$  de  $u(x)$  en  $a$ , puis on vérifie que  $\ln(v(x))$  est bien un équivalent de  $\ln(u(x))$  en montrant que  $\frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  (calcul à refaire systématiquement).

# Méthodes et exercices à connaître

## Démontrer qu'une fonction est un petit o ou un grand O d'une autre

Il faut connaître les définitions de petit o et grand O, mais c'est surtout les petits o qu'on utilisera en pratique. De plus, pour montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre, on utilise rarement la définition mais plutôt la caractérisation avec les limites (Proposition 21.2).

Pour ce chapitre, hormis la définition et la caractérisation des petits o, il faut retenir les opérations autorisées sur les petits o ainsi que le théorème des croissances comparées, qui donne les petits o importants à connaître.

- Résultats du cours : Définition 21.1, Proposition 21.2, Proposition 21.3, Proposition 21.4, Théorème 21.6, Proposition 21.7.
- Exercices  : 21.1 (1.(a), 1.(b), 1.(d), 2.)
- Exercices  : 21.1 (1.(c))
- Exercices  :

## Déterminer un équivalent

Comme pour les petits o, la définition de fonctions équivalentes est à connaître mais c'est surtout la caractérisation avec les limites qui est utile en pratique (Proposition 21.9).

Pour déterminer un équivalent sur un exemple concret (quand on donne l'expression de la fonction ou de la suite), il y a plusieurs situations à maîtriser.

1. Si la fonction dont on cherche un équivalent admet une limite non nulle, alors cette limite est un équivalent de la fonction (Proposition 21.14).
2. Si on a un produit, un quotient ou une puissance de fonctions usuelles : on utilise les équivalents de référence (Proposition 21.16).
3. « Composée » du type  $x \mapsto f(g(x))$  et qu'on cherche un équivalent au voisinage d'un point  $a$ . Deux méthodes.
  - (a) On fait un changement de variable, c'est à dire qu'on pose  $X = g(x)$  et qu'on cherche un équivalent de  $f(X)$  au voisinage de la limite de  $g$  en  $a$  (en pratique cette limite existera!). Par exemple, en utilisant  $u = \operatorname{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ , on a

$$\sin(2 \operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

Attention, si vous écrivez  $\sin(2 \operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(2x)$  vous faite une erreur de raisonnement car vous composez des équivalents !

- (b) On passe par les développements limités (voir chapitre suivant). Cette méthode est très efficace et fonctionne toujours ! Par exemple, en utilisant  $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u)$  avec  $u = 2(x + o(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on a :

$$\sin(2 \operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(2(x + o(x))) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + o(x).$$

d'où  $\sin(2 \operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$ .

4. Somme. Encore deux méthode.

- (a) On utilise les développements limités (cf. chapitre suivant). Cette méthode est à privilégier et peut être utilisée si on reconnaît des formules usuelles. Si ça n'est pas le cas, il faut faire ce qui suit. Par exemple, en utilisant  $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$  avec  $u = x + x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on a :

$$\begin{aligned} e^{x+x^2} - \ln(1+x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x + x^2) + \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + o(x^2) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^2}{2} - 1 + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

donc  $e^{x+x^2} - \ln(1+x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^2$ . Remarquez que si on se contente de faire une très laide somme d'équivalents, on obtient 0, ce qui n'est pas joli non plus !

(b) On peut « enlever » les termes négligeables dans une somme pour obtenir un équivalent. Par exemple,

$$x + \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$$

car  $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$  (Théorème 21.10). La méthode expliquée en 4.(a) ne peut pas s'appliquer, car on ne reconnaît pas de formules usuelles avec les équivalents en 0.

5. Si on a un logarithme népérien : tout est dit dans la Méthode 21.18. Si on a un logarithme népérien dans un polynôme, on peut tenter une factorisation par le monôme de plus haut degré à l'intérieur du logarithme si on est au voisinage de  $+\infty$ . Par exemple,

$$\ln(n^2 + n) = \ln\left(n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 2\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ln(n).$$

6. Fonction de référence  $f$  dérivable dont on ne connaît pas un équivalent en  $a$  : on peut utiliser formule  $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$ .

Les équivalents usuels sont donnés en 0, vous devez aussi savoir trouver un équivalent en un autre point (par exemple, si on demande un équivalent d'une fonction  $f$  en 1, on cherchera un équivalent de  $x \mapsto f(x + 1)$  au voisinage de 0 ; si on demande un équivalent en l'infini, on cherchera un équivalent de  $x \mapsto f(\frac{1}{x})$  au voisinage de 0).

Pour les exercices plus théorique (par exemple quand on étudie une suite implicite ou une suite définie par récurrence et qu'on ne connaît pas explicitement l'expression de la suite), on peut utiliser la définition pour trouver un équivalent ou le théorème des gendarmes (Théorème 21.17).

- Résultats du cours : Définition 21.8, Proposition 21.9, Théorème 21.10, Proposition 21.11, Proposition 21.12, Proposition 21.14, Proposition 21.16, Théorème 21.17, Méthode 21.18
- Exercices  : 21.2, 21.3, 21.4, 21.5, 21.10, 21.11
- Exercices  :
- Exercices  :

## Application des équivalents : déterminer une limite

- Résultats du cours : Proposition 21.13
- Exercices  : 21.6, 21.7
- Exercices  : 21.8, 21.9
- Exercices  :