

Kit de survie du cours

Définitions et premières propriétés

Définition 20.1 (Nombre dérivé). Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I . La fonction f est dite **dérivable en a** si, et seulement si, la fonction τ_a , appelée **taux d'accroissement de f en a** et définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a . Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** , et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. Autrement dit, sous réserve d'existence et de finitude des limites,

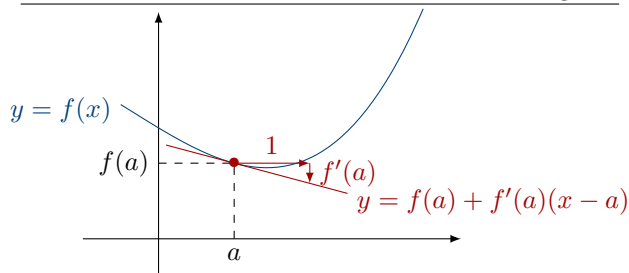
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition 20.2 (Tangente). Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable en $a \in I$. On appelle **tangente** au graphe $\mathcal{C}$ de f en a l'unique droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point $(a, f(a))$. Cette droite a pour équation

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

En particulier, le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en a .

Illustration du lien entre nombre dérivé et tangente



Définition 20.3 (Tangente verticale). Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$. Si la limite du taux d'accroissement de $|f|$ en a est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$), alors la courbe représentative de f admet une **tangente verticale** au point d'abscisse a . Une équation de la tangente est alors $x = a$.

En particulier, une fonction pour laquelle la courbe représentative admet une tangente verticale en un point A d'abscisse a n'est pas dérivable en a .

Proposition 20.4 - Développement limité à l'ordre 1.

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$.

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si il existe un réel α et une fonction ε définie sur I tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans ce cas, α est nécessairement égal à $f'(a)$ et l'on dit que f possède un **développement limité à l'ordre 1 en a** .

Définition 20.5 (Dérivabilité à gauche, à droite). Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$.

1. Si f est définie à droite de a , on dit que f est **dérivable à droite** en a lorsque $f|_{I \cap [a; +\infty[}$ est dérivable en a , c'est-à-dire lorsque son taux d'accroissement en a possède une limite finie à droite en a . Le cas échéant, cette

limite est le **nombre dérivé à droite** de f en a et se note $f'_d(a)$. Autrement dit, sous réserve d'existence et de finitude des limites,

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2. Si f est définie à gauche de a , on dit que f est **dérivable à gauche** en a lorsque $f|_{I \cap]-\infty; a]}$ est dérivable en a , c'est-à-dire lorsque son taux d'accroissement en a possède une limite finie à gauche en a . Le cas échéant, cette limite est le **nombre dérivé à gauche** de f en a et se note $f'_g(a)$. Autrement dit, sous réserve d'existence et de finitude des limites,

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Proposition 20.6 - Lien entre dérivabilité, dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite.

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$. Lorsque a n'est pas une extrémité de I , la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a et vérifie $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 20.7 - Lien entre continuité et dérivabilité.

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I .

1. Si f est dérivable à droite en a , alors f est continue à droite en a .
2. Si f est dérivable à gauche en a , alors f est continue à gauche en a .
3. Si f est dérivable à droite et à gauche en a , alors f est continue en a .

Proposition 20.8 - Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Soit f et g deux fonctions définies sur I , $a \in I$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

1. Si f et g sont dérivables en a (resp. sur I) alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a (resp. sur I) et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

(resp. $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$).

2. Si f et g sont dérivables en a (resp. sur I) alors fg est dérivable en a (resp. sur I) et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(resp. $(fg)' = f'g + fg'$).

3. Si g est dérivable en a (resp. sur I) et si $g(a) \neq 0$ (resp. g ne s'annule pas sur I), alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a (resp. sur I) et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$$

(resp. $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$).

Si de plus f est dérivable en a (resp. sur I), alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a (resp. sur I) et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

(resp. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$).

Proposition 20.9 - Dérivée d'une composée.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(I) \subset J$, $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$.

1. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

2. Si f et g sont respectivement dérivables sur I et $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f).$$

Théorème 20.10 - Dérivée d'une bijection réciproque.

Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective continue et strictement monotone. Soit $b \in J$.

1. Si f est dérivable en $f^{-1}(b)$ et si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si f est dérivable en $f^{-1}(b)$ et si $f'(f^{-1}(b)) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b , mais sa représentation graphique présente une tangente verticale au point de coordonnées $(b, f^{-1}(b))$.

2. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Dérivées successives

Définition 20.11 (Dérivée n -ième). Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.

Si f est dérivable sur I , sa dérivée f' peut elle-même être dérivable sur I . On appelle alors **dérivée seconde** de f la dérivée de f' et on la note f'' . On dit alors que f est deux fois dérivable sur I .

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si f est n fois dérivable sur I , on note $f^{(n)}$ sa dérivée n -ième. Plus précisément, les dérivées successives de f sont définies par récurrence par

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

La dérivée n -ième de f est aussi notée $D^n f$ ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Définition 20.12 (Classe $\mathcal{C}^n$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^n$** sur I si f est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n -ième $f^{(n)}$ est continue sur I .

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$.

Par convention, l'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ des fonctions réelles continues sur I est aussi noté $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I si f possède des dérivées de tous ordres sur I . Une telle fonction est dite indéfiniment dérivable.

L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$.

Proposition 20.13 - Opérations sur les dérivées n -ièmes.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , soit λ et μ deux réels. Soit h définie sur un intervalle J avec $f(I) \subset J$. Supposons f , g et h de classe $\mathcal{C}^n$ sur leur ensemble de définition. Alors :

1. la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
2. si g ne s'annule pas sur I , on a que la fonction $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .
3. la fonction $h \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .
4. si f est bijective et que f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ (sur $f(I)$).

Théorème 20.14 - Formule de Leibniz.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I , alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Corollaire 20.15 - Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Les sommes, produits, composées, quotients de fonctions de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

« Gros » théorèmes sur la dérivabilité

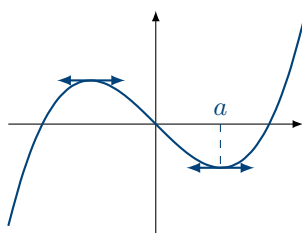
Définition 20.16 (Extrema locaux, point critique). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I .

- On dit que f possède un **maximum** (resp. **minimum**) **local** en a si f est majorée (resp. minorée) par $f(a)$ au voisinage de a .
- On dit que a est un **point critique** de f si f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$.

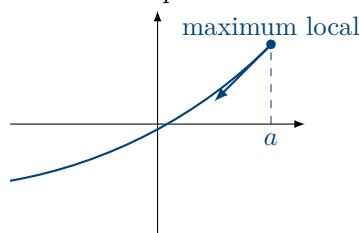
Théorème 20.17 - Lien entre extremum local et point critique.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un point de I **qui n'est pas une extrémité de I** . Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f .

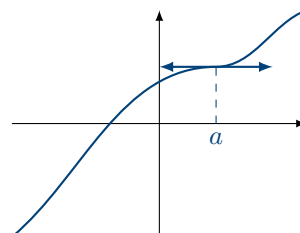
Illustration du théorème



L'hypothèse « a n'est pas une extrémité » est importante



La réciproque du théorème est fausse

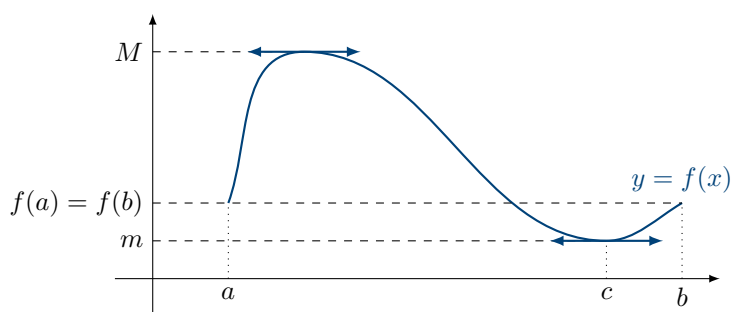


Théorème 20.18 - Théorème de Rolle.

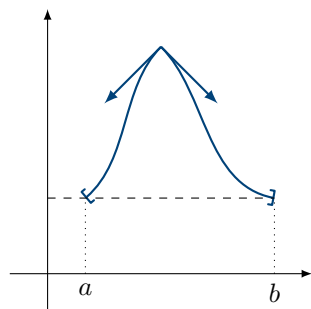
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a; b]$. Si les trois hypothèses suivantes sont respectées :

- (a) f est continue sur le segment $[a; b]$;
- (b) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$;
- (c) $f(a) = f(b)$,

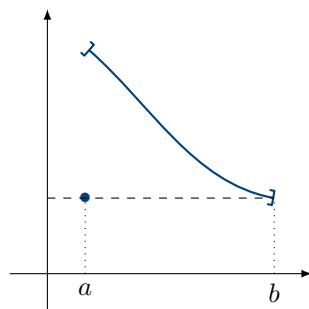
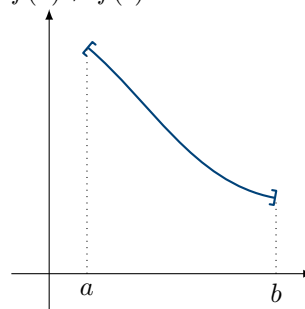
alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Fonction non dérivable



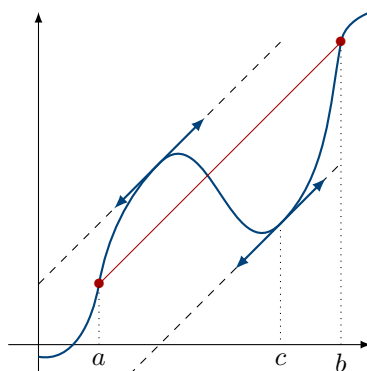
Fonction non continue au bord

 $f(a) \neq f(b)$ **Théorème 20.19 - Théorème des accroissements finis (TAF).**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$. Si les deux hypothèses suivantes sont respectées :

- (a) f est continue sur le segment $[a; b]$;
- (b) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$,

alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Théorème 20.20 - Caractérisation des fonctions constantes dérivables.

Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I . f est constante si et seulement si f' est nulle sur I .

Théorème 20.21 - Lien entre dérivée et variations.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I .
2. f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a; b]$ avec $a < b$.
En particulier, si f' est strictement positive sur I et ne s'annule au plus qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I .

On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les fonctions décroissantes.

Définition 20.22 (Fonction lipschitzienne). Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{R}_+$. On dit que f est une fonction k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

On dit que f est **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ telle que f est k -lipschitzienne.

Théorème 20.23 - Inégalité des accroissements finis (IAF).

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a; b]$. Soit m et M deux réels tels que $m \leq M$. Si les hypothèses suivantes sont respectées :

- (a) f est continue sur le segment $[a; b]$;
- (b) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$;
- (c) pour tout $x \in]a; b[$, $m \leq f'(x) \leq M$,

alors on a :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Corollaire 20.24 - Inégalité des accroissements finis - Version lipschitzienne.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a; b]$. Soit k un réel positif ou nul. Si les hypothèses suivantes sont respectées :

- (a) f est continue sur le segment $[a; b]$;
- (b) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$;
- (c) pour tout $x \in]a; b[$, $|f'(x)| \leq k$,

alors f est k -lipschitzienne sur $[a; b]$, c'est-à-dire que f vérifie :

$$\forall x, y \in [a; b], \quad |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

Théorème 20.25 - Théorème de la limite de la dérivée.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I . Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On suppose que :

- (a) f est continue sur I ;
- (b) f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$;
- (c) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$,

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. En particulier,

- si $\ell \in \mathbf{R}$, on a f dérivable en a avec $f'(a) = \ell$;
- si $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$, f n'est pas dérivable en a et la courbe représentative de f présente une tangente verticale au point d'abscisse a .

Fonctions à valeurs complexes

Définition 20.26 (Nombre dérivée - cas d'une fonction à valeurs complexes). Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite **dérivable en** $a \in I$ si, et seulement si, la fonction $\tau_a : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, appelée **taux d'accroissement** de f en a et définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall t \in I \setminus \{a\}, \quad \tau_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

admet une limite (obligatoirement finie) quand t tend vers a . Cette limite est appelé **nombre dérivé** de f en a , et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{df}{dt}(a)$. Autrement dit, sous réserve d'existence de la limite :

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Proposition 20.27 - Lien avec la partie réelle et la partie imaginaire.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a (resp. sur I) si, et seulement si, les deux fonctions à valeurs réelles $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables en a (resp. sur I). Dans ce cas on a de plus

$$f'(a) = (\Re(f))'(a) + i (\Im(f))'(a).$$

et respectivement

$$f' = (\Re(f))' + i (\Im(f))'.$$

Méthodes et exercices à connaître

Montrer qu'une fonction est dérivable

Si la fonction n'est pas définie par morceaux ou construite à partir d'une fonction non dérivable en un point (avec la fonction valeur absolue, racine carrée, Arcsin ou Arccos par exemple), le plus simple est d'utiliser les opérations usuelles sur les fonctions dérivables (propositions 20.8 ou 20.9).

La dérivabilité en un point peut poser problème dans deux situations essentiellement.

1. La fonction est définie par morceaux : il faut étudier la dérivabilité « où ça saute ». Le plus simple est d'utiliser les expressions des dérivées à gauche et à droite (Proposition 20.6). C'est aussi utile quand il y a une partie entière (car l'expression est différente à gauche et à droite de chaque entier).
2. La dérivabilité sur une extrémité du domaine de définition n'est pas assurée (par exemple une fonction composée avec Arccos, Arcsin, racine carrée) : on peut utiliser le théorème de la limite de la dérivée (Théorème 20.25). Le problème est que ce théorème ne permet pas toujours de conclure (il le permet presque toujours, mais bon...). Dans ce cas, il faut revenir la définition de la dérivabilité (Définition 20.1) et étudier l'existence de la limite du taux d'accroissement.

- Résultats du cours : Définition 20.1, Définition 20.5, Proposition 20.6, Proposition 20.8, Proposition 20.9, Théorème 20.10
- Exercices  : 20.2, 20.3, 20.4, 20.5, 20.7
- Exercices  : 20.6, 20.9, 20.10
- Exercices  : 20.8

Manipuler les dérivées multiples

La question est souvent de trouver l'expression d'une dérivée n -ième d'une fonction donnée. Le plus simple, si possible, est de reconnaître un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et d'utiliser la formule de Leibniz (Théorème 20.14). Sinon, il faut calculer les premières dérivées, conjecturer une formule pour la dérivée n -ième et démontrer la formule conjecturée par récurrence.

- Résultats du cours : Définition 20.11, Proposition 20.13, Théorème 20.14, Théorème 20.25
- Exercices  : 20.15, 20.16 (1,2)
- Exercices  : 20.13, 20.16 (3), 20.17
- Exercices  : 20.19, 20.3

Obtenir un encadrement avec l'IAF

- Résultats du cours : Définition 20.22, Théorème 20.23, Corollaire 20.24
- Exercices  : 20.26, 20.28
- Exercices  : 20.27
- Exercices  :

Utiliser les « gros » théorèmes de dérivabilité

- Résultats du cours : Théorème 20.17, Théorème 20.18, Théorème 20.19, Définition 20.22, Théorème 20.23, Corollaire 20.24
- Exercices  : 20.20, 20.23, 20.25
- Exercices  : 20.21, 20.22, 20.24
- Exercices  :

Recoller les solutions d'équations différentielles

Expliquons sur un exemple. Si on cherche à résoudre $xy' + y = 0$, nous ne sommes pas dans le contexte du chapitre *Équations différentielles* étudié en début d'année, car il y a un « x » devant y' . On voudrait alors diviser par x pour se ramener à $y' + \frac{y}{x} = 0$, ce qu'on ne peut faire que sur $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$. Il faut donc trouver l'ensemble des solutions de cette dernière équation sur $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$. Ensuite, il faut revenir à l'équation de départ et chercher pour quelles valeurs de $f(0)$ la fonction f est solution de cette équation. Il reste enfin à vérifier si les solutions obtenues sont dérivables en 0.

- Résultats du cours : Définition 20.1
- Exercices  :
- Exercices  : 20.11
- Exercices   : 20.12