Savez-vous faire ? 19 - Continuité de fonctions

Kit de survie du cours

Continuité locale

Définition 19.1 (*Continuité en un point*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle et $a \in D$. On dit que f est **continue en** a lorsque f admet possède une limite finie en a (qui est alors nécessairement $f(a)$). Autrement dit, f est continue en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, \quad \big(|x-a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big(|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue en** a.

Définition 19.2 (*Continuité à gauche, à droite*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in D$. On dit que la fonction f est **continue à gauche en** a (respectivement **continue à droite en** a) lorsqu'elle admet une limite à gauche en a vérifiant $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ (respectivement lorsqu'elle admet une limite à droite en a vérifiant $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$).

Proposition 19.3 - Caractérisation de la continuité avec les continuités à gauche, à droite.

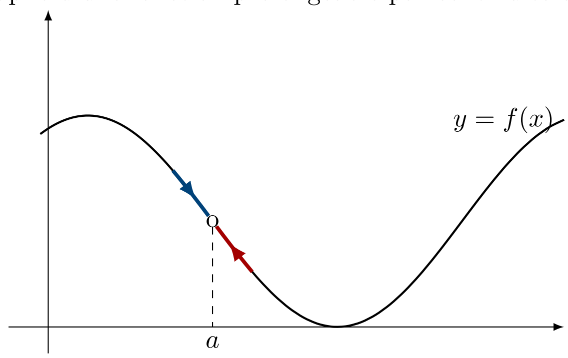
Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in D$. La fonction f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Définition 19.4 (*Prolongement par continuité*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \notin D$ une extrémité de D. On dit que f est **prolongeable par continuité** en a si f admet une limite finie ℓ en a. Dans ce cas, la fonction

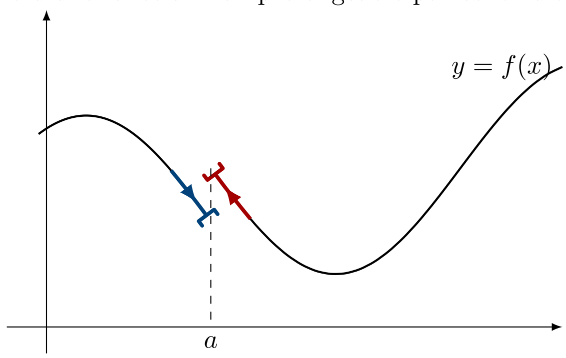
$$\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

s'appelle le **prolongement par continuité de f en** a. C'est l'unique fonction définie sur $D \cup \{a\}$ et continue en a qui coïncide avec f sur D.
Par abus on la note souvent encore f (c'est-à-dire que l'on confond f et $\widetilde{f}$).

Graphe d'une fonction prolongeable par continuité en a



Graphe d'une fonction non prolongeable par continuité en a



Théorème 19.5 - Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $a \in D$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue en a.

(ii) Pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite a à valeur dans D, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite $f(a)$.

Définition 19.6 (*Point fixe*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que x_0 est un **point fixe** de f lorsque $f(x_0) = x_0$.

Définition 19.7 (*Ensemble stable*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et E un ensemble. On dit que E est **stable** par f lorsque $f(E) \subset E$.

Proposition 19.8 - Limites possibles d'une suite récurrente.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur le segment $[a\,;\,b]$. On suppose que $[a\,;\,b]$ est stable par f. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [a\,;\,b]$ et la relation

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un point fixe de f.

Continuité globale

Définition 19.9 (*Continuité sur* D). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est **continue** sur D si f est continue en tout point de D.
On note $\mathscr{C}^0(D, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur D.

Proposition 19.10 - Opérations sur les fonctions continues.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions, $a \in D$, λ, μ deux réels. On suppose que f et g sont continues en a (resp. sur D).

1. $\lambda f + \mu g$ est continue en a (resp. sur D).
2. fg est continue en a (resp. sur D).
3. Si g ne s'annule pas en a (resp. sur D), alors f/g est continue en a (resp. sur D).

Proposition 19.11 - Composition de fonctions continues.

Soit D' un intervalle non réduit à un point, $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : D' \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subset D'$. Soit $a \in D$. On pose $b = f(a)$. Si f est continue en a (resp. sur D) et g est continue en b (resp. sur D'), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur D).

« Gros » théorèmes avec pour hypothèse une fonction continue

Théorème 19.12 - Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Soit $a \leqslant b$ deux réels, $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = y$.

Corollaire 19.13 - Extension du TVI à un intervalle ouvert.

Soit $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbf{R}}$, $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b. Pour tout réel k strictement compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, il existe un nombre réel $c \in]a\,;b[$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire 19.14 - Image d'un intervalle par une fonction continue.

L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

Théorème 19.15 - Théorème des bornes atteintes.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est continue. Alors f est bornée sur $[a\,;b]$ et atteint ses bornes.

Théorème 19.16 - Théorème de la bijection.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors

1. $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$. On rappelle que cela signifie que la fonction

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

   est une bijection.
3. La bijection réciproque $\widetilde{f}^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur $f(I)$ et $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f.

Continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

Définition 19.17 (*Continuité d'une fonction à valeurs complexes*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.

1. On dit que f est **continue en** $a \in D$ si et seulement si f tend vers $f(a)$ en a.
2. On dit que f est **continue sur** D si et seulement si f est continue en tout point de D.

Proposition 19.18 - Lien avec la continuité des parties réelles, imaginaires.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$. La fonction f est continue en $a \in D$ (respectivement sur D) si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues en $a \in D$ (respectivement sur D).

Méthodes et exercices à connaître

Montrer qu'une fonction est continue

Souvent la continuité s'obtient rapidement en reconnaissant une opération sur des fonctions continues. Il y a deux exceptions notables (particulièrement travaillées dans ce chapitre !) : si la fonction partie entière apparaît (comme elle n'est pas continue il faut faire une étude plus approfondie) ou dans le cas d'une fonction définie par morceaux. Pour ces cas précis, il faut s'intéresser à la continuité en certains points « à la main ». Si on veut tester la continuité d'une fonction f en un point a, le plus courant est de calculer les limites à gauche et à droite de a et de vérifier si elles sont égales à $f(a)$.

- Résultats du cours : Définition 19.1, Définition 19.2, Proposition 19.3, Définition 19.9, Proposition 19.10, Proposition 19.11.
- Exercices ☕ : 19.1, 19.2, 19.3, 19.5 (1)
- Exercices ☕☕ : 19.5 (2), 19.8
- Exercices ☕☕☕ :

Déterminer un prolongement par continuité

- Résultats du cours : Définition 19.1, Définition 19.2, Proposition 19.3, Définition 19.4.
- Exercices ☕ : 19.4, 19.6, 19.7 (1, 4, 5, 6)
- Exercices ☕☕ : 19.7 (2, 3)
- Exercices ☕☕☕ :

Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité

- Résultats du cours : Théorème 19.5
- Exercices ☕ : 19.11,
- Exercices ☕☕ : 19.10,
- Exercices ☕☕☕ : 19.9, 19.12

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection

Attention à ne pas confondre ces deux théorèmes. L'un permet d'obtenir l'existence de solution d'une équation (mais pas l'unicité) à partir uniquement de la continuité, tandis que l'autre permet d'obtenir l'existence et l'unicité de solution d'une équation, à partir cette fois de la continuité et de la stricte monotonie.

- Résultats du cours : Théorème 19.12, Corollaire 19.13, Corollaire 19.14, Théorème 19.16.
- Exercices ☕ : 19.16, 19.18, 19.19, 19.22, 19.23, 19.24 (1)
- Exercices ☕☕ : 19.13, 19.14, 19.15, 19.21, 19.24 (2)
- Exercices ☕☕☕ :

Utiliser le théorème des bornes atteintes

- Résultats du cours : Théorème 19.15.
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ : 19.20
- Exercices ☕☕☕ :