Savez-vous faire ? 18 - Limites de fonctions

Kit de survie du cours

Définitions

Version « avec epsilon »

Définition 18.1 (*Limite finie*). • Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

- Cas où $a = +\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant M \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

- Cas où $a = -\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad x \leqslant M \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 18.2 (*Limite égale à $+\infty$*). • Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f **tend vers** $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \eta) \implies \big(f(x) \geqslant A\big).$$

- Cas où $a = +\infty$: on dit que f **tend vers** $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \geqslant B) \implies \big(f(x) \geqslant A\big).$$

- Cas où $a = -\infty$: on dit que f **tend vers** $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \leqslant B) \implies \big(f(x) \geqslant A\big).$$

Définition 18.3 (*Limite égale à $-\infty$*). • Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f **tend vers** $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \eta) \implies \big(f(x) \leqslant A\big).$$

- Cas où $a = +\infty$: on dit que f **tend vers** $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \geqslant B) \implies \big(f(x) \leqslant A\big).$$

- Cas où $a = -\infty$: on dit que f **tend vers** $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \leqslant B) \implies \big(f(x) \leqslant A\big).$$

Version avec les voisinages (facultative)

Définition 18.4 (*Voisinages*). • Soit $a \in \mathbf{R}$. On appelle **voisinage de** a un intervalle de la forme $[a-\eta\,;\,a+\eta]$, où $\eta > 0$. L'ensemble des voisinages de a est donc

$$\mathcal{V}_a = \{[a-\eta\,;\,a+\eta] \,:\, \eta > 0\} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \mid \exists \eta > 0,\ V = [a-\eta\,;\,a+\eta]\}.$$

- On appelle **voisinage de** $+\infty$ un intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$, où $A \in \mathbf{R}$. L'ensemble des voisinages de $+\infty$ est donc
$$\mathcal{V}_{+\infty} = \{[A\,;+\infty[\ :\ A \in \mathbf{R}\} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \mid \exists A \in \mathbf{R},\ V = [A\,;+\infty[\}\,.$$
- On appelle **voisinage de** $-\infty$ un intervalle de la forme $]-\infty\,;A]$, où $A \in \mathbf{R}$. L'ensemble des voisinages de $-\infty$ est donc
$$\mathcal{V}_{-\infty} = \{]-\infty\,;A]\ :\ A \in \mathbf{R}\} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \mid \exists A \in \mathbf{R},\ V =]-\infty\,;A]\}\,.$$

Définition 18.5 (*Limite d'une fonction*). Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que f tend vers ℓ en a si
$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists V' \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in I,\quad x \in V' \implies f(x) \in V.$$

Propriétés

Proposition 18.6 - Unicité de la limite.

Si f possède une limite en a, alors cette limite est unique.

Proposition 18.7 - Limite finie en un point où la fonction est définie.

Soit a un élément de I (donc f est définie en a). Si la limite de f en a existe, alors la limite est finie et on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Proposition 18.8 - Une fonction convergente est bornée dans un voisinage.

Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.
De plus, si la limite de f est un réel strictement positif (resp. négatif) ou $+\infty$ (resp. $-\infty$), f est strictement positive (resp. négative) au voisinage de a.

Théorème 18.9 - Passage à la limite dans une inégalité large.

Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que f et g admettent une limite finie en a. Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$. On dit usuellement qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Théorème 18.10 - Caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite ℓ.

Limite à droite, limite à gauche

Définition 18.11 (*Limite à gauche, à droite*). Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

- On dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a si la restriction de f à $]a\,;+\infty[\,\cap I$ admet ℓ pour limite en a. On la note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

- On dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a si la restriction de f à $]-\infty\,; a[\cap I$ admet ℓ pour limite en a. On la note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$.

Proposition 18.12 - Valeurs de la limite à gauche et à droite si la fonction admet une limite.

Si f admet une limite en a, alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en a. Le cas échéant, les limites à gauche et à droite sont égales à la limite en a.

Théorème 18.13 - Caractérisation de la limite avec les limites à gauche et à droite.

- On suppose que a est une extrémité de l'ensemble de définition de f et que f n'est pas définie en a. On suppose de plus que f est définie à gauche et à droite de a. Si f possède une limite à gauche et une limite à droite et si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$
alors f tend vers ℓ en a.
- On suppose que f est définie en a, à gauche de a et à droite de a. Si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
alors f tend vers $f(a)$ en a.

Opérations sur les limites

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	ℓ
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ℓ
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\pm\infty$	$\ell\neq 0$	0	ℓ'
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x))$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\ell\times\ell'$

la règle des signes donne le
signe de la limite du produit

Limite d'un inverse

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\pm\infty$	$\ell\neq 0$	0 et $f(x)<0$ à gauche et à droite de a	0 et $f(x)>0$ à gauche et à droite de a
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 18.14 - Limite d'une composée.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbf{R})$ avec $f(I) \subset J$. Soit a un élément de I ou une de ses extrémités, soit b un élément de J ou une de ses extrémités.
Si f admet pour limite b en a, et si g admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en b, alors $g \circ f$ tend vers ℓ en a. Autrement dit, si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = \ell$.

Théorèmes d'existence de limite

Théorème 18.15 - Théorème d'encadrement.

Soit f, g, h trois fonctions réelles définies sur I, soit a un point ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbf{R}$. Supposons que les trois propriétés suivantes soient vérifiées.

(a) $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.

(b) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

(c) $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors g admet une limite en a, et plus précisément $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Corollaire 18.16 - Produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ une fonction qui tend vers 0 en a et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ une fonction bornée au voisinage de a. Alors fg tend vers 0 en a.

Théorème 18.17 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit f et g deux fonctions définies sur I telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a.

1. Si f tend vers $+\infty$ en a, alors g tend également vers $+\infty$ en a.

2. Si g tend vers $-\infty$ en a, alors f tend également vers $-\infty$ en a.

Théorème 18.18 - Théorème de la limite monotone.

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ avec $a < b$, et f une fonction croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $]a\,;b[$.

1. Si f est majorée (resp. minorée) sur $]a\,;b[$, alors f possède une limite finie à gauche en b et

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup(\{f(x) \ :\ x \in]a\,;b[\}) \quad (\text{resp. } \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf(\{f(x) \ :\ x \in]a\,;b[\})).$$

2. Si f est minorée (resp. majorée) sur $]a\,;b[$, alors f possède une limite finie à droite en a et

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf(\{f(x) \ :\ x \in]a\,;b[\}) \quad (\text{resp. } \lim_{x \to a^+} f(x) = \sup(\{f(x) \ :\ x \in]a\,;b[\})).$$

3. Si f n'est pas majorée (resp. minorée) sur $]a\,;b[$, alors $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

4. Si f n'est pas minorée (resp. majorée) sur $]a\,;b[$, alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Corollaire 18.19 - Existence de limites finies à gauche et à droite pour une fonction monotone.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ monotone, et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Alors f admet des limites finies à gauche et à droite en a. Plus précisément,

1. Si f est croissante, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
2. Si f est décroissante, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Fonctions à valeurs complexes

On peut étendre aux fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ toutes les propriétés des fonctions réelles qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbf{R}$ (il ne sera plus question de fonction croissante, décroissante, majorée, minorée). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 18.20 (*Limites d'une fonction à valeurs complexes en un complexe*). Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$. Soit $\ell \in \mathbf{C}$.

On dit que f **tend vers** ℓ en a lorsqu'elle est définie au voisinage de a et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t \in I, \quad (\underbrace{|t - a|}_{\text{val. abs.}} \leqslant \eta) \Longrightarrow (\underbrace{|f(t) - \ell|}_{\text{module}} \leqslant \varepsilon).$$

On dit que f **tend vers** ℓ en $+\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $+\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall t \in I, \quad (t \geqslant A) \Longrightarrow (|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

On dit que f **tend vers** ℓ en $-\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $-\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall t \in I, \quad (t \leqslant A) \Longrightarrow (|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Théorème 18.21 - Critère d'existence d'une limite complexe avec $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$.

Soit $\ell \in \mathbf{C}$. Une fonction à valeurs complexes f tend vers ℓ en a si, et seulement si, les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ admettent respectivement $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$ pour limite en a.

Méthodes et exercices à connaître

Calculer de manière directe une limite

En plus des résultats de ce cours à connaître, il faut aussi se rappeler ce qui a été fait avant, notamment le théorème des croissances comparées, la forme conjuguée d'une somme/différence de racines carrées, les limites usuelles qui proviennent de taux d'accroissement : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

- Résultats du cours : Proposition 18.7, tableaux d'opérations sur les limites, Proposition 18.14, Théorème 18.10
- Exercices ☕ : 18.1 (1, 2, 4, 6, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 35, 36), 18.2 (1)
- Exercices ☕☕ : 18.1 (5, 7, 8, 9, 10, 14, 30), 18.2 (2, 3)
- Exercices ☕☕☕ :

Utiliser les limites à gauche et à droite

- Résultats du cours : Définition 18.11, Proposition 18.12, Théorème 18.13
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Utiliser les théorèmes d'existence de limite

- Résultats du cours : Théorème 18.15, Corollaire 18.16, Théorème 18.17, Théorème 18.18, Corollaire 18.19
- Exercices ☕ : 18.1 (3, 13, 19, 20, 34)
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Faire un exercice plus abstrait

- Résultats du cours : Définition 18.1, Définition 18.2 , Définition 18.3, Proposition 18.6, Proposition 18.8, Théorème 18.9, Théorème 18.10
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ : 18.3, 18.4, 18.6
- Exercices ☕☕☕ : 18.5