Savez-vous faire ? 17 - Polynômes

Kit de survie du cours

Généralités sur les polynômes

Définition 17.1 (*Opérations sur les polynômes*). Considérons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. **Somme de deux polynômes**. Quitte à rajouter des coefficients nuls, on peut écrire P et Q sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ où $n = \max(p, q)$. Alors, on définit $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$.
2. **Multiplication externe d'un polynôme par un scalaire de $\mathbf{K}$**. On définit : $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$.
3. **Produit de deux polynômes**. On définit : $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k \quad \text{où} \quad \forall k \in \mathbf{N},\ c_k = \sum_{\substack{j,\ell \in \mathbf{N} \\ j+\ell=k}} a_j b_\ell = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$.

Définition 17.2 (*Degré d'un polynôme*).

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$. On appelle **degré** de P et on note $\deg(P)$ le plus grand élément de l'ensemble $\{ i \in [\![0, n]\!] \mid a_i \neq 0 \}$. Le coefficient a_d est appelé le **coefficient dominant** de P.
2. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$ (et il ne possède pas de coefficient dominant).

En particulier, le degré est un élément de $\mathbf{N} \cup \{-\infty\}$.

Définition 17.3 (*Polynôme unitaire*). Un polynôme non nul est dit **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Proposition 17.4 - Degré et opérations.

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ un scalaire non nul.

1. **(a)** $\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
   (b) Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
   (c) Si P et Q ne sont pas nuls, si $\deg(P) = \deg(Q)$ et que les coefficients dominants de P et Q ne sont pas opposés, alors $\deg(P + Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) = \deg(P) = \deg(Q)$.
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
3. $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \neq 0$.
4. Si $\deg(Q) \geqslant 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

(toutes les opérations ont lieu dans $\mathbf{N} \cup \{-\infty\}$.)

Définition 17.5 (*Dérivée formelle*). Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbf{K}[X]$, on définit son **polynôme dérivé** P' par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell + 1) a_{\ell+1} X^\ell.$$

Proposition 17.6 - Opérations sur la dérivation polynomiale.

Soit $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$; **2.** $(PQ)' = P'Q + PQ'$; **3.** $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Proposition 17.7 - Formule de Leibniz.

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbf{K}[X]$ et tout entier naturel n, on a

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Proposition 17.8 - Degré et dérivation.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\ell \in \mathbf{N}$. On a :

$$\deg\left(P^{(\ell)}\right) = \begin{cases} \deg(P) - \ell & \text{si} \quad \deg(P) \geqslant \ell \\ -\infty & \text{si} \quad \deg(P) < \ell \end{cases}$$

Théorème 17.9 - Formule de Taylor polynomiale.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}_n[X]$ (il est important de noter que n est le degré du polynôme ici).

1. Formule de Taylor en 0. $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

2. Formule de Taylor en $a \in \mathbf{K}$. $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$.

Arithmétique des polynômes

Définition 17.10 (*Diviseur, multiple*). Soit A et B deux polynômes. On dit que A est un **diviseur** de B ou que A **divise** B ou encore que B est un **multiple** de A si et seulement si il existe un polynôme K tel que $B = KA$.
On note alors $A \mid B$.

Théorème 17.11 - Division euclidienne.

Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $A = QB + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
Cette écriture est la **division euclidienne** de A par B, avec Q le **quotient** et R le **reste**.

Méthode 17.12. *Poser une division euclidienne*

On peut poser la division en faisant disparaître les monômes de plus haut degré successivement. Par exemple, considérons $A = X^4 + 3X^2 - 5X + 1$ et $B = X^3 + X + 1$ et détaillons le calcul.

1. On soustrait à A un multiple de B de sorte que X^4 disparaisse.

$$\begin{array}{rr|l} 2X^4 + 3X^2 - 5X + 1 & X^3 + X^2 + 1 & \\ \cline{1-2} -2X^4 - 2X^3 - 2X & 2X & \\ \cline{1-2} -2X^3 + 3X^2 - 7X + 1 & & \end{array}$$

On note $A_1 = -2X^3 + 3X^2 - 7X + 1$ le nouveau polynôme obtenu.

2. On soustrait à A_1 un multiple de B de sorte que $-2X^3$ disparaisse.

$$\begin{array}{rr|l} 2X^4 + 3X^2 - 5X + 1 & X^3 + X^2 + 1 & \\ \cline{1-2} -2X^4 - 2X^3 - 2X & 2X - 2 & \\ \cline{1-2} -2X^3 + 3X^2 - 7X + 1 & & \\ 2X^3 + 2X^2 + 2 & & \\ \cline{1-1} 5X^2 - 7X + 3 & & \end{array}$$

Le reste est de degré 2 donc on ne peut plus poursuivre (car $2 < \deg(B)$). Finalement, $A = B(2X - 2) + (5X^2 - 7X + 3)$.

Proposition 17.13 - Lien entre divisibilité et reste par la division euclidienne.

Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Notons R le reste de la division euclidienne de A par B.

$$B \mid A \iff R = 0.$$

Racines d'un polynôme

Définition 17.14 (*Racine d'un polynôme*). Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $(X - \alpha) \mid P$.

Définition 17.15 (*Multiplicité d'une racine*). Soit $P \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}^\star$. On dit que α est une racine de **multiplicité** n de P lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $(X - \alpha)^n \mid P$;

(b) $(X - \alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

Cela équivaut à dire qu'il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^n Q$ et $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$.

Proposition 17.16 - Caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}^\star$. α est une racine de multiplicité n de P si et seulement si

$$\widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{P}'(\alpha) = ... = \widetilde{P}^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{P}^{(n)}(\alpha) \neq 0.$$

Proposition 17.17 - Lien entre nombre de racines et degré.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha_1, ..., \alpha_r$ des racines de P de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r \in \mathbf{N}^\star$ où $r \in \mathbf{N}^\star$.

1. La somme des multiplicités des racines est inférieure ou égale au degré : $m_1 + ... + m_r \leqslant \deg(P)$.. En particulier, un polynôme a au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

2. Si $m_1 + ... + m_r = \deg(P)$, alors

- $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines de P (il n'y en a pas d'autres).
- $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$ où λ est le coefficient dominant de P.

Corollaire 17.18 - Caractérisation du polynôme nul avec ses racines.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si P est de degré au plus n et possède $n+1$ racines, alors $P = 0$. En particulier, un polynôme ayant une infinité de racines est nécessairement nul. On en déduit aussi que si $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ coïncident sur une partie infinie de $\mathbf{K}$, alors $P = Q$.

Définition 17.19 (*Polynôme scindé*). Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ non nul. On dit que P est **scindé** sur $\mathbf{K}$ si et seulement si

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbf{K},\ \exists m_1, ..., m_r \in \mathbf{N}^\star,\ \exists \lambda \in \mathbf{K}, \quad P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Autrement dit, P est scindé sur $\mathbf{K}$ si et seulement P est produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Proposition 17.20 - Caractérisation des polynômes scindés.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ non constant. P est scindé si et seulement si il possède $\deg(P)$ racines comptées avec leur multiplicité.

Proposition 17.21 - Relations coefficients-racines ou de Viète.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme scindé. Notons $n = \deg(P)$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les racines de P. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ et dans $\mathbf{C}[X]$

Définition 17.22 (*Polynôme irréductible*). Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. On dit que P est **irréductible** si et seulement si les deux points suivants sont vérifiés.

(a) $\deg(P) \geqslant 1$;

(b) les seuls diviseurs de P sont les constantes ou les multiples de P :

$$\forall Q \in \mathbf{K}[X], \quad Q \mid P \iff \exists \lambda \in \mathbf{K}^\star,\ Q = \lambda \text{ ou } Q = \lambda P.$$

Théorème 17.23 - Théorème de D'Alembert-Gauss.

Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ possède au moins une racine.

Théorème 17.24 - Polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Théorème 17.25 - Décomposition des polynômes à coefficients dans C.

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. P se décompose de manière unique, à l'ordre près des facteurs, en produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$:

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k},$$

avec

- λ le coefficient dominant de P ;
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les racines complexes distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

En particulier, tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ est scindé.

Proposition 17.26 - Les racines complexes d'un polynôme réel sont conjuguées.

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Soit $z \in \mathbf{C}$.
Si z est une racine de P alors $\overline{z}$ est racine de P avec même ordre de multiplicité.

Théorème 17.27 - Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Théorème 17.28 - Décomposition des polynômes à coefficients dans R.

Tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 se décompose de manière unique, à l'ordre près des facteurs, en produit de polynômes irréductibles :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{s} (X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(\omega_k)X + \mid \omega_k \mid^2)^{n_k},$$

où

- λ le coefficient dominant de P ;
- pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, α_k est une racine réelle de P de multiplicité m_k (il y a exactement r racines réelles) ;
- pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, ω_k, $\overline{\omega_k}$ sont des racines complexes non réelles de P, de multiplicité n_k (il y a exactement $2s$ racines complexes).

17.1 Compléments sur les décompositions en éléments simples

Méthode 17.29. *Obtenir la décomposition en éléments simples*

Lorsque l'on doit trouver une décomposition en éléments simples, on commence par déterminer la division euclidienne de A par B : $A = BE + R$. On arrive alors à une écriture de la forme

$$f(t) = E(t) + \frac{R(t)}{B(t)}.$$

Pour trouver les coefficients a_i, on joue ensuite sur la double écriture de f. Il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_k$ tels

que :

$$\forall t \in \mathbf{R}\backslash\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}, \quad \frac{R(t)}{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\dots(t-\alpha_k)} = \frac{a_1}{t-\alpha_1} + \frac{a_2}{t-\alpha_2} + \cdots + \frac{a_k}{t-\alpha_k}.$$

En multipliant cette ligne par $(t-\alpha_1)$, on a

$$\frac{R(t)}{(t-\alpha_2)\dots(t-\alpha_k)} = a_1 + \frac{a_2(t-\alpha_1)}{t-\alpha_2} + \cdots + \frac{a_k(t-\alpha_1)}{t-\alpha_k}.$$

En passant à la limite quand t tend vers α_1, on en déduit :

$$\frac{R(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)\dots(\alpha_1-\alpha_k)} = a_1.$$

En reproduisant ce schéma, on peut déterminer tous les coefficients.

Méthodes et exercices à connaître

Résoudre une équation dont l'inconnue est un polynôme

Dans ces exercices, on commence souvent par chercher le degré du polynôme inconnu, puis on introduit ses coefficients (par exemple si le polynôme inconnue est $P \in \mathbf{K}[X]$ et qu'on l'on trouve que $\deg(P) = 3$, alors on peut introduire $a, b, c, d \in \mathbf{K}$ tels que $P = a + bX + cX^2 + dX^3$). Ensuite, en utilisant l'équation qu'on cherche à résoudre on peut souvent se ramener, par identification, à un système vérifié par les coefficients du polynôme cherché.

- Résultats du cours : Définition 17.2, Proposition 17.4.
- Exercices ☕ : 17.3, 17.6
- Exercices ☕☕ : 17.4, 17.5
- Exercices ☕☕☕ : 17.7, 17.8, 17.10

Faire une division euclidienne

- Résultats du cours : Définition 17.10, Théorème 17.11, Méthode 17.12, Proposition 17.13.
- Exercices ☕ : 17.11, 17.12, 17.19
- Exercices ☕☕ : 17.14, 17.15, 17.16
- Exercices ☕☕☕ : 17.13

Trouver les racines d'un polynôme

Il y a plusieurs résultats pour montrer qu'un nombre est racine d'un polynôme et trouver sa multiplicité : utiliser la définition (avec la divisibilité), utiliser les dérivées. Les deux peuvent être utiles et sont donc à bien connaître !

Pas mal d'astuces pour ces exercices.

- Résultats du cours : Définition 17.14, Définition 17.15, Proposition 17.16
- Exercices ☕ : 17.18 (1), 17.19, 17.20, 17.21
- Exercices ☕☕ : 17.16, 17.17, 17.22, 17.24, 17.27
- Exercices ☕☕☕ : 17.18 (2)

Utiliser les propriétés sur les racines d'un polynôme

- Résultats du cours : Proposition 17.17, Corollaire 17.18, Proposition 17.21.
- Exercices ☕ : 17.6 (1), 17.25
- Exercices ☕☕ : 17.26, 17.28
- Exercices ☕☕☕ : 17.10

Factoriser un polynôme

- Résultats du cours : Définition 17.22, Théorème 17.24, Théorème 17.25, Proposition 17.26, Théorème 17.27, Théorème 17.28.
- Exercices ☕ : 17.29, 17.30 (1 à 5, 7, 8, 10 à 13)
- Exercices ☕☕ : 17.30 (6, 9), 17.31
- Exercices ☕☕☕ : 17.32, 17.33

Décomposer un quotient de polynôme en éléments simples

- Résultats du cours : Méthode 17.29.
- Exercices ☕ : 17.34
- Exercices ☕☕ : 17.35
- Exercices ☕☕☕ :