Savez-vous faire ? 16 - Calcul matriciel

Kit de survie du cours

Vocabulaire général

Définition 16.1 (*Matrice, coefficient, format*). On appelle **matrice** à coefficients dans $\mathbf{K}$ un tableau rectangulaire constitué de nombres appartenant à $\mathbf{K}$ et ayant n lignes, p colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note, de manière condensée, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.
L'élément $a_{i,j}$ est appelé **coefficient** de position (ou d'indice) (i, j) de la matrice A : il est situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne (où $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$).
Le couple (n, p) est appelé **format** de la matrice. On dit que M est une matrice (n, p) (sous entendu de format (n, p), on dit parfois de taille (n, p)).
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de format (n, p).

Définition 16.2 (*Matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne*). Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

1. Si $n = p$ (la matrice a donc le même nombre de lignes et de colonnes), M est dite **matrice carrée** . On note alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Si $n = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule ligne), M est dite **matrice ligne**.
3. Si $p = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule colonne), M est dite **matrice colonne**.

Définition 16.3 (*Matrice nulle*). On appelle **matrice nulle** de format (n, p) la matrice de format (n, p) dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou 0 si cette notation ne présente pas d'ambiguïté.

Définition 16.4 (*Matrice identité*). On appelle **matrice identité** de taille n la matrice notée I_n et définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

Définition 16.5 (*Matrice élémentaire*). Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On appelle **matrice élémentaire** $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i, j).

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i. \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

Définition 16.6 (*Matrices triangulaires, matrices diagonales*). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est :

- **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i > j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$.
- **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i < j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$.
- **diagonale** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$.

Matrice triangulaire supérieure	Matrice triangulaire inférieure	Matrice diagonale
$\begin{pmatrix} \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & \star \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} \star & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Définition 16.7 (*Matrice symétrique, matrice antisymétrique*). Une matrice <u>carrée</u> A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite :

1. **symétrique** lorsque $A^\top = A$;
2. **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Calcul matriciel

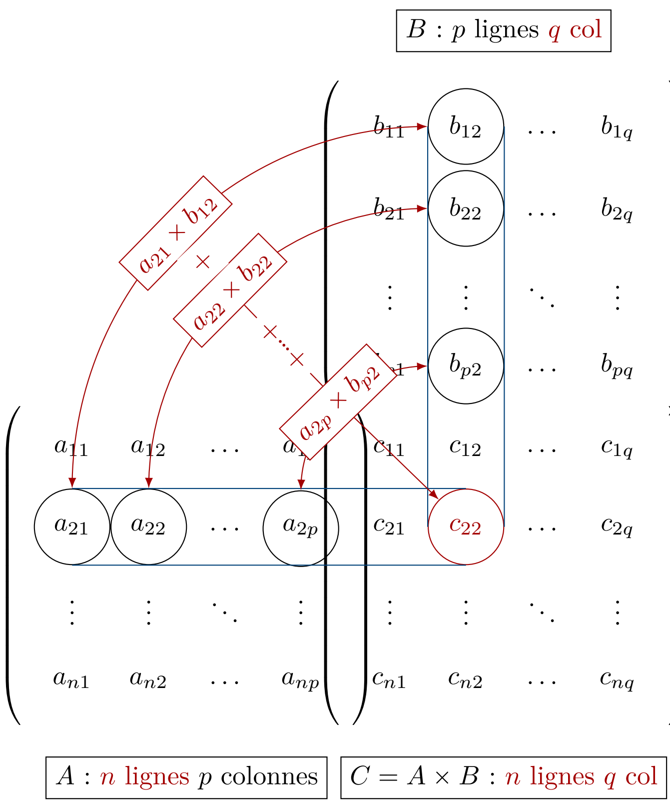
Définition 16.8 (*Somme et produit externe*). Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On définit les matrices $A+B$ (somme de A et B) et λA (produit externe de λ par A) par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Définition 16.9 (*Produit de deux matrices*). Soit $(n,p,q) \in (\mathbf{N}^\star)^3$, $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de sorte que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (c'est pour cette raison que l'indice de colonne de A est le même que l'indice de ligne de B). On définit alors le **produit matriciel** AB comme étant la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont définis par :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

Voir ci-contre pour le calcul pratique d'un produit de matrices.



Définition 16.10 (*Matrice transposée*). Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La **transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ notée $A^\top$ dont le coefficient de position (i,j) est $a_{j,i}$.
Les éléments de le i-ème ligne de $A^\top$ sont donc les éléments de la i-ème colonne de A et vice-versa.

Proposition 16.11 - Propriétés usuelles de la transposition.

Soit $(n, p, q) \in \mathbf{N}^3$.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \left(A^\top\right)^\top = A.$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad (\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top.$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}), \quad (AB)^\top = B^\top \times A^\top.$

Systèmes linéaires et matrices

Dans ce paragraphe, on considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Définition 16.12 (*Matrices associées à un système linéaire*). • Les matrices $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont respectivement appelées **matrice associée à** (S) et **matrice associée au second membre de** (S).

- On appelle **matrice augmentée associée à** (S) la matrice $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$.

Proposition 16.13 - Lien entre matrice associée et système linéaire.

On note $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbf{K}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Alors on a l'équivalence suivante :

$$(x_1, \ldots, x_p) \text{ est solution de } (S) \iff AX = B.$$

Puissances de matrices

Proposition 16.14 - Cas des matrices diagonales.

Soit $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \in \mathbf{K}$. Alors $\forall k \in \mathbf{N}$, $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^k \end{pmatrix}$.

Définition 16.15 (*Matrices qui commutent*). Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Proposition 16.16 - Exemples de matrices qui commutent.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit $j, k \in \mathbf{N}$.

1. A commute avec toute matrice scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En particulier, A commute avec I_n.
2. Si A et B commutent, alors A^j et B^k commutent. En particulier, A et A^k commutent.

Proposition 16.17 - Formule du binôme pour les matrices.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que A et B commutent. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

16.1 Matrices carrées inversibles

Définition 16.18 (*Matrice inversible*). Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices inversibles s'appelle le **groupe linéaire** d'ordre n et il est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Définition 16.19 (*Inverse d'une matrice*). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est inversible, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Cette matrice est appelée **inverse** de A et est notée A^{-1}.

Proposition 16.20 - Caractérisation de l'inverse à l'aide d'un seul produit.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB = I_n$, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $A^{-1} = B$.
2. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $BA = I_n$, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $A^{-1} = B$.

Proposition 16.21 - Principales propriétés des matrices inversibles.

Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, soit $\lambda \in \mathbf{K}^\star$.

1. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (attention à l'ordre !).
3. $\lambda A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.
4. $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Méthode 16.22. *Calcul pratique de l'inverse d'une matrice*

Pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss. On écrit à gauche la matrice A, et à droite la matrice I_n. On applique l'algorithme du pivot sur A pour la réduire à I_n. On fait les mêmes opérations sur la matrice de droite. À la fin, on doit donc avoir I_n à gauche. La matrice à droite est l'inverse de A.

$$\begin{array}{cc|c}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^{I_n} \\
\underset{L}{\sim} & \vdots & \vdots \\
\underset{L}{\sim} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{I_n} & \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}
\end{array}$$

Cette méthode permet aussi de démontrer qu'une matrice n'est pas inversible : si à la fin de l'algorithme de réduction de Gauss on n'a pas pu choisir n pivots, c'est que la matrice A n'est pas inversible.

Proposition 16.23 - Inversibilité d'une matrice diagonale.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale. A est inversible si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. Le cas échéant,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Méthodes et exercices à connaître

Connaître les opérations sur les matrices

- Résultats du cours : Définition 16.8, Définition 16.9, Définition 16.10, Proposition 16.11.
- Exercices ☕ : 16.2, 16.3, 16.6 (1)
- Exercices ☕☕ : 16.5, 16.6 (2)
- Exercices ☕☕☕ : 16.4, 16.7

Calculer les puissances d'une matrice carrée et savoir les utiliser dans quelques situations

Plusieurs techniques sont à connaître pour calculer une puissance de matrice.

1. Si on vous donne la formule ou si on la « devine » facilement, on démontre que la formule conjecturée est la bonne par récurrence.
2. Si on peut écrire la matrice A dont on cherche à trouver un puissance comme la somme de matrices plus simples qui commutent, on applique la formule du binôme de Newton. Un exemple très important de telles matrices sont les matrices qui s'écrivent $A = \lambda I_n + T$ où T est triangulaire supérieure (resp. inférieure) stricte.
3. Si on a une relation du type $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale, alors on peut montrer avec une récurrence immédiate (à savoir refaire !) que $A^n = PD^nP^{-1}$, ce qui permet de trouver A^n (car D^n est immédiat à calculer ; cf. Proposotion 16.14).

Une application classique du calcul d'une puissance n-ième consiste à trouver le terme général d'une suite géométrique matricielle (avec une relation du type $X_{n+1} = AX_n$).

- Résultats du cours : Proposition 16.14, Proposition 16.16, Proposition 16.17.
- Exercices ☕ : 16.9, 16.10, 16.12 (1,2), 16.13 (2), 16.19, 16.20 (2)
- Exercices ☕☕ : 16.8, 16.11, 16.12, 16.13 (1), 16.16 (3)
- Exercices ☕☕☕ :

Décider si une matrice est inversible et calcul son inverse le cas échéant

Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer si une matrice est inversible et trouver le cas échéant son inverse.

1. Si on dispose d'un polynôme de matrice nul, alors on peut isoler l'identité et chercher à factoriser l'expression de l'autre côté du signe « = » par A, de façon à obtenir $AB = I_n$. Si on a une telle relation, alors on peut en déduire que A est inversible et que son inverse est la matrice B (cf. Proposition 16.20).
2. Si on dispose d'une matrice concrète, on peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauss (cf. Méthode 16.22).

- Résultats du cours : Définition 16.18, Définition 16.19, Proposition 16.20, Proposition 16.21, Méthode 16.22, Proposition 16.23
- Exercices ☕ : 16.14, 16.16 (1,2), 16.18 (1,2,3,4,5,7), 16.20 (1)
- Exercices ☕☕ : 16.15, 16.17, 16.18 (6,8,9)
- Exercices ☕☕☕ :

Faire le lien entre système linéaire et équation matricielle

- Résultats du cours : Définition 16.12, Proposition 16.13
- Exercices ☕ : 16.21, 16.22
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Manipuler des ensembles de matrices

- Résultats du cours :
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ : 16.23, 16.25
- Exercices ☕☕☕ : 16.24