Savez-vous faire ?

15 - Suites réelles et complexes

Kit de survie du cours

Vocabulaire général sur les suites

Définition 15.1 (*Suite croissante, décroissante, constante*). On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

- **croissante** (resp. **décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$) ;
- **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) ;
- **(strictement) monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante ;
- **constante** si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n$ (ce qui équivaut à $u_n = u_0$), c'est-à-dire si u est à la fois croissante et décroissante.

Définition 15.2 (*Suite stationnaire*). Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie : $\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = u_n$.

Définition 15.3 (*Suite majorée, minorée, bornée*). Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

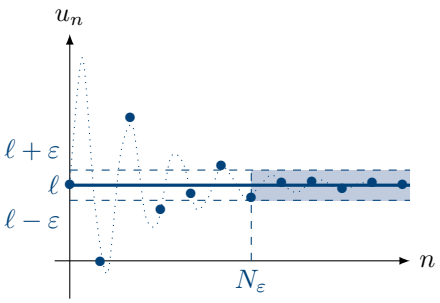
- **majorée** si elle vérifie : $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant M$;
- **minorée** si elle vérifie : $\exists m \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geqslant m$;
- **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à vérifier une des deux conditions équivalentes suivantes :

  (i) $\exists m \in \mathbf{R},\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M.$ **(ii)** $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$

Limites de suites

Définition 15.4 (*Suite convergente*). On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$



Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. La **nature** d'une suite est son caractère convergent ou divergent.

Proposition 15.5 - Les suites convergentes sont bornées.

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 15.6 - Minoration d'une suite qui converge vers un réel strictement positif.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que u converge vers un réel ℓ.

1. Si $\ell > 0$, u est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.
2. Si $\ell < 0$, u est majorée par un réel $M < 0$ à partir d'un certain rang.

Proposition 15.7 - Passage à la limite dans une inégalité.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites convergentes. On suppose que $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que

$$\exists N \in \mathbf{N}_0,\ \forall n \geqslant N_0, \quad u_n \leqslant v_n.$$

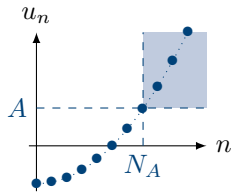
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Définition 15.8 (*Divergence vers l'infini*). Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. On dit que u **tend vers** $+\infty$ si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \geqslant A.$$

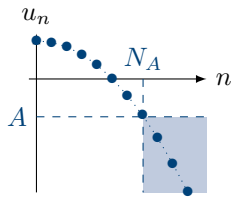
(la suite prend des valeurs aussi grandes que l'on veut).



2. On dit que u **tend vers** $-\infty$ si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \leqslant A.$$

(la suite prend des valeurs aussi petites que l'on veut).



Proposition 15.9 - Majoration, minoration des suites qui tendent vers l'infini.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée par un réel strictement positif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement positive au delà d'un certain rang.
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée par un réel strictement négatif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement négative au delà d'un certain rang.
4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Opérations sur les limites

Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	ℓ
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ℓ
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0	ℓ'
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\ell \times \ell'$

la règle des signes donne le signe de la limite du produit

Limite d'un inverse

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0 et $u_n < 0$ à partir d'un certain rang	0 et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème 15.10 - Croissances comparées.

Soit α, β deux réels strictement positifs et $q \in]1\,;+\infty[$. Alors

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0\,;$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0\,;$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} = 0\,;$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{q^n} = +\infty\,;$ **5.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty\,;$ **6.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\ln(n)^\beta} = +\infty.$

Suites extraites

Définition 15.11 (*Suites extraites*). On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.
Exemples importants : (u_{2n}), (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).

Proposition 15.12 - Limite des suites extraites.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers ℓ.

Méthode 15.13. *Démontrer qu'une suite n'a pas de limite avec des suites extraites*

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite, on peut trouver deux sous-suites distinctes de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne convergeant pas vers la même limite.

Théorème 15.14 - Théorème de convergence des suites extraites.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ.

Théorème d'existence d'une limite

Théorème 15.15 - Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et converge vers ℓ.

Corollaire 15.16 - Produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0.

Le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 converge vers 0.

Théorème 15.17 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n.$$

1. **Théorème de minoration.** Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.
2. **Théorème de majoration.** Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers $-\infty$.

Théorème 15.18 - Théorème de la limite monotone.

Soit u une suite réelle. Si u est monotone, alors u possède une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. Plus précisément :

1.
   - Si u est croissante et majorée, alors u converge ;
   - Si u est croissante et non majorée, alors u diverge vers $+\infty$.
2.
   - Si u est décroissante et minorée, alors u converge ;
   - Si u est décroissante et non minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Pour justifier qu'une suite croissante diverge vers $+\infty$, on utilise souvent le théorème de la limite monotone sous cette forme : si u est croissante et non convergente, alors u diverge vers $+\infty$. On peut évidemment adapter cette remarque aux suites décroissantes.

Suites adjacentes

Définition 15.19 (*Suites adjacentes*). Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont **adjacentes** lorsque :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante (ou l'inverse) ;
2. la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Théorème 15.20 - Théorème de convergence des suites adjacentes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles avec u croissante et v décroissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes alors u et v convergent vers une même limite. Si on note ℓ cette limite commune, on a de plus

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Suites complexes

Définition 15.21 (*Limite d'une suite complexe*). On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0,$$

(c'est la limite d'un module, donc d'une suite réelle). Autrement dit, z converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\quad |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbf{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, adjacentes... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes, de même que les théorème de la limite monotone et d'encadrement !). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module, on peut donc peut étendre la notion de suite bornée et de limite.

Proposition 15.22 - Caractérisation de la limite avec la partie réelle et la partie imaginaire.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbf{C}$.
La suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$.

Suites usuelles

Définition 15.23 (*Suite arithmétique*). Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. La suite u est dite **arithmétique** lorsqu'il existe $r \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

Proposition 15.24 - Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{K}$. Pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_n = u_p + (n-p) \times r.$$

Définition 15.25 (*Suite géométrique*). Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. La suite u est dite **géométrique** si, et seulement si, il existe $q \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Proposition 15.26 - Terme général d'une suite géométrique.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{K}$. Pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Proposition 15.27 - Limites.

Soit $q \in \mathbf{K}$.

1. Si q est réel avec $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. Si q est réel avec $q \leqslant -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.
3. Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
4. Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Définition 15.28 (*Suite arithmético-géométrique*). On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode 15.29. *Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique*

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ avec $a \neq 1$. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_{n+1} = au_n + b$. Pour déterminer le terme général de u, on procède en trois étapes.

1. On commence par chercher le point fixe de u, ce qui revient à résoudre $x = ax + b$. On note x_0 la solution.
2. On introduit $v = (u_n - x_0)_{n\in\mathbf{N}}$. Le cours assure que cette suite est géométrique de raison a (il le redémontrer à chaque fois).
3. On a alors, pour $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = v_0 a^n$, puis $u_n - x_0 = (u_0 - x_0)a^n$ et enfin $u_n = (u_0 - x_0)a^n + r$ (on refait ces calculs dans chaque situation).

Définition 15.30 (*Suite récurrente linéaire d'ordre 2*). On appelle **suite linéaire récurrente d'ordre 2 (ou double)** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \tag{15.1}$$

Définition 15.31 (*Équation caractéristique*). On reprend les notations de la définition précédente. L'équation caractéristique de (15.1) est $X^2 = aX + b$.

Proposition 15.32 - Terme général dans le cas complexe.

On reprend les notations de la définition précédente et on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de u, elle-même notée (E).

- Si $\Delta \neq 0$, alors (E) a deux solutions complexes distinctes z_1 et z_2 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \alpha {z_1}^n + \beta {z_2}^n.$$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution z_0 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = (\alpha n + \beta){z_0}^n.$$

Proposition 15.33 - Terme général dans le cas réel.

On reprend les notations de la définition précédente et on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de u, elle-même notée (E).

- Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions x_1 et x_2 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution x_0 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\alpha n + \beta){x_0}^n.$$
- Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)).$$

Étude des suites implicites

Méthode 15.34. *Suite implicite dont le terme général est solution de $f(x) = g(n)$*

Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction strictement monotone continue (donc bijective). Si $g(n) \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = g(n)$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution pour tout $n \in \mathbf{N}$, qu'on peut noter u_n. (u_n) est une suite implicite et on a facilement plusieurs propriétés sur celle-ci.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ (puisque u_n est définie comme la solution de $f(x) = g(n)$ d'inconnue $x \in I$).

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = f^{-1}(g(n))$, et on peut souvent en déduire aisément les variations de (u_n) (en se rappelant que le théorème de la bijection assure que f^{-1} est de même variation que f).
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(g(n))$.

Méthode 15.35. *Suite implicite dont le terme général est solution de $f_n(x) = 0$*

Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : I \longrightarrow f_n(I)$ une fonction strictement monotone continue (donc bijective). Si $0 \in f_n(I)$, alors l'équation

$$(E_n) : \quad f_n(x) = 0,$$

d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution pour tout $n \in \mathbf{N}$, qu'on peut noter u_n. (u_n) est une suite implicite et on donne ci-après différentes méthodes pour obtenir des propriétés sur celle-ci.

1. **Montrer que (u_n) est majorée/minorée/bornée**. On utilise que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ (puisque u_n est définie comme la solution de $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$. Si on demande un encadrement plus précis du type « montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [a\,;b]$ », on calcule $f_n(a)$, $f_n(b)$ et on trouve par exemple $f_n(a) \leqslant 0 \leqslant f_n(b)$, puis $f_n(a) \leqslant f_n(u_n) \leqslant f_n(b)$ (on a $f_n(u_n) = 0$ car par définition u_n est solution de (E_n)), puis on en déduit un encadrement de u_n en utilisant la stricte monotonie de f (on a $a \leqslant u_n \leqslant b$ si f_n est strictement croissante et $b \leqslant u_n \leqslant a$ si f_n est strictement décroissante).
2. **Déterminer le sens de variation de (u_n)**. On étudie le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in I$ (méthode habituelle : on factorise !). Supposons par exemple que $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$. Alors on applique le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) \geqslant f_n(u_n) \text{ donc } f_{n+1}(u_n) \geqslant 0 \quad & \text{car } f_n(u_n) = 0, \\ & \text{puisque } u_n \text{ est la solution de } (E_n) \\ \text{donc } f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1}) \quad & \text{car } f_{n+1}(u_{n+1}) = 0, \\ & \text{puisque } u_{n+1} \text{ est la solution de } (E_{n+1}) \end{aligned}$$

   Ensuite, on conclut en utilisant le sens de variation strict de f_{n+1}.
3. **Établir la convergence de (u_n)**. Avec les deux points précédents et le théorème de la limite monotone.
4. **Déterminer la limite**. Il faut se laisser guider par l'énoncé.

Méthodes et exercices à connaître

Calculer directement une limite de suite

Pour les calculs sur des exemples concrets, il faut connaître le tableau des opérations sur les limites ainsi que le théorème des croissances comparées.

- Résultats du cours : tableaux des opérations sur les limites, Théorème 15.10. Pour les exercices plus théoriques, Définition 15.4, Définition 15.8.
- Exercices ☕ : 15.6 (tout sauf 17, 19), 15.7 (1), 15.8
- Exercices ☕☕ : 15.6 (17, 19), 15.7 (2)
- Exercices ☕☕☕ : 15.5, 15.10, 15.11

Utiliser un théorème d'existence de limite pour obtenir la nature d'une suite

On rappelle que « nature » d'une suite qualifie son caractère convergeant ou divergeant.

À partir d'inégalités

Certains théorèmes donnent l'existence ainsi que la valeur de la limite : théorème d'encadrement (ou des gendarmes), théorème de minoration, théorème de majoration.

Le théorème de la limite monotone ne donne que l'existence de la limite (mais il y a mois d'hypothèses à vérifier ☺).

Bien entendu, les énoncés de ces théorèmes sont à connaître sur le bout des doigts.

- Résultats du cours : Théorème 15.15, Corollaire 15.16, Théorème 15.17, Théorème 15.18.
- Exercices ☕ : 15.12 (1, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12)
- Exercices ☕☕ : 15.12 (7, 2, 3), 15.13
- Exercices ☕☕☕ : 15.12 (10), 15.14, 15.15, 15.16, 15.25

Suites extraites

Elles sont utiles pour démontrer qu'une suite n'a pas de limite (si deux suites extraites ne tendent pas vers la même limite) ou qu'une suite a une limite (si la suite des termes pairs et des termes impairs tendent vers la même limite).

- Résultats du cours : Définition 15.11, Proposition 15.12, Méthode 15.13, Théorème 15.14.
- Exercices ☕ : 15.17
- Exercices ☕☕ : 15.18, 15.19, 15.23 (1)
- Exercices ☕☕☕ :

Suites adjacentes

Attention à ne pas confondre la définition avec le théorème de convergence, vous mélangez trop souvent les deux !

- Résultats du cours : Définition 15.19, Théorème 15.20.
- Exercices ☕ : 15.20, 15.21 (1), 15.22, 15.23 (2)
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ : 15.21 (2)

Trouver le terme général d'une suite usuelle

Il y a quatre types de suites usuelles à savoir reconnaître : les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2. Dans chaque cas, il faut savoir trouver le terme général de la suite (c'est-à-dire, si la suite s'appelle u, l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}$). Les propriétés de ces suites sont ensuite faciles à obtenir. Il faut tout de même bien retenir que, pour $q \in \mathbf{C}$, $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $|q| < 1$.

- Résultats du cours : Définition 15.23, Proposition 15.24, Définition 15.25, Proposition 15.26, Proposition 15.27, Définition 15.28, Méthode 15.29, Définition 15.30, Proposition 15.32, Proposition 15.33.
- Exercices ☕ : 15.37, 15.38 (1.(a), 1.(c), 2), 15.39
- Exercices ☕☕ : 15.38 (1.(b))
- Exercices ☕☕☕ : 15.38 (1.(d)), 15.40

Étudier des suites implicites

Ces études sont plus difficiles, mais certaines sont assez accessibles.

- Résultats du cours : Théorème 15.18, Méthode 15.34, Méthode 15.35.
- Exercices ☕ : 15.26
- Exercices ☕☕ : 15.27
- Exercices ☕☕☕ : 15.30

Étudier des suites complexes

L'important à retenir ici c'est qu'il n'y a pas d'inégalités dans les complexes ! La notion de suite tendant vers $-\infty$ ou $+\infty$ n'a donc pas de sens, de même que la notion de suite croissante, décroissante, majorée, minorée... Tout le reste est similaire aux suites réelles.

- Résultats du cours : Proposition 15.22.
- Exercices ☕ : 15.31, 15.33, 15.34 (1, 5)
- Exercices ☕☕ : 15.32, 15.34 (2, 3, 4)
- Exercices ☕☕☕ : 15.34 (6), 15.35, 15.36