Savez-vous faire ?

13 - L'ensemble des nombres réels

Kit de survie du cours

Vocabulaire sur les parties de R

Définition 13.1 (*Minorant, majorant*). Soit A une partie de $\mathbf{R}$, soit $m, M \in \mathbf{R}$.

1. On dit que m est un **minorant** de A si, pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$. Si A possède un minorant, on dit que A est **minorée**.
2. On dit que M est un **majorant** de A si, pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$. Si A possède un majorant, on dit que A est **majorée**.

Une partie de $\mathbf{R}$ à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

Définition 13.2 (*Plus petit élément, plus grand élément*). Soit A une partie de $\mathbf{R}$, soit $m, M \in \mathbf{R}$.

1. On dit que m est le **plus petit élément** (ou **minimum**) de A si $m \in A$ et m est un minorant de A. Si A possède un minimum, on le note $\min(A)$.
2. On dit que M est le **plus grand élément** (ou **maximum**) de A si $M \in A$ et M est un majorant de A. Si A possède un maximum, on le note $\max(A)$.

Proposition 13.3 - Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue.

Soit E une partie de $\mathbf{R}$. E est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $|x| \leqslant M$.

Définition 13.4 (*Borne inférieure, borne supérieure*). Soit A une partie de $\mathbf{R}$ non vide.

- Si A est majorée, on appelle **borne supérieure** de A, et on note $\sup(A)$, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (on verra un peu plus loin qu'il existe toujours). Si A n'est pas majorée, on convient que $\sup(A) = +\infty$.
- Si A est minorée, on appelle **borne inférieure** de A, et on note $\inf(A)$, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A (on verra un peu plus loin qu'il existe toujours). Si A n'est pas minorée, on convient que $\inf(A) = -\infty$.

On convient enfin que l'ensemble vide n'admet ni borne inférieure, ni borne supérieure.

Théorème 13.5 - Théorèmes de la borne supérieure et de la borne inférieure.

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure finie.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$ possède une borne inférieure finie.

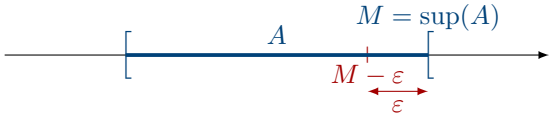
Théorème 13.6 - Caractérisation de la borne supérieure (difficile).

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Soit $M \in \mathbf{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $M = \sup(A)$.

(ii) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } M' \text{ majorant de } A,\ M \leqslant M' \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \end{cases}$



On peut aussi affirmer que :

$$M < \sup(A) \iff \exists a \in A,\ M < a.$$

Il existe un résultat similaire pour la borne inférieure.

Définition 13.7 (*Droite réelle achevée*). On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux objets non réels ayant la propriété

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent sur $\overline{\mathbf{R}}$ en complétant par les opérations suivantes

$$\begin{gathered}
\forall x \in \mathbf{R}, \qquad x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = -\infty \\
\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \qquad x \times (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = -\infty \\
\forall x \in \mathbf{R}_-^\star, \qquad x \times (+\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = +\infty \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\
(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.
\end{gathered}$$

Les opérations $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$ et $0 \times (-\infty)$ ne sont pas définies (ce sont les fameuses formes indéterminées).

Définition 13.8 (*Intervalle*). Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On dit que A est un intervalle si et seulement si

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \subset A.$$

Une partie d'un ensemble vérifiant cette propriété est dite **convexe**.

Approximation décimale d'un nombre réel

Définition 13.9 (*Approximation d'un réel*). Soit $x, y \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$.

- On dit que y **approche** x **à** ε **près** lorsque $|x - y| \leqslant \varepsilon$.
- On dit que y **approche** x **à** ε **près par excès** lorsque y approche x à ε près et $y \geqslant x$.
- On dit que y **approche** x **à** ε **près par défaut** lorsque y approche x à ε près et $y \leqslant x$.

Proposition 13.10 - Approximation décimale par défaut, par excès.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit x un réel.

- Il existe un nombre décimal (en particulier rationnel) qui approche x à 10^{-n} près par défaut.
- Il existe un nombre décimal (en particulier rationnel) qui approche x à 10^{-n} près par excès.

Méthodes et exercices à connaître

Trouver un majorant/minorant ou une borne supérieure/inférieure d'un ensemble

Le minimum (☺) à savoir est ici est de donner la borne supérieure/inférieure d'un ensemble sans démonstration. Les exercices avec démonstration pourront être cherchés dans un deuxième temps.

- Résultats du cours : Définition 13.1, Définition 13.2, Définition 13.4. Uniquement pour les exercices plus difficiles, le Théorème 13.6.
- Exercices ☕ : 13.2, 13.3 (4)
- Exercices ☕☕ : 13.1, 13.4 (1)
- Exercices ☕☕☕ : 13.3 (1, 2, 3, 5), 13.4 (2), 13.5, 13.6, 13.7, 13.8, 13.9