Savez-vous faire ? 12 - Ensembles et applications

Kit de survie du cours

Ensembles

Proposition 12.1 - Lois de Morgan.

Soit E un ensemble, A, B et C des parties de E. Alors :

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Définition 12.2 (*Ensembles disjoints*). Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. A et B sont dites **disjointes** si $A \cap B = \varnothing$.

Définition 12.3 (*Partition ou recouvrement disjoint d'un ensemble*). Soit E un ensemble, I un ensemble et pour tout $i \in I$, A_i, une partie de E.

On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une **partition** (on dit aussi **recouvrement disjoint**) de E si

- $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$;
- $\forall (i,j) \in I^2, (i \neq j) \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ (on dit que les A_i sont **deux à deux disjoints**) ;
- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$ (on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de E).

Définition 12.4 (*Ensemble des parties d'un ensemble*). Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'**ensemble des parties** de E. Ainsi $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles.

Applications

Vocabulaire général sur les applications

Définition 12.5 (*Application identité*). On appelle **identité** de E, notée Id_E, l'application

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}.$$

Définition 12.6 (*Fonction indicatrice*). Si $A \subset E$, on appelle **indicatrice** de A, notée $\mathbf{1}_A$ l'application

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}.$$

Définition 12.7 (*Restriction d'une application*). Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Soit $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application $f\,|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Définition 12.8 (*Prolongement d'une application*). Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Soit B un ensemble tel que $E \subset B$. Un **prolongement** de f à B est une application $g : B \longrightarrow F$ telle que $g\,|_E = f$.

Image directe, image réciproque

Définition 12.9 (*Image directe, image réciproque*). Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.

- L'**image directe** de A par f est l'ensemble des images des éléments de A par f :

$$f(A) = \{f(x) \,:\, x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

En particulier, pour $y \in F$, on a $y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ f(x) = y$.

- L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

En particulier, pour $x \in E$, on a $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Méthode 12.10. *Trouver une image réciproque*

Trouver l'image réciproque d'un singleton revient souvent à résoudre une équation.
Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, trouver l'image réciproque d'un intervalle revient souvent à résoudre une ou des inéquations.

Méthode 12.11. *Trouver une image directe dans le cas d'une fonction continue à valeurs réelles*

Dans le cas d'une fonction continue définie sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, appliquer le théorème de la bijection (une ou plusieurs fois) peut parfois permettre de déterminer une image directe.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 12.12 (*Injectivité, surjectivité, bijectivité*). Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est **injective** lorsque tout élément de F a au plus un antécédent par f. Autrement dit, lorsque

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

- f est **surjective** lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f. Autrement dit, lorsque

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

- f est **bijective** lorsque f est à la fois injective et surjective. Autrement dit, lorsque

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E, \quad f(x) = y.$$

Proposition 12.13 - Lien entre surjectivité et image d'une application.

Soit $f : E \longrightarrow F$. La fonction f est surjective si et seulement $f(E) = F$.

Méthode 12.14. *Cas des fonctions définies sur une partie de* $\mathbf{R}$ *à valeurs réelles*

Soit E, F deux parties de $\mathbf{R}$ et $f : E \longrightarrow F$.

1. **Injectivité de** f. Si f est strictement monotone, alors f est injective.
2. **Surjectivité de** f. Si f est continue, l'utilisation du théorème de la bijection peut permettre de déterminer $f(E)$. Si $f(E) = F$, alors on peut conclure que f est surjective.

Proposition 12.15 - Composée d'applications injectives, surjectives, bijectives.

Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Bijection réciproque d'une application bijective

Définition 12.16 (*Bijection réciproque*). Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, on peut définir l'application f^{-1}, appelée **bijection réciproque** de f et définie de F dans E par :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

Proposition 12.17 - Composée d'une fonction avec sa réciproque.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application bijective. Alors

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Proposition 12.18 - Caractérisation de la bijectivité avec la composition.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. S'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Proposition 12.19 - Opérations avec la réciproque.

- Si f est une bijection de E dans F et si g est une bijection de F dans G, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$
- Si f est une bijection de E dans F, alors sa bijection réciproque f^{-1} est aussi bijective et :
$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Méthodes et exercices à connaître

La rédaction est essentielle pour les exercices de ce chapitre, qui sont presque tous des exercices d'écriture. Veillez donc bien à apprendre les différents schémas de rédaction.

Montrer une égalité d'ensembles

- Résultats du cours : le plus simple est de procéder par double inclusion ; la méthode est donnée dans le chapitre 1.
- Exercices ☕ : 12.3 (1, 2, 3, 5), 12.4
- Exercices ☕☕ : 12.3 (4, 6), 12.5, 12.6, 12.9
- Exercices ☕☕☕ : 12.8, 12.14

Montrer qu'une application est injective ou ne l'est pas

Si on a une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, on pourra utiliser que strictement monotone entraîne injective (attention, la réciproque est fausse !).

Sinon, on reviendra à la définition (si E, F sont deux ensembles non vide et qu'on veut montrer que $f : E \longrightarrow F$ est injective, il faut commencer par fixer $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ et chercher à montrer que $x = x'$).

Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffit d'UN contre-exemple, donc de trouver UN élément dans l'espace d'arrivée qui a plusieurs antécédents.

- Résultats du cours : Définition 12.12, Méthode 12.14, Proposition 12.15 (ce résultat peut être très efficace, mais il faut faire très attention aux ensembles de départ et d'arrivée des fonctions qui interviennent dans la composition ; à n'utiliser que si vous maîtrisez ce que vous faites !).
- Exercices ☕ : 12.16, 12.17 (1), 12.18, 12.21, 12.22 (3), 12.23 (1), 12.24 (3), 12.25 (1)
- Exercices ☕☕ : 12.19, 12.26, 12.28
- Exercices ☕☕☕ :

Montrer qu'une application est surjective ou ne l'est pas

Soit E, F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$.
Si $E \subset \mathbf{R}$ et $F \subset \mathbf{R}$, on peut déterminer $f(E)$ avec le théorème de la bijection et vérifier si $f(E) = F$ (si c'est le cas la fonction est surjective ; si ça n'est pas le cas elle n'est pas surjective ; on conclut donc dans tous les cas !).

Si E et F ne sont pas des parties de $\mathbf{R}$, il faut revenir la définition : on commence par fixer $y \in F$ et on essaie de trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il suffit d'UN contre-exemple, donc de trouver UN élément dans l'espace d'arrivée qui n'a pas d'antécédent par la fonction.

- Résultats du cours : Définition 12.12, Proposition 12.13, Méthode 12.14, Proposition 12.15 (ce résultat peut être très efficace, mais il faut faire très attention aux ensembles de départ et d'arrivée des fonctions qui interviennent dans la composition ; à n'utiliser que si vous maîtrisez ce que vous faites !)
- Exercices ☕ : 12.16, 12.21, 12.22 (3), 12.24 (3), 12.25 (1)
- Exercices ☕☕ : 12.17 (1), 12.18, 12.19, 12.23 (3), 12.26, 12.28
- Exercices ☕☕☕ :

Montrer qu'une application est bijective ou ne l'est pas

La méthode souvent employée est de montrer que l'application est à la fois injective et surjective. Toutefois, on peut aussi utiliser la Proposition 12.18.

- Résultats du cours : Définition 12.16, Proposition 12.18.
- Exercices ☕ :
- Exercices ☕☕ :
- Exercices ☕☕☕ :

Trouver l'expression de la réciproque d'une application bijective

Ici il n'y a qu'une seule façon de faire, on résout une équation ! Si E, F sont deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, alors $f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{unique solution de } f(x) = y \text{ d'inconnue } x \in E \end{array}$.

Comme dans tous les exercices de ce chapitre, il faut faire attention à la rédaction, et bien introduire $y \in F$, $x \in E$ avant de résoudre $f(x) = y$ (par équivalences, évidemment !).

- Résultats du cours : Définition 12.16
- Exercices ☕ : 12.26, 12.29 (1)
- Exercices ☕☕ : 12.27
- Exercices ☕☕☕ :

Trouver l'image directe d'un ensemble par une application

Cas des fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

La plupart du temps les fonctions rencontrées sont strictement monotones sur des intervalles de leur ensemble de définition, donc on s'en sort en appliquant le théorème de la bijection (éventuellement plusieurs fois).

- Résultats du cours : Définition 12.9, Méthode 12.11
- Exercices ☕ : 12.23 (3)
- Exercices ☕☕ : 12.25 (3)
- Exercices ☕☕☕ :

Autres applications

Il faut revenir à la définition. Si E, F sont deux ensembles non vides, $A \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$, alors on commence par fixer $y \in F$ puis on raisonne par équivalences

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ y = f(x) \iff \dots$$

- Résultats du cours : Définition 12.9
- Exercices ☕ : 12.17 (3), 12.20, 12.21, 12.24 (2)
- Exercices ☕☕ : 12.22 (1)
- Exercices ☕☕☕ : 12.28

Trouver l'image réciproque d'un ensemble par une application

Soit $f : E \longrightarrow F$ où E, F sont deux ensembles non vides.

Trouver l'image réciproque d'un singleton revient à résoudre une équation. Si $b \in F$, $f^{-1}(\{b\})$ est l'ensemble des solutions de $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$.

Si $F \subset \mathbf{R}$ et $B \subset F$ est un intervalle, trouver l'image réciproque de B revient à résoudre une (ou plusieurs) inéquations. Par exemple, si $B = [-1\,;3[$, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des solutions de $-1 \leqslant f(x) < 3$, d'inconnue $x \in E$.

Sinon, on revient à la définition. Si $B \subset F$, on fixe $y \in F$ puis on raisonne par équivalences :

$$x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B \Longleftrightarrow \dots$$

- Résultats du cours : Définition 12.9, Méthode 12.10
- Exercices ☕ : 12.17 (2), 12.20, 12.21, 12.25 (2)
- Exercices ☕☕ : 12.29 (2)
- Exercices ☕☕☕ : 12.22 (2)

Faire un exercice plus théorique

Il faut bien connaître les schémas de rédaction et les définitions pour ces exercices !

- Résultats du cours :
- Exercices ☕ : 12.15, 12.31, 12.32 (1, 5)
- Exercices ☕☕ : 12.32 (2, 3, 4), 12.33
- Exercices ☕☕☕ :