

Kit de survie du cours

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 11.1 (Vocabulaire général). On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** (normalisée) sur I toute équation du type :

$$\bullet \text{ On appelle } \textbf{équation différentielle linéaire d'ordre 1 (normalisée)} \text{ sur } I \text{ toute équation du type :} \quad \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad (E_1)$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur I , à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et dérivable sur I , à valeurs dans $\mathbf{K}$.

- On appelle **solution** de (E_1) sur I toute fonction $f : I \rightarrow \mathbf{K}$ dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E_1) .

- L'équation différentielle (E_1) est dite **homogène** si b est la fonction nulle. On appelle **équation homogène associée à (E_1)** (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad (H_1)$$

Proposition 11.2 - Solutions de l'équation homogène.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H_1) est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbf{K} \\ t & \longmapsto \lambda e^{-A(t)} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

où A est une primitive de la fonction a sur I .

Proposition 11.3 - Solutions de l'équation générale.

Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Si f_p est une solution de (E_1) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{h + f_p : h \in \mathcal{S}_H\} = \left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbf{K} \\ t & \longmapsto \lambda e^{-A(t)} + f_p(t) \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E_1) , on peut obtenir toutes les solutions de (E_1) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H_1) .



Méthode 11.4. Méthode de variation de la constante

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme

$$\begin{aligned} f_p : I &\longrightarrow \mathbf{K} \\ t &\longmapsto g(t)e^{-A(t)}, \end{aligned}$$

où g est une fonction dérivable sur I et A est une primitive de a . Autrement dit, on a remplacé la constante d'une solution de l'équation homogène par une fonction dérivable g . On écrit ensuite, si $\mathcal{S}_E$ désigne l'ensemble des solutions de (E_1) . Le calcul ressemblera à ce qui suit (qui n'est pas à apprendre par cœur bien entendu!!) :

$$\begin{aligned} f_p \in \mathcal{S}_E &\iff \forall t \in I, \quad f_p'(t) + a(t)f_p(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad g'(t)e^{-A(t)} - A'(t)g(t)e^{-A(t)} + a(t)g(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad g'(t)e^{-A(t)} - a(t)g(t)e^{-A(t)} + a(t)g(t)e^{-A(t)} = b(t) \quad \text{car } A' = a \\ &\iff \forall t \in I, \quad g'(t) = e^{A(t)}b(t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que f_p soit solution de (E_1) , il suffit que g soit une primitive de $t \longmapsto e^{A(t)}b(t)$.

Proposition 11.5 - Principe de superposition des solutions.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$ et b_1, b_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On considère

$$(E_1) : y' + ay = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : y' + ay = b_2.$$

Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2) , alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de :

$$y' + ay = \lambda_1b_1 + \lambda_2b_2.$$

Théorème 11.6 - Problème de Cauchy.

Soit $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{K}$. Il existe une unique solution φ de (E_1) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition 11.7 (Vocabulaire général). • On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t), \quad (E_2)$$

où a et b sont deux éléments (« constantes ») de $\mathbf{K}$, c est une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et deux fois dérivable sur I , à valeurs dans $\mathbf{K}$.

- On appelle **solution** de (E_2) sur I toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fois dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E_2) .

- L'équation différentielle (E_2) est dite **homogène** si c est la fonction nulle.

On appelle **équation homogène associée à (E_2)** (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad (H_2)$$

Définition 11.8 (Équation caractéristique). L'équation caractéristique de (H_2) est l'équation du second degré suivante, d'inconnue $r \in \mathbf{K}$,

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Proposition 11.9 - Solutions de l'équation homogène - cas complexe.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H_2) .

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2 . L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \\ t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution complexe r_0 . L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \\ t \longmapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Proposition 11.10 - Solutions de l'équation homogène - cas réel.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H_2) .

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 réelles. L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution réelle r_0 . L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions, qui sont des nombres complexes conjugués de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^{\alpha t} (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Proposition 11.11 - Solutions de l'équation générale.

Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Si f_p est une solution de (E_2) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\{h + f_p : h \in \mathcal{S}_H\}.$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E_2) , on peut obtenir toutes les solutions de (E_2) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H_2) .

**Méthode 11.12. Recherche d'une solution particulière : cas où le second membre est de la forme $t \mapsto Be^{kt}$**

Soit $(B, k) \in \mathbf{K}^2$. On suppose ici que $c : t \mapsto Be^{kt}$. On cherche alors une solution particulière f_p sous la forme

- $f_p : t \mapsto \alpha e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $f_p : t \mapsto \alpha t e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'une des deux solutions distinctes de l'équation caractéristique (on dit que k est une racine simple de l'équation).
- $f_p : t \mapsto \alpha t^2 e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'unique racine (double) de l'équation caractéristique.



Méthode 11.13. Recherche d'une solution particulière : cas où le second membre est de la forme $t \mapsto B \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto B \sin(\omega t)$

On suppose que $c : t \mapsto B \cos(\omega t)$ (resp. $c : t \mapsto B \sin(\omega t)$), où $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$.

On commence par chercher une solution particulière g_p de l'équation différentielle sur $\mathbf{C}$:

$$z'' + az' + bz = Be^{i\omega t}.$$

en utilisant la méthode précédente. La fonction $\Re(g_p)$ (resp. $\Im(g_p)$) est alors solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = B \cos(\omega t)$ (resp. $y'' + ay' + by = B \sin(\omega t)$).

Proposition 11.14 - Principe de superposition des solutions.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et c_1, c_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On pose

$$(E_1) : y'' + ay' + by = c_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' + ay' + by = c_2.$$

Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2) , alors $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ est solution de :

$$y'' + ay' + b' = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2.$$

Théorème 11.15 - Problème de Cauchy.

Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbf{K}^2$. Il existe une unique solution φ de (E_2) telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_1$.

Méthodes et exercices à connaître

Résoudre une équation différentielle du premier ordre

En reconnaissant une solution particulière évidente

Le premier réflexe à avoir quand on résout une équation différentielle linéaire est de chercher une solution évidente (souvent sous la forme d'une constante), cela peut permettre de gagner un temps non négligeable !

- Résultats du cours : Proposition 11.2, Proposition 11.3.
- Exercices  : 11.1 (1, 2), 11.2 (3, 8)
- Exercices  :
- Exercices  :

En appliquant la méthode de variation de la constante

C'est LA méthode à bien comprendre pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. La rédaction est à bien connaître.

- Résultats du cours : Proposition 11.2, Proposition 11.3, Méthode 11.4 (il faut apprendre le schéma de rédaction aussi).
- Exercices  : 11.2 (1, 5 à 6, 9, 10)
- Exercices  : 11.2 (4)
- Exercices  :

Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre

Pas de variation de la constante au programme pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre (elle est plus compliquée que pour le premier ordre, n'essayez pas d'en inventer une !). Ici, il faut apprendre par cœur des types de seconds membres et appliquer la méthode adéquate (après avoir chercher rapidement une solution évidente bien sûr).

Second membre de type exponentielle

- Résultats du cours : Proposition 11.9, Proposition 11.10, Proposition 11.11, Méthode 11.12.
- Exercices  : 11.9 (1, 2, 6, 8)
- Exercices  :
- Exercices  :

Second membre type produit d'une exponentielle par une fonction trigonométrique

- Résultats du cours : Proposition 11.9, Proposition 11.10, Proposition 11.11, Méthode 11.13.
- Exercices  : 11.9 (3, 4, 5, 7)
- Exercices  :
- Exercices  :

Appliquer le principe de superposition

- Résultats du cours : Proposition 11.14.
- Exercices  : 11.9 (6, 7, 8)
- Exercices  :
- Exercices  :

Résoudre un problème de Cauchy

- Résultats du cours :
- Exercices  : 11.11
- Exercices  : 11.4
- Exercices  :

Faire un changement de variable

Pas de méthode à retenir, il faut se laisser guider par l'exercice (cela ne signifie pas qu'il ne faut pas s'entraîner ; les questions sont toujours plus ou moins les mêmes et pas toujours simples, cela peut être utile de les avoir déjà travaillées ☺).

On change la fonction

- Résultats du cours :
- Exercices  :
- Exercices  : 11.12
- Exercices  : 11.5, 11.15, 11.19

On change la variable

- Résultats du cours :
- Exercices  :
- Exercices  : 11.13
- Exercices  : 11.14