

CHAPITRE 38

FONCTIONS DE DEUX
VARIABLES RÉELLES

Dans ce cours, on considérera les éléments de $\mathbf{R}^2$ tantôt comme des vecteurs, tantôt comme des points du plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; e_1, e_2)$. On rapportera aussi l'espace de dimension 3 à un repère orthonormé direct $(0; e_1, e_2, e_3)$.

38.1 Ouverts de $\mathbf{R}^2$, fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ 38.1.1 Distance dans $\mathbf{R}^2$, ouverts de $\mathbf{R}^2$

Dans tout ce chapitre, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\|\cdot\|$ désigne sa norme euclidienne associée définis par :

$$\forall \underbrace{(x, y)}_{=\vec{u}} \in \mathbf{R}^2, \forall \underbrace{(x', y')}_{=\vec{v}} \in \mathbf{R}^2, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si le point M du plan a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(0; e_1, e_2)$, alors $\|(x, y)\|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Sur la droite réelle $\mathbf{R}$, on définit la distance $d(s, t)$ entre les réels s et t grâce à la valeur absolue en posant $d(s, t) = |t - s|$. Dans le plan $\mathbf{R}^2$, c'est la norme euclidienne qui joue ce rôle.

Définition 38.1 - Distance euclidienne.

Soit $u, v \in \mathbf{R}^2$. On appelle **distance euclidienne** entre u et v et on note $d(u, v)$ le réel positif ou nul défini par

$$d(u, v) = \|v - u\|.$$

Remarque 38.2. Si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ alors

$$d(u, v) = \|v - u\| = \|(x' - x, y' - y)\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

La notion de distance nous permet de définir l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ dont la distance à un point fixé a est strictement inférieure ou inférieure ou égale à un réel r strictement positif :

Définition 38.3 - Boule ouverte, boule fermée.

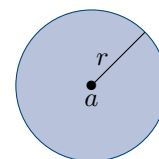
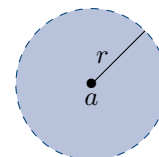
Soit $a \in \mathbf{R}^2$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a, r) = \{u \in \mathbf{R}^2 \mid d(a, u) < r\}.$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B(a, r)} = \{u \in \mathbf{R}^2 \mid d(a, u) \leq r\}.$$



Les boules ouvertes sont à $\mathbf{R}^2$ ce que sont les intervalles ouverts bornés sont à $\mathbf{R}$. Les boules fermées sont à $\mathbf{R}^2$ ce que sont les segments sont à $\mathbf{R}$.

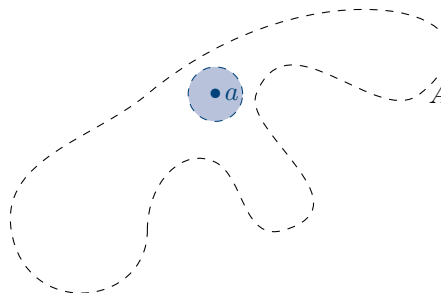
La « géométrie » des boules ouvertes étant très restrictive, on a besoin d'une autre notion pour les parties de $\mathbf{R}^2$.

Définition 38.4 - Ouvert.

Une partie A de $\mathbf{R}^2$ est dite **ouverte** (on dit aussi que A est un **ouvert** de $\mathbf{R}^2$), si

$$\forall a \in A, \exists r_a > 0, \quad B(a, r_a) \subset A.$$

Autrement dit, une partie A de $\mathbf{R}^2$ est ouverte, si et seulement si, chacun de ses points est le centre d'une boule ouverte elle-même incluse dans A (on dit alors que chaque point est **intérieur** à A).



Remarque 38.5. Concrètement, un ouvert ne contient aucun des points de sa frontière. Les boules ouvertes sont des ouverts.

Exercice d'application 38.6. Représenter les ensembles suivants

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| < 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}.$$

Sont-ils des parties ouvertes de $\mathbf{R}^2$? (on ne demande pas de démonstration formelle, on veut juste la réponse).



38.1.2 Fonctions réelles de deux variables réelles, représentation graphique

Définition 38.7 - Fonction de deux variables réelle.

Soit A une partie de $\mathbf{R}^2$. On appelle **fonction réelle de deux variables** sur A une application définie sur A et à valeur dans $\mathbf{R}$. On notera :

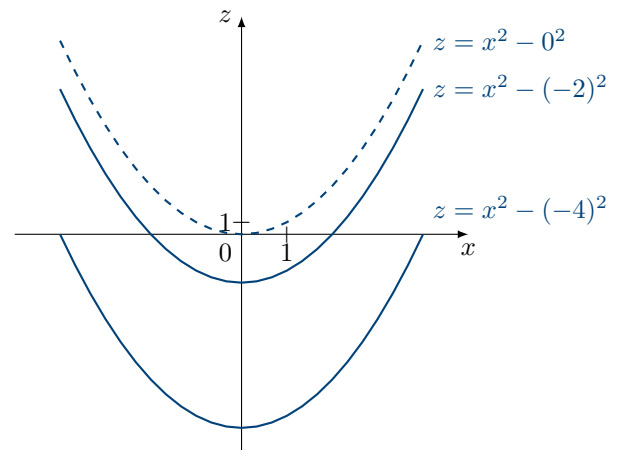
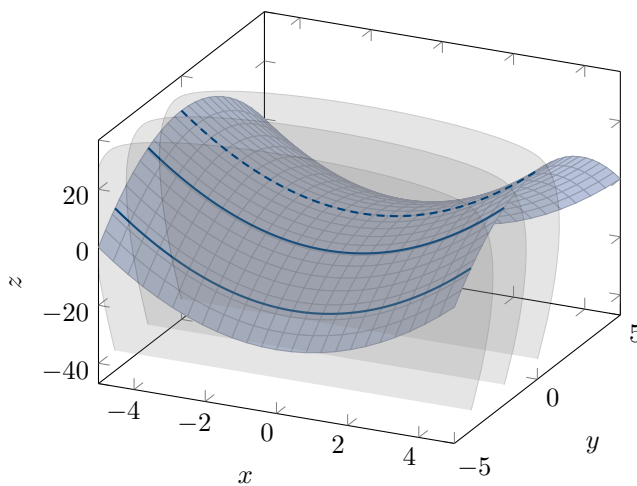
$$\begin{aligned} f : \quad A &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned} .$$

Remarque 38.8. On peut voir $f(x, y)$ comme « l'altitude » du point de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ dans l'espace et donc représenter f par la surface de l'espace dont les coordonnées des points forment un ensemble $\mathcal{S}$ appelé **surface représentative** de f :

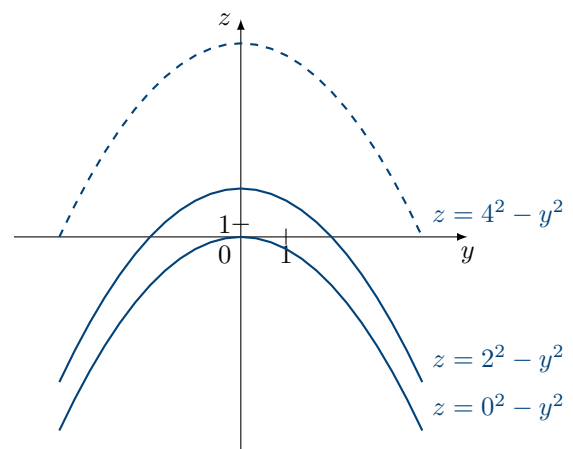
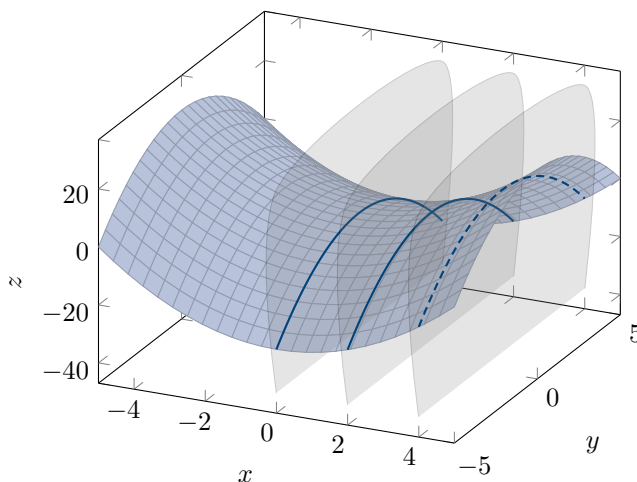
$$\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\} .$$

Exemple 38.9. On s'intéresse à la fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dont on note $\mathcal{S}$ la surface.
 $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$

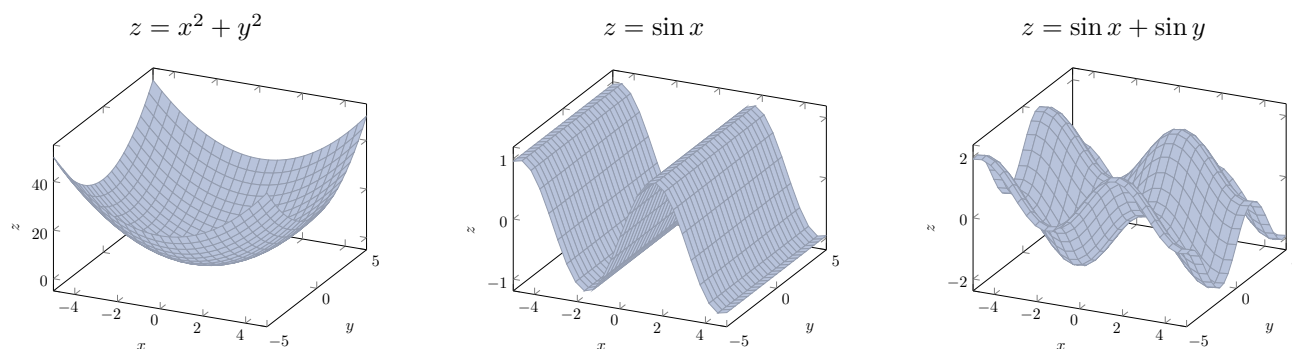
1. Ci-après, on a représenté la surface $\mathcal{S}$ à gauche et à droite les courbes représentatives obtenues après intersection avec les plans d'équation $y = -4$, $y = -2$ et $y = 0$ respectivement.



2. Ci-après, on a représenté la surface $\mathcal{S}$ à gauche et à droite les courbes représentatives obtenues après intersection avec les plans d'équation $x = 0$, $x = 2$ et $x = 4$ respectivement.



Exemple 38.10. Voici quelques exemples de surfaces. Visualisez bien chaque exemple et assurez-vous de comprendre le lien entre la représentation graphique et l'expression de la fonction.



38.1.3 Applications partielles

Définition 38.11 - Applications partielles.

Soit A une partie de $\mathbf{R}^2$, $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ et $(x_0, y_0) \in A$.

On appelle **applications partielles** de f en (x_0, y_0) les applications

$$f(x_0, \cdot) : y \longmapsto f(x_0, y) \quad \text{et} \quad f(\cdot, y_0) : x \longmapsto f(x, y_0)$$

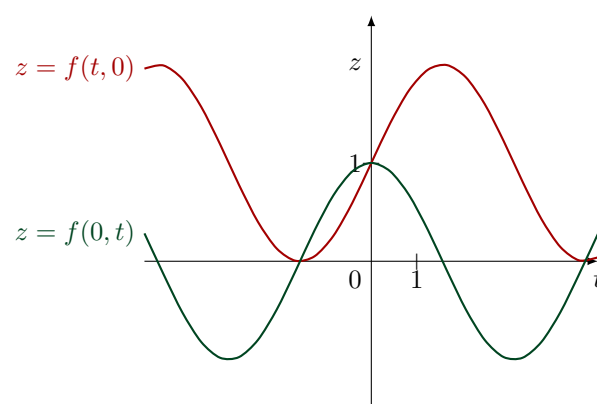
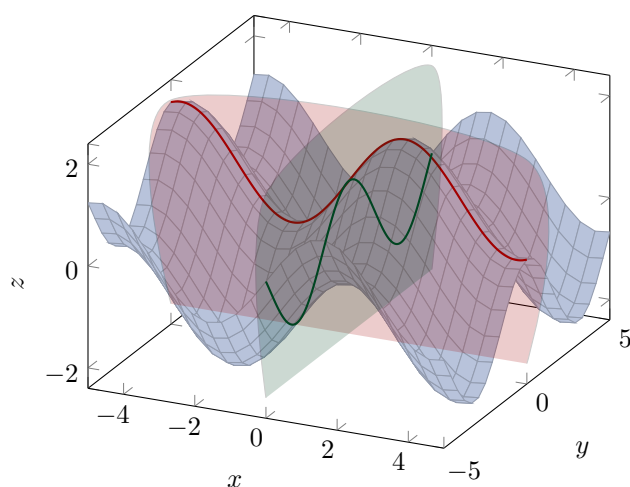
On note aussi $f_{x_0, \cdot} = f(x_0, \cdot)$ (resp. $f_{\cdot, y_0} = f(\cdot, y_0)$).

Exemple 38.12. On a représenté ci-après à gauche la surface représentative de

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sin(x) + \cos(y) \end{aligned}$$

On a également tracé à droite les courbes représentatives des fonctions partielles en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(0, \cdot) : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} & \text{et} & & f(\cdot, 0) : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ t &\longmapsto \cos(t) & & & t &\longmapsto \sin(t) + 1 \end{aligned}$$



38.2 Continuité des fonctions réelles de deux variables réelles

Définition 38.13 - Continuité en un point.

Soit A une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$, f une application de A dans $\mathbf{R}$ et $(x_0, y_0) \in A$.
On dit que f est **continue** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A, \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \eta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, f est continue a lorsqu'on peut rendre $f(u)$ arbitrairement proche de $f(a)$ en choisissant u suffisamment proche de a , c'est-à-dire dans une boule fermée centrée en a de rayon suffisamment petit.

Remarque 38.14. Cette définition est presque la même que celle de continuité pour une fonction d'une seule variable : il suffit de remplacer les valeurs absolues par des normes.

Définition 38.15 - Continuité sur un ouvert.

Soit A une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$. On dit qu'une fonction de deux variables est **continue** sur A lorsqu'elle est continue en tout point de A .

Proposition 38.16 - Opérations sur les fonctions continues.

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur une partie ouverte A de $\mathbf{R}^2$.

1. $f + g$ est continue sur A .
2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, λf est continue sur A .
3. $f \times g$ est continue sur A .
4. Si g ne s'annule pas sur A , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur A .

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $a \in A$. Puisque f et g sont continues en a , il existe $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, tels que

$$\forall u \in A, \quad \|u - a\| \leq \eta_1 \implies |f(u) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall u \in A, \quad \|u - a\| \leq \eta_2 \implies |g(u) - g(a)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a

$$\forall u \in A, \quad \|u - a\| \leq \eta \implies |f(u) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |g(u) - g(a)| \leq \varepsilon.$$

Soit $u \in A$ tel que $\|u - a\| \leq \eta$. On a

$$\begin{aligned} |(f + g)(u) - (f + g)(a)| &= |f(u) - f(a) + g(u) - g(a)| \\ &\leq |f(u) - f(a)| + |g(u) - g(a)| && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

donc $f + g$ est continue en a .

Les autres points se montrent de manière similaire. □

Exemple 38.17 (♥). Les fonctions affines de la forme $f : (x, y) \mapsto ax + by + c$ sont continues sur $\mathbf{R}^2$. Les fonctions polynomiales à deux variables sont continues sur $\mathbf{R}^2$. Les quotients de fonctions polynomiales à deux variables sont continues sur toute partie ouverte de $\mathbf{R}^2$ où le dénominateur ne s'annule pas.

Remarque 38.18. Graphiquement, une fonction de deux variables est continue sur A si la surface qui la représente ne présente pas de « saut » en un point de A .

38.3 Dérivées directionnelles

Définition 38.19 - Dérivée directionnelle.

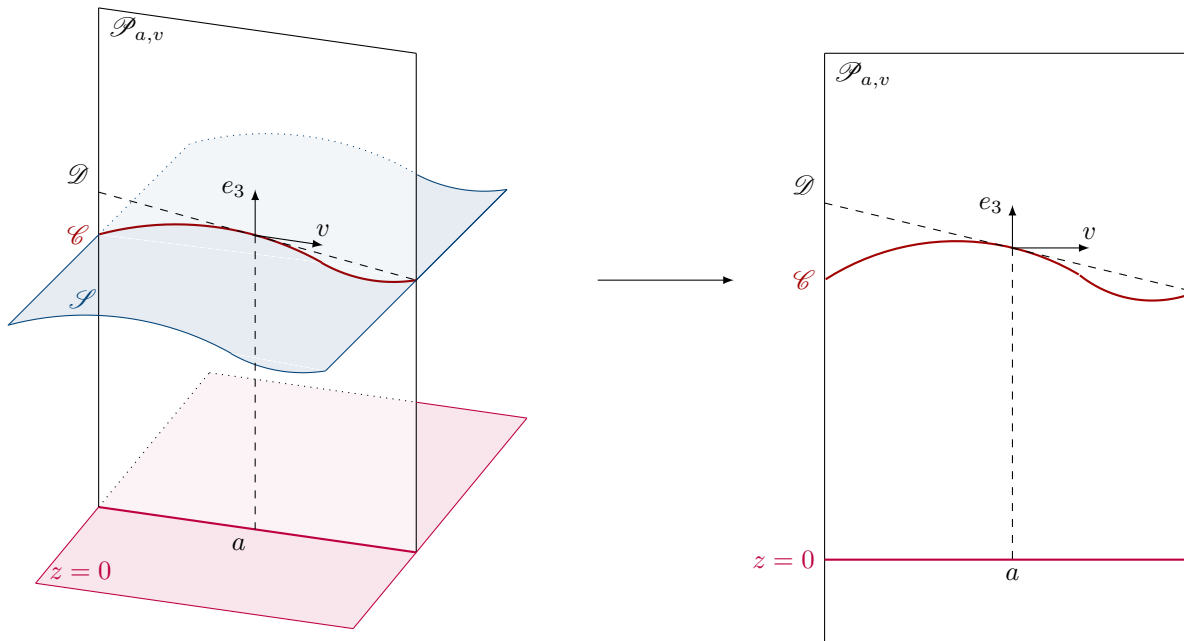
Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in U$ et $v \in \mathbf{R}^2$. On dit que f est **dérivable en a dans la direction v** si la fonction $F : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.

Le cas échéant, on appelle **dérivée de f en a dans la direction v** le réel $D_v f(a) = F'(0)$.

Remarque 38.20. Avec les notations de la définition, on a que f est dérivable en a dans la direction v si la fonction $t \mapsto \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$ possède une limite finie en 0. Le cas échéant, $D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$.

Interprétation graphique.

1. Considérons dans $\mathbf{R}^3$ la surface $\mathcal{S}$ de f (on rappelle que $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in U \text{ et } z = f(x, y)\}$).
2. Traçons l'intersection par le plan « vertical » $\mathcal{P}_{a,v}$ passant par a et dirigé par les deux vecteurs orthogonaux v et e_3 (en toute rigueur v appartient à $\mathbf{R}^2$, mais on identifie ici $\mathbf{R}^2$ au plan d'équation $z = 0$ de $\mathbf{R}^3$). Cette intersection forme une courbe $\mathcal{C}$ du plan $\mathcal{P}_{a,v}$ (dessin de gauche ci-après).
3. On se place maintenant dans le plan $\mathcal{P}_{a,v}$, qu'on munit du repère (a, v, e_3) (dessin de droite ci-après). La courbe $\mathcal{C}$ n'est alors rien de plus que le graphe de la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ et (sous réserve d'existence), $D_v f(a)$ est son nombre dérivé en 0.



38.4 Dérivées partielles

Définition 38.21 - Dérivées partielles.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.

Lorsqu'elles existent et sont finies, on appelle **dérivées partielles (premières)** de f en (x_0, y_0) les limites suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

La première (resp. la seconde) est appelée **dérivée partielle suivant x** (resp. **suivant y**).

Remarque 38.22. Reprenons les notations de la définition précédente. Les dérivées partielles en (x_0, y_0) sont égales, sous réserve d'existence, aux dérivées des applications partielles correspondantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{\cdot, y_0}(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0, \cdot}(y_0).$$

Exercice d'application 38.23. Déterminer les dérivées partielles des fonctions θ et r suivantes au point a proposé.

1. Soit $\theta : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.
 $(x, y) \longmapsto \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$
2. Soit $r : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a = (x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
 $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$

➡

Remarque 38.24. En particulier, pour $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, on retrouve les dérivées directionnelles $D_{e_1}(f)$ et $D_{e_2}(f)$. Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et que $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ admet des dérivées partielles premières en $(x_0, y_0) \in U$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_{e_1}(f)(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_{e_2}(f)(x_0, y_0).$$



ATTENTION



⌋ L'existence des dérivées partielles en un point (x_0, y_0) n'entraîne pas la continuité en (x_0, y_0) .

Définition 38.25 - Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de **classe $\mathcal{C}^1$** sur U lorsque f admet des dérivées partielles en tout point a de U et si les applications $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont continues sur U .

Proposition 38.26 - Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

1. $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ est un espace vectoriel stable par multiplication.
2. Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur toute partie ouverte de U où le dénominateur ne s'annule pas.
3. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et I un intervalle. La composée $\varphi \circ f$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ avec $f(U) \subset I$ et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Exemple 38.27 (♥). Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

Démonstration.

Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. En particulier, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. $\square$

Exercice d'application 38.28. ♥ Montrer que la fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$v \longmapsto \|v\|$$

Qu'en est-il en $(0, 0)$?

➡

Théorème 38.29 - Développement limité à l'ordre 1.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in U$. Alors :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre 1** en (x_0, y_0) .

Démonstration $\mathfrak{B}$.

Quitte à remplacer f par $(x, y) \mapsto f(x_0 + x, y_0 + y)$, on peut supposer sans perte de généralité que $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B((0, 0), r) \subset U$. De plus, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$, donc il existe des réels α_x et α_y , que nous pouvons choisir inférieurs à r , pour lesquels pour tout $(h, k) \in \mathbf{R}^2$,

$$\|(h, k)\| < \alpha_x \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(h, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (38.1)$$

et

$$\|(h, k)\| < \alpha_y \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(h, k) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (38.2)$$

Notons $\alpha = \min(\alpha_x, \alpha_y)$ et $(h, k) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|(h, k)\| < \alpha$. On a

$$\begin{aligned} \left| f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \right| &= \left| \left(f(h, k) - f(0, k) \right) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \left(f(0, k) - f(0, 0) \right) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \right| \\ &= \left| \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x}(s, k) ds - \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) ds + \int_0^k \frac{\partial f}{\partial y}(0, t) dt - \int_0^k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) ds \right| + \left| \int_0^k \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) dt \right| \end{aligned}$$

avec l'inégalité triangulaire. Or, pour tout s compris entre 0 et h ,

$$\|(s, k)\| = \sqrt{s^2 + k^2} \leq \sqrt{h^2 + k^2} = \|(h, k)\| < \alpha \leq \alpha_x$$

donc, avec (38.1),

$$\left| \int_0^h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) ds \right| \leq \left| \int_0^h \frac{\varepsilon}{2} ds \right| = \frac{\varepsilon}{2} |h|.$$

De même, pour tout t compris entre 0 et k ,

$$\|(0, t)\| = |t| \leq |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2} = \|(h, k)\| < \alpha \leq \alpha_y$$

donc, avec (38.2),

$$\left| \int_0^k \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) dt \right| \leq \left| \int_0^k \frac{\varepsilon}{2} dt \right| = \frac{\varepsilon}{2} |k|.$$

Finalement,

$$\left| f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(|h| + |k|) \leq \frac{\varepsilon}{2}(\|(h, k)\| + \|(h, k)\|) = \varepsilon \|(h, k)\|$$

ce qui démontre que

$$\left| f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \right|_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} = o(\|(h, k)\|).$$

□

Remarque 38.30. On reprend les notations du théorème. Le développement donné signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que, pour tout $(h, k) \in \mathbf{R}^2$ tels que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \|(h, k)\| \varepsilon(\|(h, k)\|) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Corollaire 38.31 - Classe $\mathcal{C}^1$ entraîne continue.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ alors elle est continue sur U .

Démonstration $\frac{III}{\square}$.

Soit $(x_0, y_0) \in U$. Soit $\varepsilon > 0$. Par troncature à l'ordre 0 du $DL_1((x_0, y_0))$ de f , on obtient qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in U$ avec $\|(h, k) - (x_0, y_0)\| < \eta$ on ait

$$|f(h, k) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

ce qui prouve que f est continue en (x_0, y_0) .

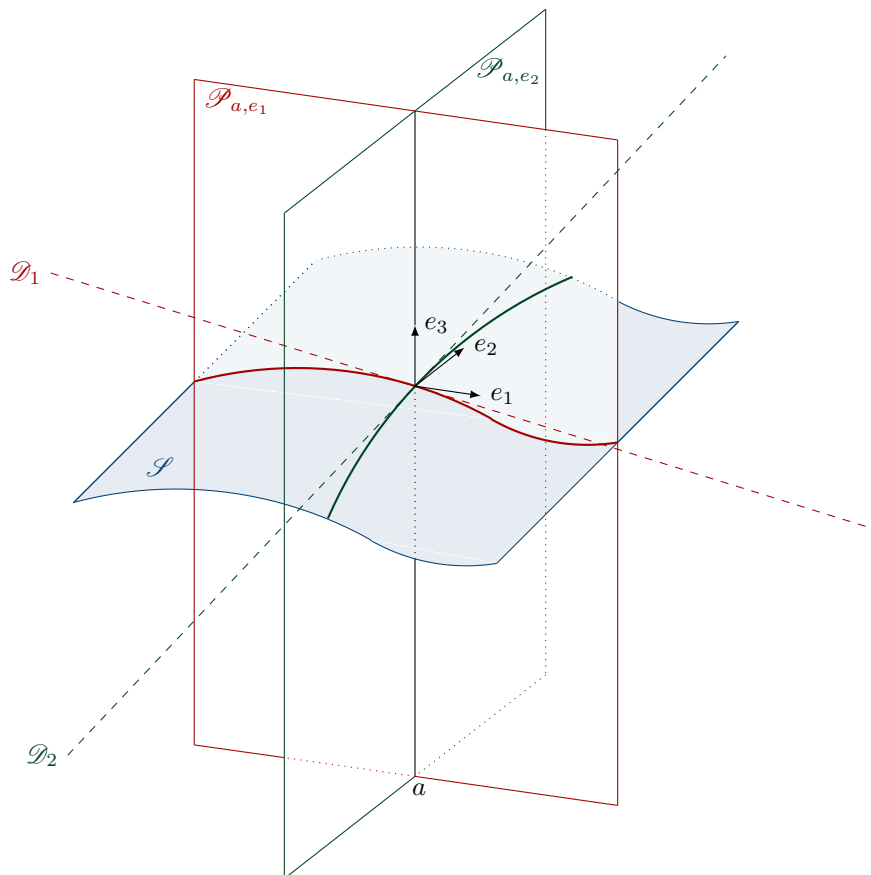
□

Définition 38.32 - Plan tangent.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a = (x_0, y_0) \in U$. La surface d'équation $z = f(x, y)$ admet un **plan tangent** en a et une équation de ce plan est :

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

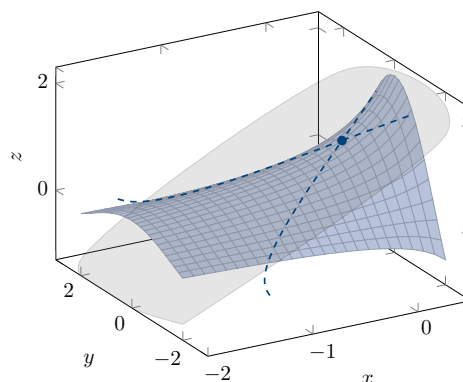
On refait le même type de représentation graphique que lorsqu'on a illustré les dérivées directionnelles, en coupant cette fois par les deux plans $\mathcal{P}_{a,e_1}$ et $\mathcal{P}_{a,e_2}$. Les courbes obtenues admettent des tangentes en a respectivement notées $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Alors le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ en a est celui porté par les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.



Exercice d'application 38.33. Écrire le développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \frac{\cos(y)}{1-x}$. En déduire une équation du plan tangent en $(0,0)$ à la surface représentant f .

➡

On a représenté ci-contre la surface d'équation $z = \frac{\cos(y)}{1-x}$ et son plan tangent en $(0,0)$. Les courbes en pointillés sous les courbes d'intersection de la surface et de son plan tangent.



Les dérivées partielles sont... partielles ! Pour pallier à cela, nous introduisons ci-après la notion de gradient, qui contient toutes les informations sur les variations locales de f dans les deux directions (suivant x et suivant y). En ce sens, cette notion est celle qui se rapproche le plus de la notion de dérivée d'une fonction d'une seule variable.

Définition 38.34 - Gradient.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . Soit $(x_0, y_0) \in U$. On appelle **gradient** de f en (x_0, y_0) et on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur défini par

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Théorème 38.35 - Développement limité à l'ordre 1 exprimé avec le gradient.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $(x_0, y_0) \in U$. Alors :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|).$$

Démonstration.

C'est une simple réécriture du Théorème 38.29, puisque

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right), (h, k) \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k. \end{aligned}$$

□

38.5 Dérivées partielles et composées

38.5.1 Règle de la chaîne

Théorème 38.36 - Règle de la chaîne.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle définie sur U . Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux fonctions réelles définies sur I telles que pour tout $t \in I$, $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \in U$.

On note F l'application réelle définie sur I par :

$$\forall t \in I, \quad F(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)).$$

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) + \mathbf{y}'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)).$$

Démonstration.

Notons $\gamma : t \longmapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, de sorte que $F = f \circ \gamma$. En appliquant la formule du développement limité de f à l'ordre 1 en 0, on obtient

$$\begin{aligned} F(t+h) &= f(\gamma(t+h)) \\ &= f(\gamma(t) + (\gamma(t+h) - \gamma(t))) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} f(\gamma(t)) + \langle \nabla f(\gamma(t)), (\gamma(t+h) - \gamma(t)) \rangle + o(\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|). \end{aligned}$$

Or

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| = \sqrt{(\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t))^2 + (\mathbf{y}(t+h) - \mathbf{y}(t))^2} \underset{h \rightarrow 0}{=} |h| \sqrt{\mathbf{x}'(t)^2 + \mathbf{y}'(t)^2} + o(h)$$

donc on peut remplacer le $o(\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|)$ par un $o(h)$:

$$\begin{aligned} F(t+h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} F(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))(\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))(\mathbf{y}(t+h) - \mathbf{y}(t)) + o(h) \\ &= F(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))(h\mathbf{x}'(t) + o(h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))(h\mathbf{y}'(t) + o(h)) + o(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} F(t) + \left(\mathbf{x}'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + \mathbf{y}'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \right) h + o(h). \end{aligned}$$

Ce développement limité prouve que F est dérivable en t et que $F'(t) = \mathbf{x}'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + \mathbf{y}'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))$. Pour finir, l'expression de F' ainsi obtenue est continue sur I , donc F y est de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

Exercice d'application 38.37. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Justifier que la fonction $F : t \mapsto f(t^2, \sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner l'expression de sa dérivée.

➡

Remarque 38.38. On reprend les notations (et hypothèses) du théorème précédent. Si on note $\gamma : t \mapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, alors γ est dérivable et on convient que $\gamma' : t \mapsto (\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t))$. La règle de la chaîne peut donc se réécrire :

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Corollaire 38.39 - Existence de dérivées directionnelles.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$. Alors f possède une dérivée en tout point de U dans toutes les directions. Plus précisément, pour tous $a \in U$ et $v = (h, k) \in \mathbf{R}^2$,

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k.$$

Démonstration.

Comme U est un ouvert, la fonction $F : t \mapsto f(a + tv)$ est définie sur $] -\eta; \eta[$ pour un certain $\eta > 0$ et elle y est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la règle de la chaîne, qui donne également

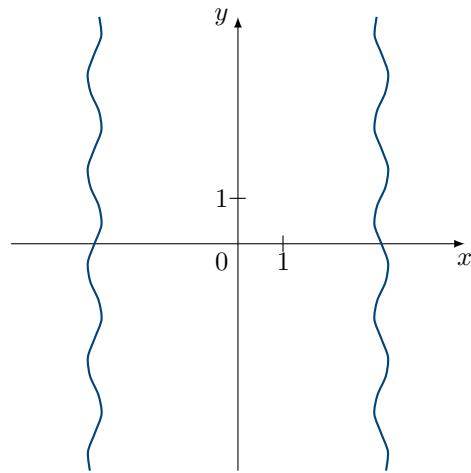
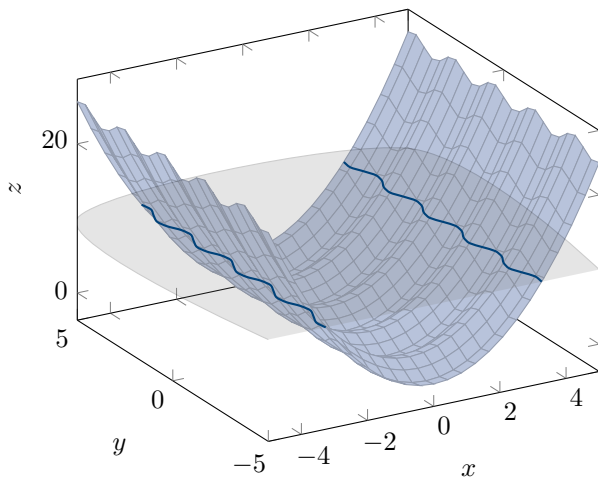
$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k.$$

Le résultat en découle car $F'(0) = D_v f(a)$ par définition des dérivées directionnelles. $\square$

Définition 38.40 - Ligne de niveau.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle **ligne de niveau** λ de f l'intersection de la surface représentative de f avec le plan d'équation $z = \lambda$.

Exemple 38.41. On a représenté ci-dessous la ligne de niveau 10 de $f : (x, y) \mapsto x^2 + \sin(3y)$.


Corollaire 38.42 - Interprétation géométrique du gradient.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$.

Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f et dirigé dans le sens des pentes croissantes.

Démonstration.

Fixons $\lambda \in \mathbf{R}$ et notons $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe de niveau λ de f : $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = \lambda\}$. Supposons pour simplifier (le cas général est plus difficile à démontrer) qu'il existe I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\mathcal{C}_\lambda = \{\gamma(t) : t \in \mathbf{R}\}$. Soit $p \in \mathcal{C}_\lambda$. Alors il existe $t \in I$ tel que $p = \gamma(t)$, puis $f \circ \gamma(t) = \lambda$. La règle de la chaîne fournit alors $\langle \nabla(f(\gamma(t))), \gamma'(t) \rangle = 0$, ce qui signifie que $\nabla(f(\gamma(t)))$ est orthogonal au vecteur $\gamma'(t)$, qui dirige la tangente de γ en t . C'est cela qu'on veut dire quand on affirme que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau. $\square$

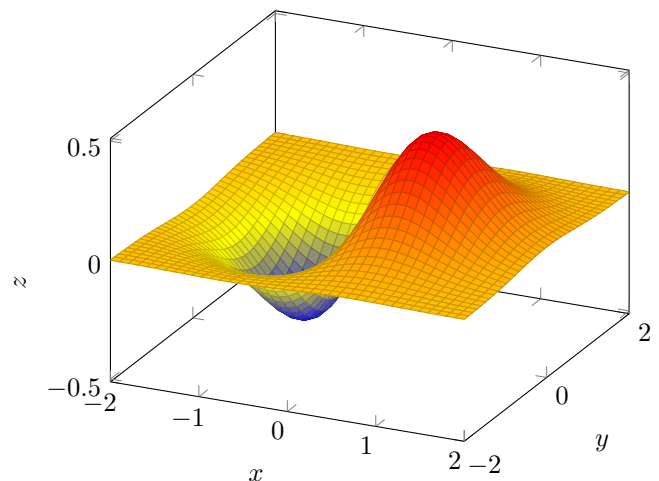
Exemple 38.43. On considère la fonction de deux variables

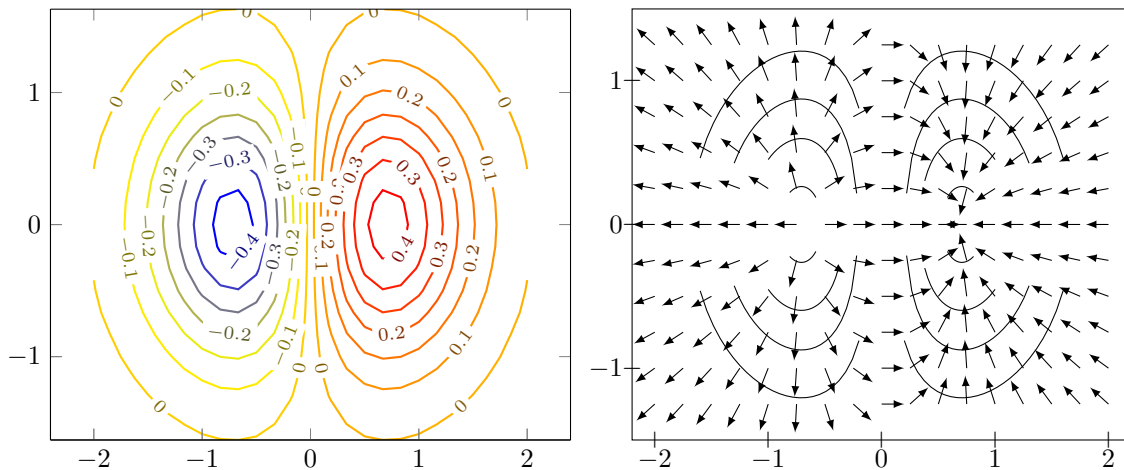
$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto xe^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

dont la surface est représentée ci-contre.

On a représenté ci-après les lignes de niveaux correspondantes sur le dessin de gauche et différents gradients (ce sont des vecteurs qu'on représente naturellement par des flèches) à droite. On observe que les gradients sont orthogonaux aux lignes de niveau et pointent dans la direction de plus forte pente.

Sur le dessin de droite, les gradients ont été normalisés pour un meilleur visuel. Le repère dans lequel le dessin est fait n'est pas normé, qui explique qu'il n'est pas immédiat de voir que les gradients sont orthogonaux aux lignes de niveau.





38.5.2 Composition par une fonction de deux variables

Théorème 38.44 - Composition par une fonction de deux variables.

Soit A et B deux ouverts de $\mathbf{R}^2$ et soit

$$\begin{array}{llll} f : B & \longrightarrow \mathbf{R} & \mathbf{x} : A & \longrightarrow \mathbf{R} & \text{et } \mathbf{y} : A & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto f(x, y) & (u, v) & \longmapsto \mathbf{x}(u, v) & (u, v) & \longmapsto \mathbf{y}(u, v) \end{array}$$

On suppose que $\forall (u, v) \in A, (\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u, v)) \in B$. On pose $F : A \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$(u, v) \longmapsto f(\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u, v))$$

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur B , alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et l'on a

$$\forall (u, v) \in A, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u, v)) + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u, v))$$

$$\text{et } \forall (u, v) \in A, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u, v)) + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u, v)).$$

Démonstration.

C'est une conséquence directe de la règle de la chaîne puisqu'on dérive ici $u \longmapsto F(u, v)$ à v fixé et $v \longmapsto F(u, v)$ à u fixé. $\square$

Remarque 38.45. On résume souvent, par abus de notations, le théorème précédent aux égalités :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemple 38.46. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, on note $F(u, v) = f(u^2 + v, uv - v^2)$. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ car les fonctions $\mathbf{x} : (u, v) \longmapsto u^2 + v$ et $\mathbf{y} : (u, v) \longmapsto uv - v^2$ le sont et pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 2u \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v, uv - v^2) + v \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v, uv - v^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v, uv - v^2) + (u - 2v) \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v, uv - v^2).$$

Exercice d'application 38.47. Calcul en coordonnées polaires. ♥

Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On considère

$$\begin{array}{ll} F : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{array}$$

Calculer les dérivées partielles de F en tout point (r, θ) .



Exemple 38.48 ($\frac{m}{\infty}$). Soit $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial f}{\partial x} = x \frac{\partial f}{\partial y}$$

d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$, avec la **condition aux limites** $f(x, 0) = e^{-x}$ pour tout $x > 0$.

- *Analyse.* Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ une solution du problème proposé. Soit

$$\begin{aligned} F : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (r, \theta) &\longmapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

L'exercice d'application précédent assure que F ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et que, pour $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$. En particulier,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

Ainsi, pour tout $r > 0$, la fonction $\theta \mapsto F(r, \theta)$ est constante, ce qui signifie qu'il existe φ tel que pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, $F(r, \theta) = \varphi(r)$. Il s'ensuit, comme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Or pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \varphi(\sqrt{t^2 + 0^2}) = f(t, 0) = e^{-t}$, donc

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- *Synthèse.* Notons $f : (x, y) \mapsto e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$ définie sur U . La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et la fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et pour tout $(x, y) \in U$,

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \times \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} = x \times \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} = x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Enfin, pour tout $x > 0$, $f(x, 0) = e^{-\sqrt{x^2 + 0^2}} = e^{-x}$.

- *Conclusion.* Finalement, la fonction $(x, y) \mapsto e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$ est l'unique solution du problème étudié.

38.6 Extrema

Définition 38.49 - Extremum global.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit $a \in U$. On dit que f admet un **minimum** (resp. **maximum**) en a si pour tout $u \in U$, $f(u) \geq f(a)$ (resp. $f(u) \leq f(a)$). Le cas échéant, $f(a)$ est le minimum (resp. maximum) de f .

Définition 38.50 - Extremum local.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit $a \in U$.

1. On dit que f admet un **minimum local** en a si $f(a)$ est un minimum de f dans un voisinage de a :

$$\exists r > 0, \forall u \in B(a, r) \cap U, \quad f(u) \geq f(a).$$

2. On dit que f admet un **maximum local** en a si $f(a)$ est un maximum de f dans un voisinage de a :

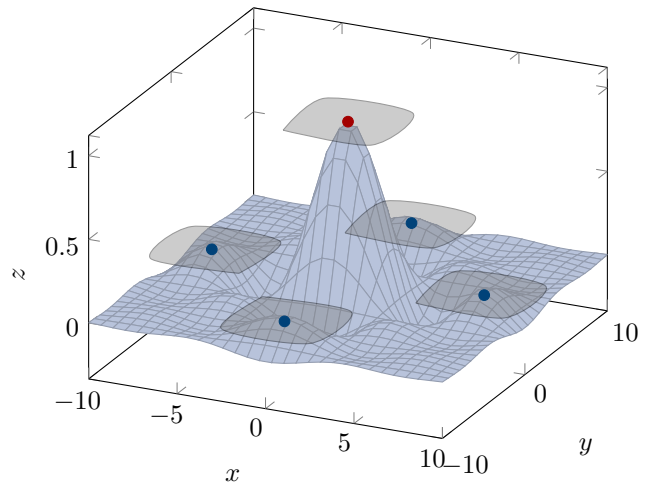
$$\exists r > 0, \forall u \in B(a, r) \cap U, \quad f(u) \leq f(a).$$

Exemple 38.51. On a représenté ci-contre la surface représentative de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x) \sin(y)}{xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cette fonction admet un maximum global en $(0, 0)$ qui vaut 1 (représenté par un point rouge) ainsi que des maxima locaux en plusieurs autres points (certains sont représentés par des points bleus).

Graphiquement, les points correspondant maxima locaux sont localement en dessous de « leur » plan tangent.

**Définition 38.52 - Point critique.**

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$.

On dit que a est un **point critique** de f si $\nabla f(a) = (0, 0)$.

Théorème 38.53 - Extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$.

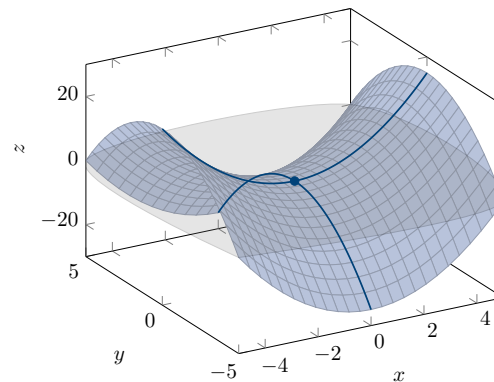
Si f présente un extremum local en a , alors a est un point critique de f .

Démonstration.

Si f présente un extremum local en $a = (x_0, y_0)$, alors les deux applications partielles $f_{(\cdot, y_0)}$ et $f_{(x_0, \cdot)}$ admettent un extremum local respectivement en x_0 et y_0 . Les dérivées de ces applications d'une seule variable réelle s'annulent donc en ce point. $\square$

**ATTENTION**

La réciproque du théorème précédent est fausse ! Les points critiques ne sont pas toujours des extrema locaux. Par exemple, la fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ admet un point critique en $(0, 0)$ (on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2 \times 0^2 = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -2 \times 0^2 = 0$), alors que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f . En effet, l'application partielle $f_{\cdot, 0} : x \mapsto x^2$ admet un minimum en 0 tandis que l'application partielle $f_{0, \cdot} : y \mapsto -y^2$ admet un maximum en 0. Ainsi, $(0, 0)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local.



Remarque 38.54. Le fait que les extrema d'une fonction de deux variables se situent en des points critiques n'est vrai que lorsqu'on travaille sur un ouvert avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On peut très bien avoir un extremum en un point où la fonction n'admet pas de dérivée partielle ou sur un « bord » d'un ensemble non ouvert.

Exercice d'application 38.55. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y.$

Trouver les éventuels extrema de f .



Questions de cours

1. Définir la notion de distance euclidienne.
2. Donner la définition de boule ouverte (resp. fermée).
3. Définir la notion d'ouvert de $\mathbf{R}^2$.
4. Définir les applications partielles d'une fonction de deux variables.
5. Donner la définition de fonction continue en un point d'un ouvert.
6. Donner la définition de dérivée directionnelle.
7. Définir les dérivées partielles.
8. Définir la notion de fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$.
9. Donner la formule du développement limité à l'ordre 1 pour une fonction de deux variables (avec et sans gradient).
10. Existe-t-il un lien entre l'existence des dérivées partielles et la continuité de la fonction ? Existe-t-il un lien entre les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et les fonctions continues ?
11. Donner la définition de plan tangent.
12. Donner la définition de gradient.
13. Énoncer la règle de la chaîne.
14. Donner la formule liant les dérivées directionnelles et les dérivées partielles.
15. Définir la notion de ligne de niveau.
16. Donner l'interprétation géométrique du gradient.
17. Donner les formules de dérivations des composées de fonctions de deux variables.
18. Définir la notion d'extremum global (resp. local).
19. Définir la notion de point critique.
20. Donner le lien entre extrema locaux et points critiques.