

CHAPITRE 37

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

37.1 Produit scalaire

37.1.1 Définition

Définition 37.1 - Produit scalaire.

On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

- Symétrie** : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- Bilinéarité** : pour tout $e \in E$, $x \longmapsto \varphi(x, e)$ et $x \longmapsto \varphi(e, x)$ sont linéaires, c'est-à-dire

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \varphi(\lambda x + z, y) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(z, y),$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x, \lambda y + z) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, z).$$

- Positivité** : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$.
- Séparation** (ou **définie positivité**) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Notation 37.2. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est généralement noté $\langle x, y \rangle$ (ou $(x | y)$ ou encore $x \cdot y$).

Remarque 37.3. Une application φ vérifiant les propriétés **3.** et **4.** de la définition est dite **définie positive**.

Remarque 37.4. **1.** Pour montrer la bilinéarité, il suffit de prouver la symétrie puis la linéarité en l'une des variables. En effet, si φ est symétrique et $x \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, alors, pour $(x, y, z, \lambda) \in E^3 \times \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y + \lambda z) &= \varphi(y + \lambda z, x) && \text{car } \varphi \text{ est symétrique} \\ &= \varphi(y, x) + \lambda \varphi(z, x) && \text{car pour tout } e \in E, \varphi(\cdot, e) \text{ est linéaire} \\ &= \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z) && \text{car } \varphi \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

2. Si φ est bilinéaire, alors on sait que pour tout $e \in E$, $\varphi(0_E, e) = 0 = \varphi(e, 0_E)$. Pour montrer que φ est définie, on peut donc se contenter de prouver l'implication : si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0_E$.

3. Montrer la séparation est rarement trivial et nécessite souvent des justifications. On veillera donc à la prouver avec la plus grande rigueur.

Exercice d'application 37.5. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$.

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto x_1 x_2 + y_1 y_2$$

➡

Définition 37.6 - Espace préhilbertien, espace euclidien.

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien réel**. Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace euclidien**.

Dans toute la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Exemple 37.7 (♥, produit scalaire canonique dans $\mathbf{R}^n$). Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $X \in \mathbf{R}^n$, on notera $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans $\mathbf{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (X, Y) &\longmapsto X^\top Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ est appelé **produit scalaire canonique**.

1. Symétrie. Soit $X, Y \in \mathbf{R}^n$.

$$\langle Y, X \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle X, Y \rangle.$$

2. Bilinéarité. Soit $X, Y, Z \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \langle X + \lambda Z, Y \rangle &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda z_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i + \lambda z_i y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^n z_i y_i \\ &= \langle X, Y \rangle + \lambda \langle Z, Y \rangle \end{aligned}$$

ce qui montre que pour tout $e \in E$, $\langle \cdot, e \rangle$ est linéaire. La bilinéarité s'en déduit par symétrie.

3. Positivité. Soit $X \in \mathbf{R}^n$.

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

en tant que somme de termes positifs.

4. Séparation. Soit $X \in \mathbf{R}^n$ tel que $\langle X, X \rangle = 0$. On a $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i^2 = 0$ donc $x_i = 0$.

Finalement $X = 0_{\mathbf{R}^n}$. On vient de montrer le caractère défini de l'application.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Exemple 37.8 (♥, produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$). Soit $n, p \in \mathbf{N}^*$. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, on notera $a_{i,j}$ ses coefficients. Alors

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R}) \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{i,j}\end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est appelé **produit scalaire canonique**, où $\operatorname{tr}(M)$ désigne la somme des éléments diagonaux d'une matrice M et est appelée **trace** de la matrice. Les propriétés de la trace et la démonstration de cet exemple seront donnés l'année prochaine.

Exercice d'application 37.9. ♥ Soit a et b deux réels avec $a \leq b$. Dans $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R})$, on considère

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(t)g(t) \, dt\end{aligned}$$

Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel. Est-ce un espace euclidien ?

➡

37.1.2 Norme euclidienne

Définition 37.10 - Norme euclidienne.

Pour $x \in E$, on appelle **norme euclidienne** de x associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|x\|$ le réel $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Définition 37.11 - Vecteur unitaire.

Un élément x de E est dit **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Exemple 37.12. • Dans $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont tous unitaires.

- Pour tout $x \in E$, si $x \neq 0_E$, $\frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire.

Proposition 37.13 - Premières propriétés de la norme euclidienne.

1. **Séparation.** Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$.
2. **Homogénéité.** Pour tout $x \in E$ et pour tout réel λ , $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Démonstration.

Théorème 37.14 - Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Exemple 37.15. 1. Dans $E = \mathbf{R}^n$ avec le produit scalaire canonique, pour $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

ou de manière équivalente

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

En particulier, si $y = (1, \dots, 1)$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

2. Dans $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$, on a pour $(f, g) \in E^2$,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

En particulier pour $g : t \mapsto 1$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{(b-a) \int_a^b f^2(t) dt}.$$

Proposition 37.16 - Inégalités triangulaires.

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. Première inégalité triangulaire. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. Cas d'égalité. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \alpha \geq 0, x = \alpha y$ ou $\exists \alpha \geq 0, y = \alpha x$.
3. Seconde inégalité triangulaire. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$.

Démonstration.

En développant par bilinéarité et en utilisant la symétrie, on obtient

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, ainsi

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

c'est-à-dire $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$. Puisque les normes sont positives et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$, alors

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

2. Il y a égalité si et seulement si $|\langle x, y \rangle| = \langle x, y \rangle = \|x\| \times \|y\|$. Or on sait que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires, ce qui équivaut à l'existence de $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

Dans les deux cas, $\langle x, y \rangle$ est du signe de α . Or $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$ équivaut à $\langle x, y \rangle \geq 0$. Finalement, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement s'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

3. On remarque que $x = (x + y) + (-y)$ donc d'après la première inégalité triangulaire, $\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\|$, ou encore $\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\|$. On en déduit

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|.$$

De même, en échangeant les rôles de x et y , on obtient

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|.$$

Puisque $|\|x\| - \|y\|| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|)$, on peut conclure. □

Proposition 37.17 - Identités remarquables.

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
2. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
3. $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
4. **Identité de polarisation.** $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

Démonstration.

37.2 Orthogonalité

37.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 37.18 - Vecteurs orthogonaux.

Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Exemple 37.19. 1. 0_E est orthogonal à tout vecteur de E .

2. Dans $\mathbf{R}^4$ avec le produit scalaire canonique, posons $x = (1, 1, 1, 1)$. Les vecteurs

$$(0, 0, 0, 0), \quad (1, -1, 0, 0) \quad \text{et} \quad (2, -1, -1, 0)$$

sont tous orthogonaux à x .

Exercice d'application 37.20. Dans l'espace $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, on considère les applications $f_1 : t \mapsto 1$, $f_2 : t \mapsto \cos(\pi t)$ et $f_3 : t \mapsto \sin(\pi t)$. Parmi ces trois vecteurs, lesquels sont orthogonaux ?

➡

37.2.2 Orthogonal d'une partie

Définition 37.21 - Orthogonal d'une partie.

Soit X une partie de E . On appelle **orthogonal** de X et on note $X^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X :

$$X^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in X, x \perp y\}.$$

Proposition 37.22 - Orthogonal de l'espace entier.

On a $E^\perp = \{0_E\}$.

Démonstration.

Soit $x \in E^\perp$. Le vecteur x est par définition orthogonal à tous les vecteurs de E , donc il est en particulier orthogonal à lui-même, d'où $\langle x, x \rangle = 0$ et ainsi $x = 0_E$. On a montré $E^\perp \subset \{0_E\}$.

Puisque 0_E est orthogonal à tous les vecteurs de E , on a $\{0_E\} \subset E^\perp$.

Finalement, $E^\perp = \{0_E\}$. □

Théorème 37.23 - L'orthogonal est un sous-espace vectoriel.

Soit X une partie de E . Alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

Proposition 37.24 - Caractérisation de l'orthogonalité à l'aide d'une famille génératrice finie.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F possède une famille génératrice finie $(u_1, \dots, u_p)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$x \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad x \perp u_i.$$

Démonstration.

Exemple 37.25. Dans l'espace euclidien canonique $\mathbf{R}^3$, le plan vecteur d'équation $3x - y + 2z = 0$ n'est jamais que l'orthogonal $\{(3, -1, 2)\}^\perp$, car pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\langle (3, -1, 2), (x, y, z) \rangle = 3x - y + 2z$. En termes géométriques, le vecteur $(3, -1, 2)$ est normal au plan d'équation $3x - y + 2z = 0$.

Exemple 37.26. Dans $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, considérons $F = \text{Vect}(x \mapsto 1)$.

On a : $F^\perp = \{f \in E \mid \langle f, x \mapsto 1 \rangle = 0\} = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$.

Exercice d'application 37.27. Dans $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, \dots, 1))$.

➡

Exercice d'application 37.28. Dans $\mathbf{R}_2[X]$, on considère l'application φ définie pour tout $(P, Q) \in \mathbf{R}_2[X]^2$ par

$$\varphi(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire φ , déterminer l'orthogonal de $F = \mathbf{R}_1[X]$.

➡

37.2.3 Familles orthogonales

Définition 37.29 - Famille orthogonale, orthonormale.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

- On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille orthogonale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille orthonormale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Exemple 37.30. 1. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale. En effet, fixons $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \times 0 + \dots + 1 \times 0 + \dots + 0 \times 1 + \dots + 0 \times 0 = 0$. Si $i = j$, alors $\langle e_i, e_j \rangle = 0^2 + \dots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \dots + 0^2 = 1$.

2. Dans $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, considérons les vecteurs

$$f_1 : t \longmapsto 1, \quad f_2 : t \longmapsto \cos(\pi t), \quad f_3 : t \longmapsto \sin(\pi t).$$

La famille (f_1, f_2, f_3) n'est pas orthogonale car f_1 et f_3 ne sont pas orthogonaux (cf. Exercice d'application 37.20).

Exercice d'application 37.31. Dans $\mathcal{C}^0([0; 2\pi], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ (à faire : vérifier que cette application est bien un produit scalaire), considérons les vecteurs :

$$f_1 : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_2 : t \longmapsto \cos(t), \quad f_3 : t \longmapsto \sin(t).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est orthonormale.



Théorème 37.32 - Liberté pour une famille finie orthogonale, orthonormale.

Une famille de cardinal fini orthogonale ne contenant pas 0_E est libre. En particulier, une famille orthonormale est une famille libre.

Démonstration.

Théorème 37.33 - Propriété de Pythagore.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E . Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

Démonstration.

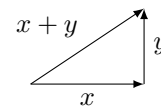
**ATTENTION**

La propriété de Pythagore présentée ici n'est qu'une **implication**.

Théorème 37.34 - Théorème de Pythagore.

Soit $x, y \in E$. Alors

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



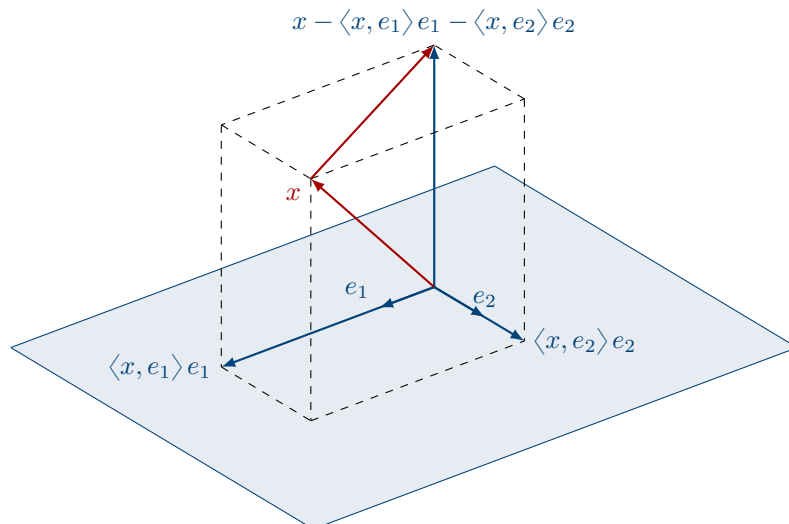
Démonstration.

37.2.4 Orthonormalisation d'une famille finie de vecteurs**Lemme 37.35 - « Redressement » d'un vecteur pour le rendre orthogonal à d'autres.**

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de E . Soit $x \in E$. Alors

$$x - \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp.$$

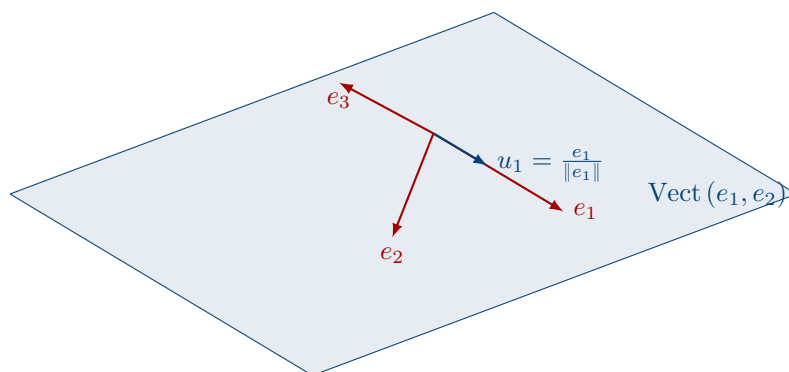
Démonstration.



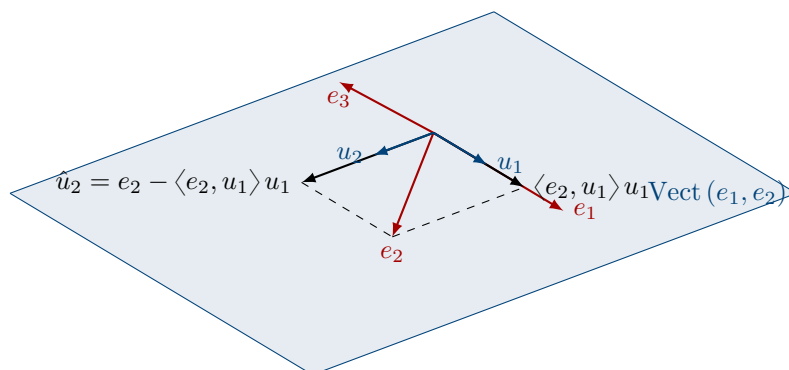
Présentation du problème. On suppose donnée une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ de E . On veut construire une famille orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ de E pour laquelle pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Explication de la méthode pour trois vecteurs. On suppose donnée une famille libre (e_1, e_2, e_3) . On va construire successivement u_1 , u_2 puis u_3 .

1. Construction de u_1 . On pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ (on a bien $e_1 \neq 0$, sinon la famille (e_1, e_2, e_3) ne pourrait être libre). Ce choix convient puisque $\text{Vect}(u_1) = \text{Vect}(e_1)$ et $\|u_1\| = \left\| \frac{e_1}{\|e_1\|} \right\| = \frac{\|e_1\|}{\|e_1\|} = 1$.



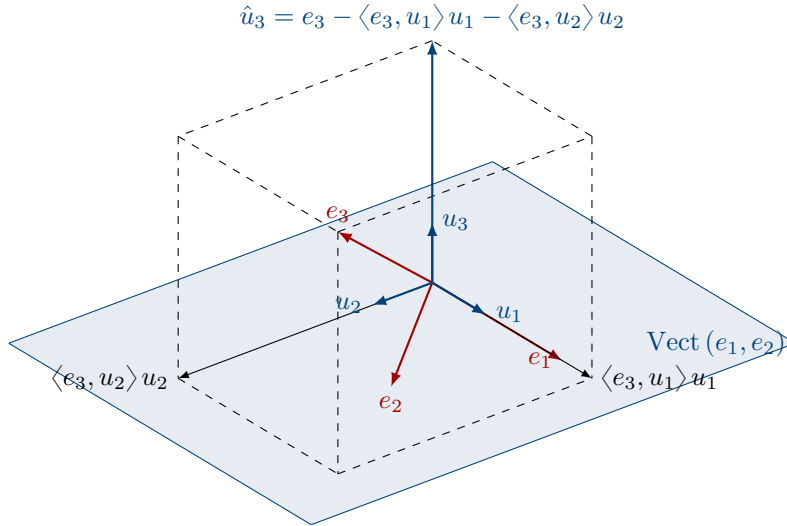
2. Construction de u_2 .
 - Redressement du vecteur e_2 . Le vecteur $\hat{u}_2 = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1$ est orthogonal à u_1 d'après le Lemme 37.35 (car la famille (u_1) est orthonormale).
 - Normalisation. Le vecteur $u_2 = \frac{\hat{u}_2}{\|\hat{u}_2\|} = \frac{e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1}{\|e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1\|}$ est normal.
 Puisque $u_1 \in \text{Vect}(e_1)$, on a par construction $u_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$.



3. Construction de u_3 .

- Redressement du vecteur e_3 . Le vecteur $\hat{u}_3 = e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2$ est orthogonal à u_1 et u_2 d'après le Lemme 37.35 (car la famille (u_1, u_2) est orthonormale).
- Normalisation. Le vecteur $u_3 = \frac{\hat{u}_3}{\|\hat{u}_3\|} = \frac{e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2}{\|e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2\|}$ est normal.

Puisque $u_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$, on a par construction $u_3 \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.



En itérant le processus, on peut obtenir le résultat suivant.

Théorème 37.36 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E . Alors il existe une unique famille orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ de E pour laquelle pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\langle e_k, u_k \rangle > 0$.

Les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ peuvent être construits de proche en proche depuis u_1 jusqu'à u_n . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si on a construit $u_1, \dots, u_{k-1}$ et si on pose

$$\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$$

alors $u_k = \frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$.

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ obtenue est appelée l'**orthonormalisée** par le procédé de Gram-Schmidt de la famille $(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose H_n : « si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E , alors il existe une unique famille orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ vérifiant pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\langle e_k, u_k \rangle > 0$ ».

- Soit (e_1) une famille libre de E . Alors $e_1 \neq 0_E$ donc on peut poser $u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$. La famille (u_1) est orthonormale, $\text{Vect}(u_1) = \text{Vect}(e_1)$ et $\langle e_1, u_1 \rangle = \|e_1\| > 0$. Donc H_1 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie. Soit $(e_1, \dots, e_{n+1})$ une famille libre de E . D'après H_n , puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, il existe une famille orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ telle que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle e_k, u_k \rangle > 0$. Déterminons u_{n+1} en raisonnant par analyse/synthèse.

◦ *Analyse.* Supposons qu'un vecteur u_{n+1} convenable existe. Alors

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n+1})$$

donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbf{R}$ tels que $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k e_k$.

Or $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et on sait que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

des réels tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$.

Finalement, $u_{n+1} = \alpha e_{n+1} + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$, où l'on a noté plus simplement α le réel α_{n+1} . L'intérêt de cette écriture est que nous allons pouvoir exploiter l'orthonormalité de la famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, par linéarité du produit scalaire par rapport à sa première composante,

$$\langle u_{n+1}, u_i \rangle = \alpha \langle e_{n+1}, u_i \rangle + \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u_k, u_i \rangle = \alpha \langle e_{n+1}, u_i \rangle + \lambda_i.$$

car $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormale.

Or $\langle u_{n+1}, u_i \rangle = 0$, donc $\lambda_i = -\alpha \langle e_{n+1}, u_i \rangle$. On vient d'obtenir que

$$u_{n+1} = \alpha \left(e_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle e_{n+1}, u_k \rangle u_k \right).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer α . Pour cela, calculons $\langle u_{n+1}, u_{n+1} \rangle$. De même que précédemment, on obtient :

$$\langle u_{n+1}, u_{n+1} \rangle = \alpha \langle e_{n+1}, u_{n+1} \rangle.$$

Or on sait que $\|u_{n+1}\| = 1$ et que $\langle e_{n+1}, u_{n+1} \rangle > 0$, ce qui montre que $\alpha = \frac{1}{\langle e_{n+1}, u_{n+1} \rangle} > 0$.

Finalement, on a obtenu que si u_{n+1} existe, alors

$$u_{n+1} = \alpha (e_{n+1} - \langle e_{n+1}, u_1 \rangle u_1 - \langle e_{n+1}, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle e_{n+1}, u_n \rangle u_n),$$

où α est l'unique réel strictement positif tel que $\|u_{n+1}\| = 1$.

○ *Synthèse.* Introduisons le vecteur

$$\hat{u}_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle e_{n+1}, u_k \rangle u_k.$$

Vérifions que $\hat{u}_{n+1}$ est orthogonal à u_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, \hat{u}_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_{n+1}, u_i \rangle &= \langle e_{n+1}, u_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle e_{n+1}, u_k \rangle \langle u_k, u_i \rangle \\ &= \langle e_{n+1}, u_i \rangle - \langle e_{n+1}, u_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormale, donc $\langle u_k, u_i \rangle = 0$ si $k \neq i$ et $\langle u_i, u_i \rangle = 1$. Ainsi $\hat{u}_{n+1}$ est orthogonal à u_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par ailleurs, remarquons que $\hat{u}_{n+1} \neq 0_E$ car sinon $e_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Or on sait que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ (par hypothèse de récurrence), ainsi on aurait $e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ ce qui est absurde puisque la famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est libre.

Ainsi $\hat{u}_{n+1} \neq 0_E$. On peut donc introduire $u_{n+1} = \frac{1}{\|\hat{u}_{n+1}\|} \hat{u}_{n+1}$ (cf. phase d'analyse) : u_{n+1} est alors unitaire et orthogonal à tous les u_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormale, alors c'est également le cas de la famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$.

Vérifions que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n+1})$. Puisque, via H_n , $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $u_{n+1} = \frac{1}{\|\hat{u}_{n+1}\|} \hat{u}_{n+1}$, il nous suffit de vérifier que $e_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, \hat{u}_{n+1})$ et que $\hat{u}_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$.

Or

$$\hat{u}_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle e_{n+1}, u_k \rangle u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, e_{n+1})$$

donc $\hat{u}_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ puisque $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Par ailleurs,

$$e_{n+1} = \hat{u}_{n+1} + \sum_{k=1}^n \langle e_{n+1}, u_k \rangle u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, \hat{u}_{n+1}),$$

On en déduit alors que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n+1})$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que $\langle e_{n+1}, u_{n+1} \rangle > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \langle e_{n+1}, u_{n+1} \rangle &= \left\langle \hat{u}_{n+1} + \sum_{k=1}^n \langle e_{n+1}, u_k \rangle u_k, u_{n+1} \right\rangle \\ &= \langle \hat{u}_{n+1}, u_{n+1} \rangle + \sum_{k=1}^n \langle e_{n+1}, u_k \rangle \langle u_k, u_{n+1} \rangle \\ &= \langle \hat{u}_{n+1}, u_{n+1} \rangle & (u_1, \dots, u_{n+1}) \text{ est orthonormale} \\ &= \|\hat{u}_{n+1}\| \end{aligned}$$

d'où $\langle e_{n+1}, u_{n+1} \rangle > 0$.

On vient de montrer que H_{n+1} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence assure que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

Exemple 37.37. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$, orthonormalisons la base canonique $(1, X, X^2)$.

1. On a $\|1\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$. Posons $U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Posons $\hat{U}_2 = X - \langle X, U_1 \rangle U_1$. On a :

$$\langle X, U_1 \rangle = -U_1 + U_1 = 0$$

Ainsi $\hat{U}_2 = X$. Or $\|\hat{U}_2\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2$. On pose donc $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}X$.

3. Posons $\hat{U}_3 = X^2 - \langle X^2, U_1 \rangle U_1 - \langle X^2, U_2 \rangle U_2$. On a :

$$\langle X^2, U_1 \rangle = (-1)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 1^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \langle X^2, U_2 \rangle = (-1)^2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} + 1^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Ainsi $\hat{U}_3 = X^2 - \frac{2}{3}$. Or $\|\hat{U}_3\|^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$. On pose donc $U_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(X^2 - \frac{2}{3} \right)$.

Finalement la famille (U_1, U_2, U_3) est une famille orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$ (c'est même une base orthonormale puisqu'elle comporte $3 = \dim(\mathbf{R}_2[X])$ vecteurs).

Exercice d'application 37.38. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, considérons les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, 1), \quad e_2 = (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad e_3 = (-1, 1, 0).$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est libre (la vérification est laissée en exercice, rapide avec un déterminant !). Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille.

➡

Exercice d'application 37.39. Dans $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, considérons les vecteurs

$$f : t \mapsto 1, \quad g : t \mapsto t \quad \text{et} \quad h : t \mapsto t^2.$$

La famille (f, g, h) est libre (vérification laissée en exercice). Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille.



37.3 Espaces euclidiens

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension n non nulle.

37.3.1 Bases orthonormales

Définition 37.40 - Base orthonormale.

Une base de E est dite **orthonormale** si c'est une famille orthonormale.

Exemple 37.41. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormale.

Proposition 37.42 - Famille orthonormale de n vecteurs.

Une famille orthonormale de n vecteurs de E est une base orthonormale.

Démonstration.

Une famille orthonormale est libre et une famille libre qui contient $n = \dim(E)$ vecteurs est une base de E . □

Théorème 37.43 - Existence d'une base orthonormale.

Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

Démonstration.

Un espace euclidien est de dimension finie, donc il possède une base. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à l'une des bases fournit alors une base orthonormale. □

Corollaire 37.44 - Théorème de la base orthonormale incomplète.

Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration.

Une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de E est en particulier une famille libre, qui peut donc être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète) : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt fournit alors une base orthonormale de E , dont les p premiers vecteurs sont les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ de notre famille orthonormale de départ. $\square$

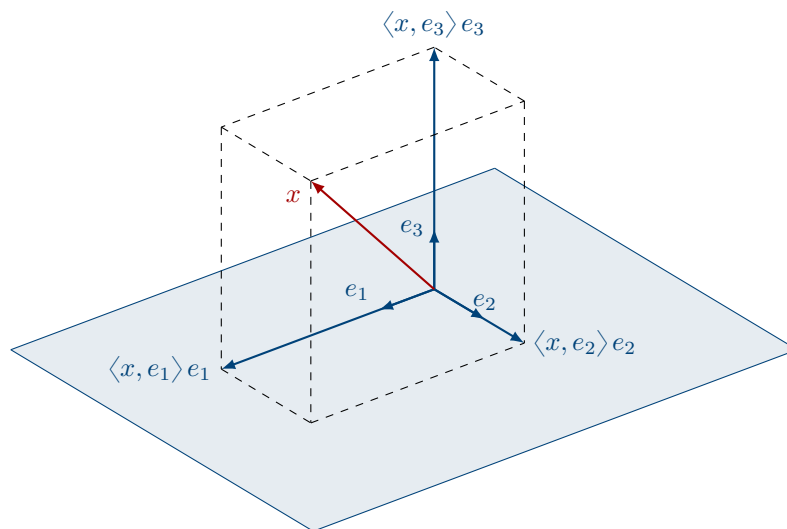
Théorème 37.45 - Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n .

Pour tout vecteur x de E , on a $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$: cela signifie que les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ sont $(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$.

Démonstration.

Soit $x \in E$. D'après le Lemme 37.35, $x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ est orthogonal à $e_1, \dots, e_n$, donc à tout vecteur de E . C'est donc le vecteur nul. $\square$

**Théorème 37.46 - Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.**

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n . Soit $x, y \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées respectives de x et de y dans $(e_1, \dots, e_n)$. Notons X et Y les matrices colonnes constituées des coefficients $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ respectivement. Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{X^\top X}.$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_j \langle e_i, e_j \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i \delta_{i,j} \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \\
 &= X^\top Y.
 \end{aligned}$$

L'expression de la norme s'en déduit immédiatement. $\square$

Remarque 37.47. Ce théorème montre que le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ est l'archétype de tous les produits scalaires des espaces euclidiens. Calculer le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ dans un espace euclidien abstrait revient à calculer le produit scalaire canonique des coordonnées des vecteurs x et y dans une base orthonormale quelconque.



ATTENTION



! Tout ceci est faux si la base n'est pas orthonormale!

37.4 Projection orthogonale sur un espace de dimension finie

Dans cette partie, E est un espace préhilbertien et V est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie non nulle.

37.4.1 Supplémentaire orthogonal

Définition 37.48 - Parties orthogonales.

Deux parties A et B de E sont dites **orthogonales** si et seulement si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B . Le cas échéant, on note $A \perp B$.

Théorème 37.49 - Existence et unicité du supplémentaire orthogonal.

L'espace $V^\perp$ est un supplémentaire de V dans E orthogonal à V et c'est même le seul. On l'appelle le **supplémentaire orthogonal** de V dans E .

Démonstration. • Il est clair que $F \perp F^\perp$.

- Soit $x \in V \cap V^\perp$. Alors $x \perp x = 0$, ce qui signifie que $\langle x, x \rangle = 0$ puis par séparation $x = 0_E$. Ainsi $V \cap V^\perp \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant vraie car $V \cap V^\perp$ est un sous-espace vectoriel, on obtient $V \cap V^\perp = \{0_E\}$.
- Soit $x \in E$. Comme V est de dimension finie, nous pouvons en donner une base orthonormale $(v_1, \dots, v_n)$, éventuellement vide. D'après le Lemme ,

$$x - \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle v_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)^\perp = V^\perp$$

donc $x \in V + V^\perp$. Ainsi $E \subset V + V^\perp$. L'autre inclusion étant vraie par définition de $V + V^\perp$, on a obtenu $V + V^\perp = E$ puis avec le point précédent $V \oplus V^\perp = E$.

- Il reste à démontrer que $V^\perp$ est le seul supplémentaire de V dans E orthogonal à V .
Soit V' un supplémentaire de V dans E orthogonal à V . On a $V' \subset V^\perp$ car $V \perp V'$.
Pour l'inclusion réciproque, fixons $x \in V^\perp$. Comme $E = V + V'$, il existe $v \in V$, $v' \in V'$ tels que $x = v + v'$. Donc

$$\begin{aligned}\langle v, v \rangle &= \langle v + v', v \rangle && \text{car } v' \in V^\perp \text{ et } v \in V \\ &= \langle x, v \rangle \\ &= 0 && \text{car } x \in V^\perp \text{ et } v \in V\end{aligned}$$

puis $v = 0$ par séparation. Ainsi, $x = v' \in V'$, ce qui prouve que $V^\perp \subset V'$.

Finalement, $V = V'$. □

Remarque 37.50. Il existe un seul supplémentaire orthogonal, mais plusieurs supplémentaires quelconques.

On a démontré que si V est un sous-espace vectoriel quelconque, alors V et $V^\perp$ sont supplémentaires dans E . Par contre, il n'est pas vrai en général que V et $V^\perp$ soient supplémentaires dans E (le théorème assure que c'est vrai si V est de dimension finie).

Exemple 37.51. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique, ce qui signifie qu'on travaille avec le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On veut montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

- Pour tous $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned}\langle A, S \rangle &= \text{tr}(A^\top S) \\ &= -\text{tr}(AS) && \text{on admet cette année que tr est linéaire} \\ &= -\text{tr}(SA) && \text{admis aussi pour l'instant} \\ &= -\text{tr}(S^\top A) \\ &= -\langle S, A \rangle \\ &= -\langle A, S \rangle\end{aligned}$$

donc $\langle A, S \rangle = 0$. Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, puis $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont en somme directe (cf. Remarque 37.50).

- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$M = \underbrace{\frac{M + M^\top}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})} + \underbrace{\frac{M - M^\top}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})}$$

donc $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

- Finalement, $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. On en déduit par unicité du supplémentaire orthogonal que $\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{R})^\perp$.

Corollaire 37.52 - Bi-orthogonal.

On a $V^{\perp\perp} = V$.

Démonstration. • L'inclusion $V \subset V^{\perp\perp}$ signifie que tout vecteur de V est orthogonal à tout vecteur de $V^\perp$, ce qui est évident par définition de $V^\perp$.

- Soit $x \in V^{\perp\perp}$. Comme en particulier $x \in E$ et que l'on sait que $V \oplus V^\perp = E$, on obtient qu'il existe un unique couple $(v, v') \in V \times V^\perp$ tel que $x = v + v'$. On a :

$$\begin{aligned}\langle v', v' \rangle &= \langle v + v', v' \rangle && \text{car } v \perp v' \\ &= \langle x, v' \rangle \\ &= 0 && \text{car } x \perp v'\end{aligned}$$

donc $v' = 0$ par séparation, puis $x = v \in V$. On a montré que $V^{\perp\perp} \subset V$.

- Finalement, on a obtenu par double inclusion que $V = V^{\perp\perp}$. □

Remarque 37.53. On a démontré que l'inclusion $V \subset V^{\perp\perp}$ était vraie pour une partie quelconque de E . En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas toujours vérifiée si V n'est pas un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice d'application 37.54. ☞ On se place dans $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le plan P d'équations $x + 2y + 3z + 4t = 0$ et $x - 3t = 0$. Déterminer le supplémentaire orthogonal de P .

➡

Corollaire 37.55 - Dimension de l'orthogonal en dimension finie.

Soit E un espace euclidien et V un sous-espace vectoriel de E . Alors

$$\dim(V^\perp) = \dim(E) - \dim(V).$$

Démonstration.

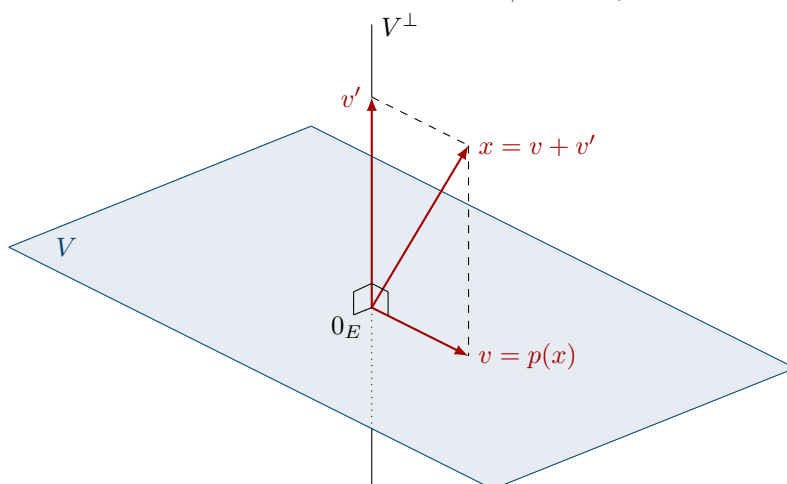
Puisque V est de dimension finie, on a $V \oplus V^\perp = E$. Comme E est de dimension finie, on en déduit $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E)$, d'où $\dim(V^\perp) = \dim(E) - \dim(V)$. $\square$

37.4.2 Projection orthogonale

Définition 37.56 - Projection orthogonale.

On appelle **projection orthogonale** sur V ou **projecteur orthogonal** sur V la projection sur V de direction $V^\perp$.

Comme V est de dimension finie, $E = V \oplus V^\perp$



Proposition 37.57 - Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de V . Soit $x \in E$. Notons $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur V . Alors

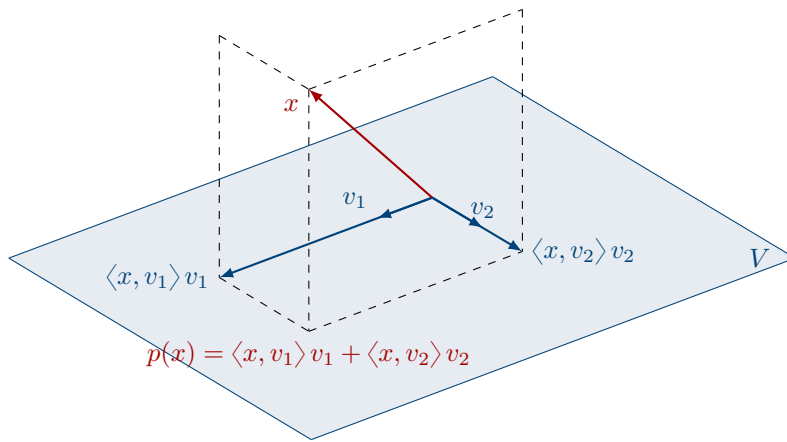
$$p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle v_k.$$

Démonstration.

On a

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle v_k + \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle v_k \right)$$

avec $\sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle v_k \in V$ et $x - \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle v_k \in V^\perp$ d'après le Lemme 37.35. □

**Proposition 37.58 - Caractérisation de la projection orthogonale.**

Soit $x, p(x) \in E$. Le vecteur $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur V si et seulement si

$$p(x) \in V \quad \text{et} \quad x - p(x) \in V^\perp.$$

Démonstration.

Comme V est de dimension finie, on a $E = V \oplus V^\perp$. Notons $(v, v') \in V \times V^\perp$ l'unique couple tel que $x = v + v'$.

- Supposons que $p(x)$ soit le projeté orthogonal de x sur V . Par définition $p(x) = v \in V$. De plus, $x - p(x) = v' \in V^\perp$.
- Supposons que $p(x) \in V$ et $x - p(x) \in V^\perp$. On remarque que

$$\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{v'}_{\in V^\perp} = x = \underbrace{p(x)}_{\in V} + \underbrace{x - p(x)}_{\in V^\perp}$$

donc par unicité de la décomposition dans une somme d'espaces supplémentaires, $v = p(x)$ ce qui signifie que $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur V . □

**Méthode 37.59. Déterminer un projeté orthogonal en pratique**

Pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel de dimension finie V , il y a deux méthodes.

1. Si on dispose d'une base orthonormale, on utilise la Proposition 37.57 qui donne directement le projeté.
2. Sinon, pour éviter la pénible construction d'une base orthonormale avec le procédé de Gram-Schmidt, on peut utiliser la Proposition 37.58.

I

Exemple 37.60. On note F le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\cos, \sin)$ de $\mathcal{C}^0([0; 2\pi], \mathbf{R})$. Déterminons le projeté orthogonal de Id sur F pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$.

Faisons quelques calculs préliminaires utiles pour la suite.

- $\|\cos\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$.
- De même, $\|\sin\|^2 = \pi$.
- $\langle \cos, \sin \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$, donc la famille $(\cos, \sin)$ est orthogonale.
- $\int_0^{2\pi} te^{it} dt = \left[t \times (-i)e^{it} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-i)e^{it} dt = -2i\pi$, donc $\langle \text{Id}, \sin \rangle = \int_0^{2\pi} t \sin(t) dt = \Im \left(\int_0^{2\pi} te^{it} dt \right) = \Im(-2i\pi) = -2\pi$.
- De même, $\langle \text{Id}, \cos \rangle = 0$.

Montrons maintenant comment utiliser les deux stratégies présentées dans la méthode pour déterminer le projeté demandé.

1. Première stratégie. On orthonormalise la base $(\cos, \sin)$ de F grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt. Cette famille étant déjà orthogonale, il ne reste qu'à la normaliser : $\left(\frac{\cos}{\|\cos\|}, \frac{\sin}{\|\sin\|} \right) = \left(\frac{\cos}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \right)$ est une base orthonormale de F . Le projeté orthogonal de Id sur F est finalement donné par la formule de la Proposition 37.57 :

$$\left\langle \text{Id}, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} + \left\langle \text{Id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} = -2 \sin.$$

2. Seconde stratégie. Notons $p(\text{Id})$ le projeté orthogonal de Id sur F et (λ, μ) ses coordonnées dans la base $(\cos, \sin)$ de F , de sorte que $p(\text{Id}) = \lambda \cos + \mu \sin$. Nous savons également (cf. Proposition 37.58) que $\text{Id} - p(\text{Id}) \in F^\perp$, ce qui fournit

$$0 = \langle \text{Id} - p(\text{Id}), \cos \rangle = \langle \text{Id} - \lambda \cos - \mu \sin, \cos \rangle = \langle \text{Id}, \cos \rangle - \lambda \|\cos\|^2 - \mu \langle \sin, \cos \rangle = -\lambda\pi$$

et

$$0 = \langle \text{Id} - p(\text{Id}), \sin \rangle = \langle \text{Id} - \lambda \cos - \mu \sin, \sin \rangle = \langle \text{Id}, \sin \rangle - \lambda \langle \cos, \sin \rangle - \mu \|\sin\|^2 = -2\pi - \mu\pi$$

donc $\lambda = 0$ et $\mu = -2$. Finalement, on retrouve $p(\text{Id}) = -2 \sin$.

Exercice d'application 37.61. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel $V = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, 1))$. Soit $a = (x, y, z)$. Déterminer $p_V(a)$.

➡

Exercice d'application 37.62. Dans $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, considérons $V = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$. Déterminer le projeté orthogonal sur V de $h : t \mapsto t^2$.

➡

Remarque 37.63. Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E et $(u_1, \dots, u_p)$ est son orthonormalisée de Gram-Schmidt, on a déterminé les expressions des u_k en fonction des e_i :

$$u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad u_k = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} \hat{u}_k \quad \text{où} \quad \hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i.$$

On remarque alors que $\hat{u}_k = e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)$, où $F_{k-1} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$.

37.4.3 Cas particulier des hyperplans

Définition 37.64 - Vecteur normal.

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et H un hyperplan de E .

Le sous-espace $H^\perp$ est une droite vectorielle dont tout vecteur non nul est appelé un **vecteur normal** à H .

Démonstration.

H est de dimension finie, donc $E = H \oplus H^\perp$. Comme de plus E est de dimension finie et que H est un hyperplan,

$$\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H) = \dim(E) - (\dim(E) - 1) = 1.$$

□

Proposition 37.65 - Projection sur un hyperplan.

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et H un hyperplan de E . Notons a un vecteur normal à H . Soit $x \in E$. Notons $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur H . Alors

$$p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

ou encore $p(x) = x - \langle x, a \rangle a$ si a est unitaire.

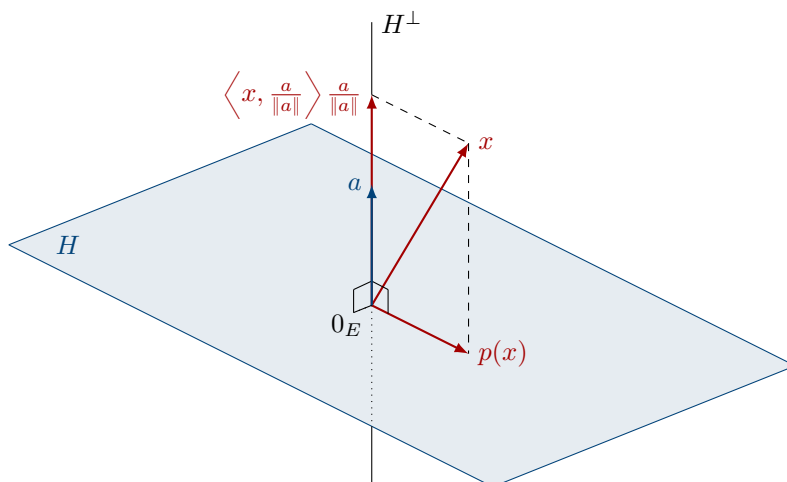
Démonstration.

La famille $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormale de $\text{Vect}(a)$, donc le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(a)$ vaut

$$\left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

On en déduit que son projeté orthogonal sur $H = \text{Vect}(a)^\perp$ vaut $x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$.

□



37.4.4 Distance à un sous-espace

Théorème 37.66 - Inégalité de Bessel.

Soit $x \in E$. Notons $p_V(x)$ le projeté orthogonal de x sur V .

$$\|p_V(x)\| \leq \|x\|.$$

Démonstration.

On a $x - p_V(x) \perp p_V(x)$ donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x - p_V(x) + p_V(x)\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2$$

puis $\|x\|^2 \geq \|p_V(x)\|^2$. La racine carrée étant une fonction croissante sur $\mathbf{R}_+$,

$$\|x\| \geq \|p_V(x)\|.$$

□

Lemme 37.67.

Soit $x \in E$. $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V vérifiant

$$\|x - p_V(x)\| = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

Démonstration.

Vérification de l'égalité. Soit $y \in V$. Montrons que $\|x - p_V(x)\| \leq \|x - y\|$.

On a $x - p_V(x) \in V^\perp$ et $y \in V$, ainsi que $p_V(x) \in V$. Donc $x - p_V(x) \perp p_V(x) - y$. Le théorème de Pythagore fournit alors :

$$\|x - p_V(x) + p_V(x) - y\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y\|^2$$

d'où

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - p_V(x)\|^2.$$

Les normes étant des réels positifs, on a donc $\|x - p_V(x)\| \leq \|x - y\|$. Ceci étant vrai pour tout $y \in V$ et comme $p_V(x) \in V$, on en déduit $\|x - p_V(x)\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$.

Unicité. Montrons maintenant que $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V ayant cette propriété. Soit $y_0 \in V$ vérifiant $\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$. Montrons que $y_0 = p_V(x)$.

On sait que $y_0, p_V(x) \in V$ donc $\|x - y_0\| \leq \|x - p_V(x)\|$ (par définition de y_0 et puisque $p_V(x) \in V$) et $\|x - p_V(x)\| \leq \|x - y_0\|$ (par la propriété démontrée avant sur $p_V(x)$ et puisque $y_0 \in V$). Par double inégalité,

$$\|x - p_V(x)\| = \|x - y_0\|.$$

Or

$$x - y_0 = \underbrace{x - p_V(x)}_{\in V^\perp} + \underbrace{p_V(x) - y_0}_{\in V}.$$

Puisque $x - p_V(x) \perp p_V(x) - y_0$, le théorème de Pythagore assure que

$$\|x - y_0\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y_0\|^2.$$

Or $\|x - y_0\| = \|x - p_V(x)\|$, donc $\|p_V(x) - y_0\| = 0$ puis $y_0 = p_V(x)$ ce qui prouve l'unicité. □

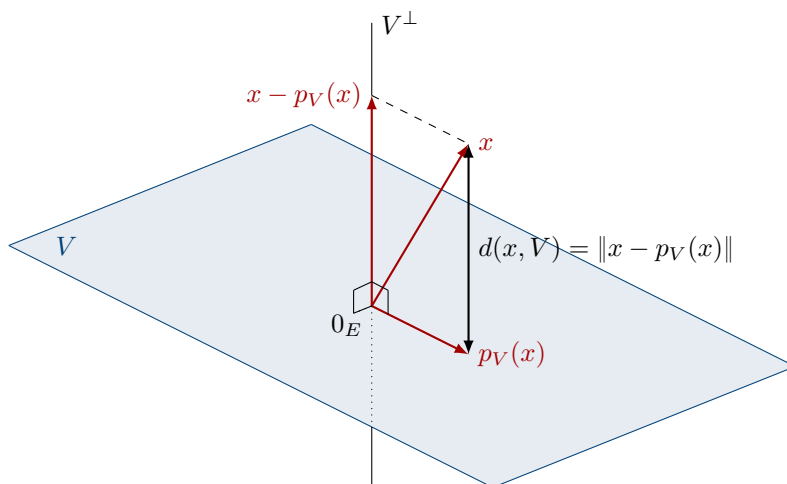
Définition 37.68 - Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

On appelle **distance** de x à V et on note $d(x, V)$ le réel :

$$d(x, V) = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

On a donc

$$d(x, V) = \|x - p_V(x)\|.$$



Exemple 37.69. On reprend l'Exercice d'application 37.62. La distance de $h : t \mapsto t^2$ au sous-espace V engendré par les fonctions $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto t$ est

$$d(h, V)^2 = \|h - p_V(h)\|^2 = \int_0^1 (h(t) - p_V(h)(t))^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{36 \times 5}.$$

Finalement, $d(h, V) = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

Exercice d'application 37.70. Dans $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, fixons $(a, b) \neq (0, 0)$ et

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by = 0\}.$$

Soit $u = (x_0, y_0)$. Calculer $d(u, D)$.

➡

Questions de cours

1. Donner la définition de produit scalaire.
2. Donner la définition d'espace préhilbertien, d'espace euclidien.
3. Donner le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$.
4. Donner la définition de norme euclidienne.
5. Donner la définition de vecteur unitaire.
6. Énoncer les propriétés de séparation et d'homogénéité pour une norme euclidienne.
7. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
8. Énoncer les inégalités triangulaires (première inégalité, cas d'égalité et seconde inégalité).
9. Soit $(x, y) \in E^2$. Compléter les identités remarquables suivantes :

$$\|x + y\|^2 = \dots \quad \|x - y\|^2 = \dots \quad \langle x + y, x - y \rangle = \dots$$

10. Énoncer l'identité de polarisation.
11. Définir la notion de vecteurs orthogonaux.
12. Donner la définition d'orthogonal d'une partie X de E .
13. Que vaut l'orthogonal de l'espace entier ?
14. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F et $x \in E$, alors compléter :

$$x \in F^\perp \iff \dots$$

15. Donner la définition de famille orthogonale (resp. orthonormale).
16. Peut-on affirmer qu'une famille orthogonale est libre ? Génératrice ?
17. Énoncer la propriété de Pythagore et le théorème de Pythagore.
18. Décrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
19. Donner les coordonnées de $x \in E$ dans une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E .
20. Si E est un espace préhilbertien et V est un sous-espace vectoriel de dimension finie, existe-t-il un supplémentaire orthogonal de V dans E ? Si oui, que peut-on dire de $V^{\perp\perp}$? De $\dim(V^\perp)$?
21. Définir la notion de projection orthogonale.
22. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel V de E . Notons p la projection orthogonale sur V . Donner l'expression de $p(x)$ en fonction de $v_1, \dots, v_n$.
23. Soit $x, p(x) \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p(x)$ soit le projeté orthogonal de x sur V .
24. Donner la définition de vecteur normal.
25. Donner la formule de projection sur un hyperplan.
26. Définir la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie ainsi que la formule permettant de la calculer à l'aide d'une projection.