

CHAPITRE 36

INTÉGRATION SUR UN
SEGMENT

36.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Dans toute cette section a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Définition 36.1 - Subdivision d'un segment.

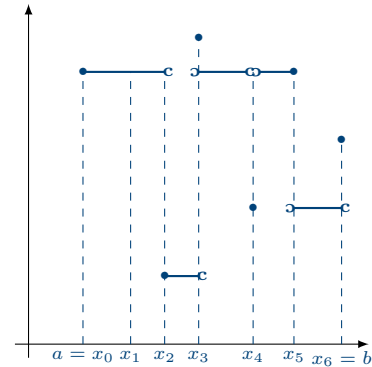
On appelle **subdivision** de $[a; b]$ toute famille finie $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $[a; b]$ vérifiant $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Définition 36.2 - Fonction en escalier.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a; b]$. On dit que la fonction f est **en escalier** si, et seulement si, il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ du segment $[a; b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n-1$). Une telle subdivision est dite **adaptée** à la fonction f . On note $\mathcal{E}([a; b])$ l'ensemble des fonctions en escalier.

Remarque 36.3.

1. Les valeurs de f aux points x_i n'ont pas d'importance.
2. Il n'existe pas qu'une subdivision adaptée à f : dans cet exemple, la subdivision obtenue en enlevant le point x_1 reste adaptée à f . De même, il est toujours possible d'ajouter des points à la subdivision. Pour une fonction en escalier f donnée, on peut former une subdivision minimale (qui contient le moins de points possibles) adaptée à f .
3. Pour deux fonctions en escalier sur $[a; b]$ données, il existe toujours une subdivision de $[a; b]$ adaptée aux deux fonctions. Cela permet de justifier que les combinaisons linéaires et les produits de fonctions en escalier sont des fonctions en escalier. De même, il est clair que si f est une fonction en escalier sur $[a; b]$, alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a; b]$.

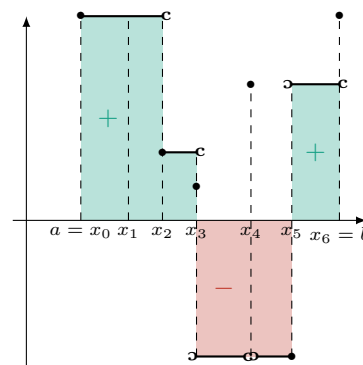
**Définition 36.4 - Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.**

Soit f une fonction en escalier sur $[a; b]$ et soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Il est clair que la quantité $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie. On l'appelle **intégrale** de f sur $[a; b]$ et l'on note $\int_{[a; b]} f$ le réel

$$\int_{[a; b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i.$$

Remarque 36.5.

1. Géométriquement, $(x_{i+1} - x_i)y_i$ est égal à l'aire du rectangle limité par l'axe (Ox) , les droites d'équations $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$ et la droite d'équation $y = y_i$, affectée du signe $+$ si ce rectangle est au dessus de (Ox) et du signe $-$ dans le cas contraire.
2. Pour se persuader que la somme ne dépend pas de la subdivision choisie, il suffit de considérer la subdivision « minimale » associée à f . Il est alors simple de voir que la somme ne change pas lorsque l'on rajoute un point à cette subdivision.



Exemple 36.6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_{[0; n+1]} [t]^2 dt = \sum_{k=0}^n k^2((k+1) - k) = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Proposition 36.7 - Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

1. **Linéarité** : pour toutes fonctions f et g en escalier sur $[a; b]$, et tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\int_{[a; b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a; b]} f + \mu \int_{[a; b]} g.$$

2. **Positivité** : si f est une fonction en escalier positive sur $[a; b]$, alors $\int_{[a; b]} f \geq 0$.

3. **Croissance** : si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a; b]$ et $f \leq g$, alors

$$\int_{[a; b]} f \leq \int_{[a; b]} g.$$

4. **Additivité des intervalles** : soit $c \in]a; b[$ et f une fonction en escalier sur $[a; b]$. Les restrictions de f à $[a; c]$ et $[c; b]$ sont des fonctions en escalier et

$$\int_{[a; b]} f = \int_{[a; c]} f + \int_{[c; b]} f.$$

Démonstration.

Il suffit à chaque fois de revenir à la définition avec une subdivision adaptée. □

36.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

36.2.1 Définition

Dans cette section et la suivante, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

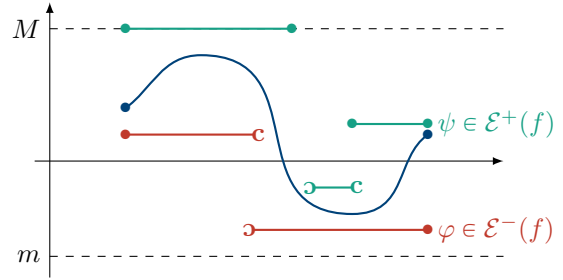
Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Puisque f est continue sur un segment, elle est bornée sur ce segment : il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M.$$

On note $\mathcal{E}^-(f)$ (resp $\mathcal{E}^+(f)$) l'ensemble des fonctions en escalier inférieures (resp. supérieures) à f sur $[a; b]$:

$$\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}_{[a; b]} : \forall x \in [a; b], \varphi(x) \leq f(x)\}$$

et $\mathcal{E}^+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}_{[a; b]} : \forall x \in [a; b], f(x) \leq \psi(x)\}.$



L'ensemble $\mathcal{E}^-(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante égale à m . De même $\mathcal{E}^+(f)$ est non vide car il contient la fonction constante égale à M .

Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$, on a $\varphi \leq M$, donc l'ensemble de nombres réels $\left\{ \int_{[a; b]} \varphi : \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$ est non vide et majoré par $M(b-a)$. Il possède donc une borne supérieure.

De même, pour tout $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$, on a $m \leq \psi$, donc l'ensemble de nombres réels $\left\{ \int_{[a; b]} \psi : \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$ est non vide et minoré par $m(b-a)$. Il possède donc une borne inférieure.

Or, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et tout $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$, on a $\varphi \leq \psi$ donc $\int_{[a; b]} \varphi \leq \int_{[a; b]} \psi$, donc

$$\sup \left\{ \int_{[a; b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} \leq \inf \left\{ \int_{[a; b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}.$$

On admet que la continuité de f implique que cette inégalité est en fait une égalité :

$$\sup \left\{ \int_{[a; b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} = \inf \left\{ \int_{[a; b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}.$$

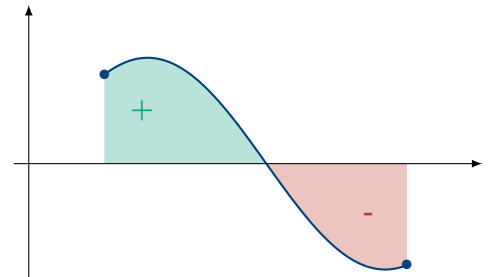
Définition 36.8 - Intégrale d'une fonction continue.

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a; b]$ qui minorent f est égale à la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a; b]$ qui majorent f . Leur valeur commune, notée $\int_{[a; b]} f$ est appelée **intégrale** de f sur $[a; b]$.

Remarque 36.9. 1. Il est clair qu'une fonction constante sur $[a; b]$ est à la fois en escalier et continue sur $[a; b]$.

Pour une telle fonction constante f , les deux définitions de l'intégrale de f sur $[a; b]$ (intégrale d'une fonction en escalier et intégrale d'une fonction continue) donnent la même valeur.

2. On admet que comme pour les fonctions en escalier, $\int_{[a; b]} f$ représente l'aire algébrique de la région du plan délimitée par l'axe (Ox) , la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, en affectant d'un signe $+$ les parties situées au dessus de l'axe (Ox) et d'un signe $-$ les parties situées en dessous.



Méthode 36.10. Justifier qu'une intégrale existe

On demande souvent de « justifier la bonne définition » d'une intégrale. Il s'agit de montrer que la fonction intégrée est continue (éventuellement par morceaux) ou prolongeable par continuité sur le segment concerné.

Exemple 36.11. L'intégrale $\int_{[0;1]} \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ est bien définie car la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0; 1]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 (car $\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$, donc $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$).

Exercice d'application 36.12. Justifier que l'intégrale $\int_{[0;\pi]} \frac{\text{sh}(t)^2}{1 - \cos(t)} dt$ est bien définie.

➡

36.2.2 Propriétés

Les propriétés listées dans cette partie découlent des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier. Certaines démonstrations sont techniques et ne sont pas exigibles. On ne les donnera pas dans ce cours.

Proposition 36.13 - Linéarité de l'intégrale.

L'application $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R})$.
 $f \longmapsto \int_{[a; b]} f$

Autrement dit, pour toutes fonctions f et g continues sur $[a; b]$, et tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\int_{[a; b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a; b]} f + \mu \int_{[a; b]} g.$$

Proposition 36.14 - Positivité de l'intégrale.

Si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, alors son intégrale sur $[a; b]$ est positive.
 Autrement dit,

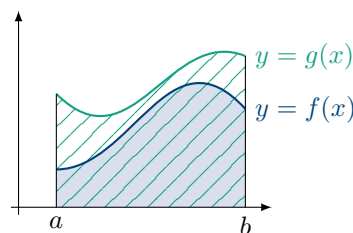
$$f \geq 0 \implies \int_{[a; b]} f \geq 0.$$

Démonstration.

La fonction identiquement nulle sur $[a; b]$ est une fonction en escalier qui minore f ce qui donne immédiatement le résultat. $\square$

Corollaire 36.15 - Croissance de l'intégrale.

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que $f \leq g$. Alors $\int_{[a; b]} f \leq \int_{[a; b]} g$.



Démonstration.

Exercice d'application 36.16. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note

$$J_n = \int_{[0;1]} \frac{x^n}{1+x^2} dx.$$

Déterminer, si elle existe, la limite de $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

➡



ATTENTION



Il est interdit de raisonner comme suit : pour $x \in]0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0;1]} \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0$. En effet, en règle générale,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a;b]} u_n dt \neq \int_{[a;b]} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n dt.$$

Corollaire 36.17 - Inégalité triangulaire.

Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$,

$$\left| \int_{[a;b]} f \right| \leq \int_{[a;b]} |f|.$$

Démonstration.

Ceci est une conséquence immédiate de l'inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$. □

Exercice d'application 36.18. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0;1]} t^n f(t) dt = 0$.

➡

Remarque 36.19. Ce résultat généralise celui obtenu dans l'Exercice d'application 36.16.

Proposition 36.20 - Additivité des intervalles.

Soit $c \in]a; b[$ et f une fonction continue sur $[a; b]$. On a $\int_{[a; b]} f = \int_{[a; c]} f + \int_{[c; b]} f$.

36.2.3 La notation $\int_a^b f(x) dx$

Définition 36.21 - Notation $\int_a^b f(x) dx$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , soit $a, b \in I$.

- (a) Si $a < b$, on note $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a; b]} f$.
- (b) Si $a = b$, on note $\int_a^b f(x) dx = 0$.
- (c) Si $a > b$, on note $\int_a^b f(x) dx = - \int_{[b; a]} f$.

- Remarque 36.22.**
1. La variable x qui apparaît dans l'intégrande est une variable muette. Les deux notations $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b f(t) dt$ représentent la même intégrale.
 2. On peut aussi noter $\int_a^b f$ l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Il faut alors faire attention de ne pas faire apparaître la variable d'intégration sous l'intégrale.



ATTENTION



Si $a > b$, $\int_a^b f(x) dx$ n'est pas l'intégrale de f sur un segment : certaines propriétés de l'intégrale ne « passent » pas avec cette notation, en particulier, les propriétés de positivité et de croissance ne sont pas conservées. En conséquence, dans la pratique, si $a > b$, il est conseillé d'utiliser $-\int_b^a f(x) dx$ à la place de $\int_a^b f(x) dx$ lorsqu'on veut majorer ou minorer une telle intégrale.

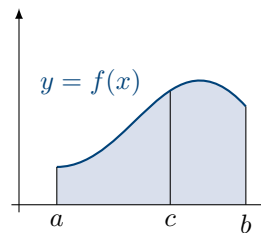
La propriété d'additivité des intervalles se prolonge avec cette notation.

Proposition 36.23 - Relation de Chasles.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a, b et c appartenant à I ,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

et ce quel que soit l'ordre des réels a, b et c .



À partir de maintenant, lorsque le segment $[a; b]$ apparaît, c'est que l'on a supposé que $a < b$.



Méthode 36.24. Déterminer le domaine de définition d'une fonction définie par une intégrale

On considère deux fonctions u et v définies sur I et f une fonction continue. On s'intéresse à la fonction φ définie sur I par

$$\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt.$$

Soit $x \in I$. Pour montrer que $\varphi(x)$ existe, il suffit de vérifier que f est continue sur le segment d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$.

En déterminant tous les $x \in I$ tels que $\varphi(x)$ existe, on obtient le domaine de définition de φ .

Exemple 36.25. Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$. On définit

$$G : x \mapsto \int_{-x}^x f(t) \, dt.$$

On veut montrer que G est bien définie sur $\mathbf{R}$.

$G(x)$ existe si f est continue sur le segment d'extrémités $-x$ et x .

- Si $x \geq 0$, on a f continue sur $[-x; x]$, donc $G(x)$ existe.
- Si $x < 0$, on a f continue sur $[x; -x]$, donc $G(x)$ existe.

Finalement, G est définie sur $\mathbf{R}$.

Exercice d'application 36.26. Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} e^u \ln(u+1) \, du$. Montrer que φ est définie sur $\mathbf{R}_+$.



Exemple 36.27. Considérons $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t}}$. On veut déterminer le domaine de définition de φ .

φ si $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur le segment d'extrémité x et $2x$.

- Si $x > 0$, f est continue sur $[x; 2x]$, donc $\varphi(x)$ existe.
- Si $x \leq 0$, f n'est pas définie sur $[2x; x]$, donc φ n'est pas définie en x .

Ainsi, φ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice d'application 36.28. Soit $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}$. Déterminer le domaine de définition de φ .

Indication : pour tout $t > 0$, $t - \ln(t) > 0$.

➡

36.2.4 Fonctions d'intégrale nulle

Remarque 36.29. L'intégrale sur $[a; b]$ de la fonction nulle sur $[a; b]$ vaut 0.

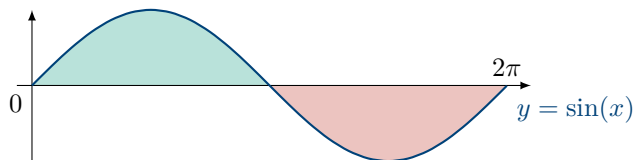
Théorème 36.30 - Stricte positivité de l'intégrale.

On suppose que f est une fonction continue sur $[a; b]$, de signe constant sur tout le segment $[a; b]$ et telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Alors f est la fonction nulle sur $[a; b]$.

Démonstration.

Remarque 36.31. Il est essentiel que la fonction soit de signe constant dans le Théorème 36.30 pour que la conclusion reste vraie. Par exemple, l'intégrale de $\sin$ entre 0 et 2π est nulle mais la fonction sinus n'est pas nulle sur $[0; 2\pi]$.



Remarque 36.32. Le résultat précédent s'appelle « stricte positivité de l'intégrale » car sa contraposée stipule par exemple que

$$f \geq 0 \text{ et } f \neq 0 \implies \int_a^b f(t) dt > 0.$$

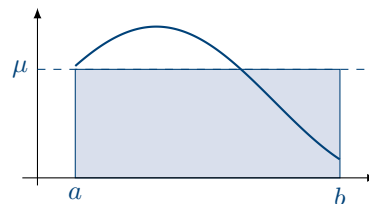
36.2.5 Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition 36.33 - Valeur moyenne d'une fonction continue.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque 36.34. La valeur moyenne μ de f est égale à la valeur de la fonction constante sur $[a; b]$ qui a la même intégrale que f sur $[a; b]$. Autrement dit, c'est la longueur du côté du rectangle dont l'autre côté est $[a; b]$ et qui a même aire que l'aire délimitée par la courbe représentative de f , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

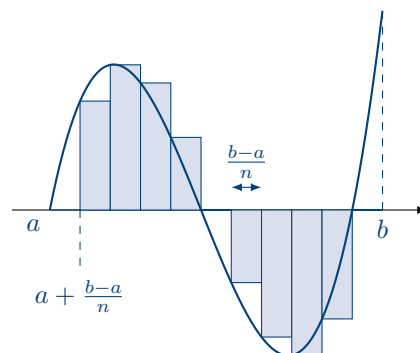


36.3 Sommes de Riemann

Définition 36.35 - Sommes de Riemann.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif. Si on partage le segment $[a; b]$ en n intervalles de même longueur à l'aide de la subdivision $\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, on appelle **somme de Riemann** correspondant à cette subdivision la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$



- Remarque 36.36.** 1. On peut également choisir pour somme de Riemann la somme $S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$, ce qui revient à choisir l'extrémité de droite de chacun des segments de longueur $\frac{b-a}{n}$ pour tracer les rectangles.
2. Dans chaque cas, une somme de Riemann est l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a; b]$.

Théorème 36.37 - Convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale.

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes de Riemann d'une fonction f continue sur $[a; b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a; b]$. Autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

En particulier, pour toute fonction f continue sur le segment $[0; 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Remarque 36.38. La convergence vers $\int_a^b f(x) \, dx$ a lieu aussi pour la suite (S'_n) définie dans la Remarque 36.36.

Démonstration (cas particulier où f est lipschitzienne sur $[a; b]$).

Remarque 36.39. La démonstration précédente inclut le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f' est continue sur le segment $[a; b]$, elle est donc bornée sur ce segment et il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \in [a; b]$, $|f'(x)| \leq M$. Puisque f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et que $|f'| \leq M$ sur $]a; b[$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est M -lipschitzienne sur ce segment.

Grâce aux sommes de Riemann, il est possible de calculer des valeurs approchées d'intégrales mais cette méthode n'est pas très performante (en termes de rapidité de convergence; une meilleure approche est donnée en complément à la fin de ce cours). Cependant, les sommes de Riemann sont utiles pour trouver la limite de certaines suites.

Exercice d'application 36.40. Déterminer la limite de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

➡

36.4 Calcul intégral

36.4.1 Théorème fondamental de l'analyse

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point.

Lemme 36.41.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$ et $\mu = \frac{1}{b-a} \int_{[a; b]} f$ sa valeur moyenne sur $[a; b]$. Alors il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Démonstration.

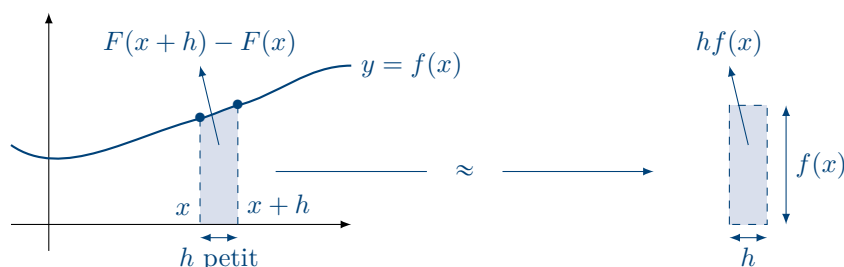
Théorème 36.42 - Théorème fondamental de l'analyse.

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ et a un point de I . La fonction F_a définie par :

$$\forall x \in I, \quad F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

est une primitive de f sur I . C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Remarque 36.43. Le théorème est fondamental car il établit un lien entre des notions apparemment totalement étrangères : un calcul d'aire et un calcul de primitive. Pour mieux comprendre ce lien, notons $F : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ et expliquons « avec les mains » d'où vient ce lien (ce qui suit n'est pas une preuve recevable!).



Avec les notations de la figure, pour tout t entre x et $x+h$, on a $f(t) \approx f(x)$. De plus, l'aire algébrique sous la courbe de f entre les abscisses x et $x+h$ vaut $F(x+h) - F(x)$ (exactement) et aussi approximativement $hf(x)$ d'après le principe « base $\times$ hauteur ». Donc $F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$ pour h petit, donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$. Ainsi F est dérivable en x avec $F'(x) = f(x)$.

Démonstration du Théorème 36.42.

Corollaire 36.44 - Liens entre primitives et intégrales.

1. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.
2. Soit f une fonction continue sur I , $a \in I$ et F une primitive de f sur I . Alors,

$$\forall x \in I, \quad \int_a^x f(t) \, dt = F(x) - F(a).$$

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, dt$.

Démonstration. 1. Évident avec le théorème précédent.

2. D'après la preuve du théorème précédent, pour tout $x \in I$, $F(x) = F_a(x) + F(a)$, c'est-à-dire $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt + F(a)$ et le résultat en découle immédiatement.
3. C'est une conséquence du point précédent, f étant une primitive de f' sur I . □

Notation 36.45. Dans un calcul d'intégrale, on utilise la notation $\left[F(t) \right]_a^b$ pour désigner la différence $F(b) - F(a)$. On écrit ainsi, si F est une primitive de f sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$



Méthode 36.46. Montrer qu'une fonction définie par une intégrale est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée

On considère deux fonctions u et v définies sur I et f une fonction continue. On s'intéresse à la fonction φ définie sur I par

$$\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt.$$

Puisque f est continue, elle admet une primitive F (en pratique on introduit F sans connaître son expression

explicite). On a alors, pour tout $x \in I$.

$$\varphi(x) = \left[F(t) \right]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Si u et v sont dérivables sur I , comme F est dérivable aussi sur I (en tant que primitive), on obtient avec la formule de dérivation d'une composée,

$$\varphi'(x) = v'(x) \cdot F'(v(x)) - u'(x) \cdot F'(u(x))$$

donc

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = v'(x) \cdot f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x))$$

(cette relation est à retrouver à chaque fois que vous l'utilisez !!). Vous noterez bien que dans la relation précédente, il n'y a des x que sur les bornes de l'intervalle, et surtout pas dans l'intégrande !

On a toujours F de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que primitive d'une fonction continue ($F' = f$ est continue). Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 36.47. On veut montrer que $G : x \mapsto \int_{-x}^x \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et déterminer $G'(x)$ pour tout réel x .

On a déjà montré que G est définie sur $\mathbf{R}$ (voir Exemple 36.25). De plus, $f : t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc elle admet des primitives. Notons F l'une d'entre elles. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$G(x) = \left[F(t) \right]_{-x}^x = F(x) - F(-x).$$

Puisque $x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et F également (en tant que primitive d'une fonction continue) alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = \frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice d'application 36.48. On considère $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t}}$. On a montré (voir Exemple 36.27) que φ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée.

➡

36.4.2 Intégration par parties

Cette méthode est basée sur la dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables.

Théorème 36.49 - Formule d'intégration par parties.

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I . Pour tous a et b appartenant à I ,

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Démonstration.

Démonstration faite en début d'année. □

La méthode d'intégration par parties est en général utile pour éliminer dans un produit une fonction qui n'est pas simple à primitiver (comme $\ln$, Arcsin , Arctan , etc.) et dont la dérivée s'intègre plus aisément. Elle permet aussi de calculer des intégrales dépendant d'un paramètre par récurrence (par exemple les intégrales de Wallis, un classique :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \, dx).$$

36.4.3 Changements de variables

Cette méthode est basée sur la formule de dérivation de la composée de deux fonctions.

Théorème 36.50 - Formule de changement de variables.

Soit f une fonction continue sur un intervalle J non vide et non réduit à un point à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J . Pour tous réels a et b éléments de I ,

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) \, dy.$$

Démonstration.

Démonstration faite en début d'année. □

36.4.4 Applications de la formule de changement de variable**Lemme 36.51.**

Soit a un réel strictement positif et soit f une fonction réelle continue sur $[-a; a]$. On a alors

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_0^a f(-x) \, dx.$$

Démonstration.

On pose le changement de variable $t = -x$. La fonction $\varphi : x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

variable	x	t
borne du haut	0	0
borne du bas	$-a$	a

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = -1$ donc $dt = -dx$ et $f(x)dx = -f(-t)dt$. Le théorème de changement de variable donne :

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 -f(-t) dt = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

Les variables d'intégrations étant muettes, on en déduit le résultat. $\square$

Proposition 36.52 - Parité et valeur moyenne d'une fonction sur un segment centré en 0.

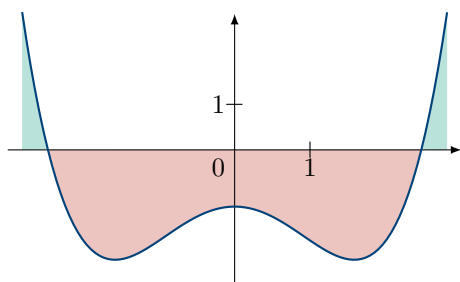
Soit a un réel strictement positif et soit f une fonction réelle continue sur $[-a; a]$.

1. Si f est une fonction impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ et donc la valeur moyenne de f sur $[-a; a]$ est nulle.
2. Si f est une fonction paire, alors

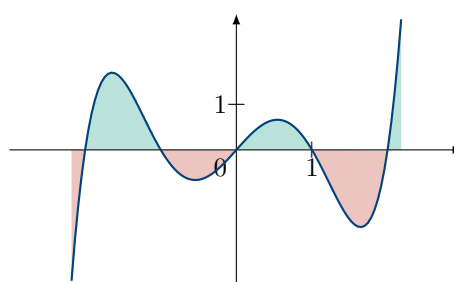
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx$$

et donc les valeurs moyennes de f sur $[-a; a]$, sur $[-a; 0]$ et sur $[0; a]$ sont égales.

Graphes d'une fonction paire



Graphes d'une fonction impaire



Démonstration. 1. Si f est impaire, alors pour tout $x \in [-a; a]$, on a $f(-x) = -f(x)$ donc en utilisant le lemme

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

ce qui donne avec la relation de Chasles

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

et la valeur moyenne $\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx$ de f sur $[-a; a]$ est nulle.

2. Si f est paire, alors pour tout $x \in [-a; a]$, on a $f(-x) = f(x)$ donc en utilisant le lemme

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

ce qui donne avec la relation de Chasles

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

et on a

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^0 f(x) dx$$

ce qui montre que les valeurs moyennes de f sur $[-a; a]$, sur $[-a; 0]$ et sur $[0; a]$ sont égales. $\square$

**Méthode 36.53.** Étudier la parité d'une fonction définie par une intégrale

On considère deux fonctions u et v définies sur I un intervalle centré en 0 et f une fonction continue. On s'intéresse à la fonction φ définie sur I par

$$\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

Pour montrer que φ est paire (ou impaire), on pourra transformer $\varphi(-x)$ à l'aide du changement de variable $u = -t$.

Exemple 36.54. Soit $G : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. La fonction G est définie sur $\mathbf{R}$ en tant que primitive d'une fonction continue.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Transformons $G(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ avec le changement de variable $u = -t$. On a $t = -u$ et $dt = -du$. De plus,

variable	t	u
borne du haut	$-x$	x
borne du bas	0	0

Ainsi, par changement de variable,

$$G(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \frac{-du}{\sqrt{1+(-u)^2}} = - \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -G(x).$$

Donc G est impaire.

Exercice d'application 36.55. On considère

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1+t^2}{\sqrt{t^4 - t^2 + 4}} dt$$

1. Justifier que G est définie sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer la parité de G .

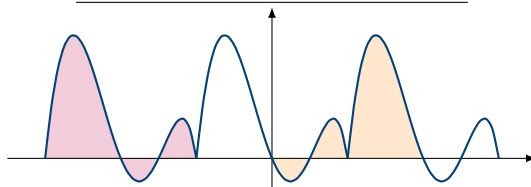
**Proposition 36.56 - Intégrale d'une fonction périodique.**

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Pour tous a, b réels, on a

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur tout segment de longueur T est la même. Une conséquence est que la valeur moyenne de f est aussi la même sur tout segment de longueur T .

Graphe d'une fonction périodique



Démonstration.

36.5 Formules de Taylor

36.5.1 La formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 36.57 - Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Pour tous réels a et b dans I ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Démonstration.

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note H_n la propriété : « pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et tous réels a et b dans I ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt ».$$

- H_0 est vraie : si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a déjà vu que $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$ pour tout a et b dans I .
- Soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons que H_n est vraie. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et soit a et b deux réels dans I . La fonction f est en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et l'on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

On intègre par parties l'intégrale obtenue (la fonction $f^{(n+1)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I) :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

ce qui montre que H_{n+1} est vraie.

- Le principe de récurrence permet de conclure. □

Un cas particulier à retenir est le suivant.

Corollaire 36.58 - Formule de Taylor avec reste intégral en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I .

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Exercice d'application 36.59. Montrer que pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.



36.5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est exacte mais le reste intégral n'est pas très maniable. Or il nous suffit souvent de connaître une majoration du reste. C'est ce que donne l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 36.60 - Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a, b) \in I^2$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et b , alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration.

Remarque 36.61. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un segment dans le théorème précédent, l'existence de M est assurée. On peut choisir en particulier $M = \sup_{[a; b]} |f^{(n+1)}|$.

Corollaire 36.62 - Inégalité de Taylor-Lagrange en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $x \in I$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités 0 et x , alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 36.63. L'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'obtenir des inégalités. Par exemple, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24}$ puis pour tout $u \in \mathbf{R}$, $|\sin^{(4)}(u)| = |\sin(u)| \leq 1$.

Exercice d'application 36.64. ♥ Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

➡

36.6 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle non vide et non réduit à un point.

Définition 36.65 - Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment.

Soit $f = \Re(f) + i\Im(f)$ une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a; b]$. On définit l'**intégrale** de f sur $[a; b]$ comme étant le nombre complexe défini par

$$\int_{[a; b]} f = \int_{[a; b]} \Re(f) + i \int_{[a; b]} \Im(f).$$

Toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles qui ne font pas intervenir la relation d'ordre de $\mathbf{R}$ restent vraies pour l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, en particulier les propriétés de linéarité et d'additivité des intervalles. Par contre la propriété de croissance n'a aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes.

On a tout de même le résultat suivant.

Théorème 36.66 - Inégalité triangulaire.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a; b]$. On a

$$\left| \int_{[a; b]} f \right| \leq \int_{[a; b]} |f|.$$

Autrement dit, le module de l'intégrale est inférieur ou égal à l'intégrale du module.

Démonstration.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a; b]$.

Si $\int_{[a; b]} f = 0$, le résultat est évident. On suppose maintenant que cette intégrale n'est pas nulle.

On écrit l'intégrale de f sous forme trigonométrique : $\int_{[a;b]} f = r e^{i\theta}$ de sorte que $r = \left| \int_{[a;b]} f \right|$.

On considère maintenant la fonction g définie par $g = e^{-i\theta} f$. Par la propriété de linéarité de l'intégrale,

$$\int_{[a;b]} g = e^{-i\theta} \int_{[a;b]} f = r.$$

Et donc l'intégrale de g est un nombre réel. Par ailleurs, on a

$$\int_{[a;b]} g = \int_{[a;b]} \Re(g) + i \int_{[a;b]} \Im(g),$$

et par unicité des parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe, on en déduit que

$$\int_{[a;b]} \Re(g) = r \quad \text{et} \quad \int_{[a;b]} \Im(g) = 0.$$

On peut maintenant majorer l'intégrale de la fonction réelle $\Re(g)$:

$$r = \left| \int_{[a;b]} \Re(g) \right| \leq \int_{[a;b]} |\Re(g)|.$$

Comme $|\Re(g)| \leq |g| = |f|$, on obtient par la propriété de croissance de l'intégrale d'une fonction réelle

$$\left| \int_{[a;b]} f \right| \leq \int_{[a;b]} |f|.$$

□

Théorème 36.67 - Formule d'intégration par parties.

Soit u et v deux fonctions à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I . Pour tous a et b appartenant à I ,

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Théorème 36.68 - Formule de changement de variable.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur un intervalle J non vide et non réduit à un point à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J (φ est donc une fonction à valeurs réelles!). Pour tous réels a et b éléments de I ,

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) \, dy.$$

Théorème 36.69 - Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Pour tous réels a et b dans I ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt.$$

36.7 Compléments : calculs approchés d'intégrales

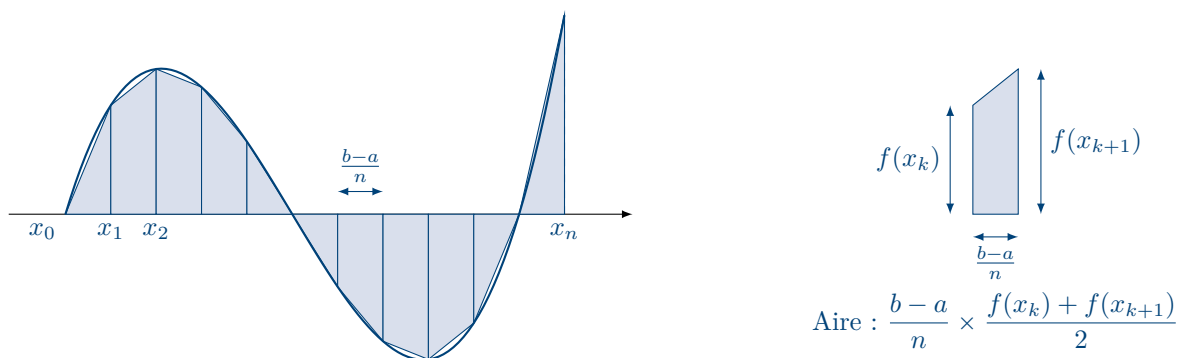
Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Notons, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

On a obtenu dans le Théorème 36.37 la convergence des sommes de Riemann associées à f vers l'intégrale de f sur $[a; b]$. Cette proposition donne une méthode (appelée **méthode des rectangles à gauche**) pour approcher une intégrale. Notons que dans la démonstration du Théorème 36.37, on a obtenu une majoration du reste dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_a^b f(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On constate que l'erreur commise pour approcher l'intégrale avec la méthode des rectangles à gauche est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

On peut faire mieux (c'est-à-dire obtenir une erreur plus petite) avec la **méthode des trapèzes**. L'idée, c'est qu'au lieu d'approximer f par une fonction constante sur $[x_k; x_{k+1}]$ (pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$), on l'approxime maintenant par une fonction affine et les rectangles sont remplacés par des trapèzes.



L'aire colorée peut s'obtenir par un petit calcul :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1})}{2} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{2} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right). \end{aligned}$$

On peut montrer (c'est un peu long) que l'approximation est plus précise. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a en effet :

$$\int_a^b f(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On peut coder les deux méthodes à l'aide de Python :

SCRIPT PYTHON

```
def rectangle(a:float, b:float, n:int, f) -> float:
    """
    Approche l'intégrale de f entre a et b par la méthode des rectangles, avec n points
    dans la subdivision
    """
    pas = (b-a)/n
    s = 0 # intégrale approchée
    for k in range(n):
        s = s + pas*f(a)
```

```

        a+=pas
    return s

def trapeze(a:float, b:float, n:int, f) -> float:
    """
    Approche l'intégrale de f entre a et b par la méthode des trapèzes, avec n points dans
    la subdivision
    """
    pas = (b-a)/n
    s = 0 # intégrale approchée
    for k in range(n):
        s = s + (f(a)+f(a+pas))*pas/2
        a+=pas
    return s

def nb_iter(a:float, b:float, precision:float, valeur_exacte:float, f) -> (int,int):
    """
    Renvoie le tuple qui contient le nombre de points nécessaires pour approcher l'
    intégrale de f entre a et b pour la méthode des rectangles et la méthode des
    trapèzes, avec une erreur de precision. valeur_exacte contient la valeur "exacte"
    de l'intégrale
    """
    n_rect = 1
    approchee = rectangle(a, b, n_rect, f)
    while (abs(approchee-valeur_exacte)>=precision):
        n_rect += 1
        approchee = rectangle(a, b, n_rect, f)

    n_trap = 1
    approchee = trapeze(a, b, n_trap, f)
    while (abs(approchee-valeur_exacte)>=precision):
        n_trap += 1
        approchee = trapeze(a, b, n_trap, f)

    return n_rect, n_trap

```

Testons :

CONSOLE

```

>>> carre = lambda x:x**2
>>> nb_iter(0, 1, 1e-4, 1/3, carre)
(5000, 41)

```

On obtient qu'il faut 5000 points pour approcher $\int_0^1 x^2 dx$ à 10^{-4} près avec la méthode des rectangles, tandis que 41 suffisent pour la méthode des trapèzes.

Questions de cours

1. Énoncer la propriété de linéarité de l'intégrale.
2. Énoncer la propriété de positivité de l'intégrale.
3. Énoncer la propriété de croissance de l'intégrale.
4. Énoncer l'inégalité triangulaire pour les intégrales.
5. Énoncer la relation de Chasles.
6. Énoncer la propriété de stricte positivité de l'intégrale.
7. Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann vers une intégrale. On explicitera les sommes de Riemann.
8. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
9. Soit u, v deux fonctions dérivables définies sur I et f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Compléter

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = \dots$$

10. Énoncer la formule d'intégration par parties.
11. Soit $f : [-a ; a] \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f est impaire, que peut-on dire de $\int_{-a}^a f(x) dx$? Même question si f est paire.
12. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral en 0.
13. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0.