CHAPITRE 35 ESPÉRANCE ET VARIANCE

Dans tout ce cours, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

35.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle

35.1.1 Définition et propriétés

Définition 35.1 - Espérance.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On appelle **espérance** de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Remarque 35.2 (♥). Avec les notations, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

Interprétation. $\mathbb{E}(X)$ est la moyenne des valeurs prises par X pondérée par les $\mathbb{P}(X = x)$.

Lorsque X dénote le gain obtenu d'une expérience aléatoire, $\mathbb{E}(X)$ est donc le gain que l'on peut espérer de l'expérience.

Définition 35.3 - Variable aléatoire centrée.

Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est dite **centrée**.

Remarque 35.4.

- L'espérance d'une variable aléatoire réelle ne dépend que de sa loi. En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et différentes (c'est-à-dire s'il existe au moins un $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \neq Y(\omega)$) mais que X et Y ont la même loi, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
- Si X s'exprime selon une unité, son espérance a la même unité.
- Si X est une variable aléatoire constante égale à $C \in \mathbf{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = C$.

Exercice d'application 35.5. Un dé à six faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1, 2 et 3 tombent avec probabilité $\frac{1}{6}$, les faces 4 et 5 avec probabilité $\frac{1}{12}$ et la face 6 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Quel numéro obtient-on en moyenne ?

➥

Lemme 35.6 - Formule d'atomisation.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Démonstration.
On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} \{\omega\} \Big).
\end{aligned}$$

Comme les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \Big(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} \mathbb{P}(\{\omega\}) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} x_k \mathbb{P}(\{\omega\}) \Big) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 35.7 - Principales propriétés de l'espérance.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. **Linéarité**. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. **Positivité**. Si $X \geqslant 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
3. **Croissance**. Si $X \geqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.
4. **Encadrement**. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant X \leqslant b$, alors $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.
5. **Inégalité triangulaire**. $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Démonstration.

Remarque 35.8. On reprend les notations de la proposition précédente. On rappelle que $X \geqslant Y$ signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$. De même, $a \leqslant X \leqslant b$ signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $a \leqslant X(\omega) \leqslant b$.

Remarque 35.9 (♨). $\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{R})$ étant un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, le point **1.** de la proposition précédente montre que

$$\mathbb{E}: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ X & \longmapsto & \mathbb{E}(X) \end{array}$$

est une forme linéaire.

Corollaire 35.10 - Obtenir une variable centrée à l'aide de l'espérance.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. En posant $m = \mathbb{E}(X)$, la variable aléatoire réelle $Y = X - m$ est centrée.

Démonstration.

Exercice d'application 35.11. Qu'obtient-on en moyenne quand on lance deux fois un dé à 6 faces et qu'on additionne les résultats obtenus ?

➥

Exemple 35.12 (♨). Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. ♥ Que vaut $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$?
2. Montrer que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ et que $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
3. Montrer la formule du crible de Poincaré pour trois événements :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap B).$$

➥

1. On a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = 0 \times \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 0) + 1 \times \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$.

2. Soit $\omega \in \Omega$. Déjà, $\mathbf{1}_A(\omega) \times \mathbf{1}_B(\omega) \in \{0,1\}$. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_B(\omega) = 1 &\Longleftrightarrow \mathbf{1}_A(\omega) = 1 \text{ et } \mathbf{1}_B(\omega) = 1\\ &\Longleftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \in B\\ &\Longleftrightarrow \mathbf{1}_{A\cap B}(\omega) = 1,\end{aligned}$$

d'où $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$. De même, $\mathbf{1}_{\overline{A}}(\omega) \in \{0,1\}$ et

$$\mathbf{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 \Longleftrightarrow \omega \notin A \Longleftrightarrow \mathbf{1}_A(\omega) = 0$$

d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

3. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\cup B\cup C} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A\cup B\cup C}} && \text{d'après } \mathbf{2.}\\ &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}} && \text{formule de Morgan}\\ &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_{\overline{B}}\mathbf{1}_{\overline{C}} && \text{d'après } \mathbf{2.}\\ &= 1 - (1-\mathbf{1}_A)(1-\mathbf{1}_B)(1-\mathbf{1}_C) && \text{d'après } \mathbf{2.}\\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C)\\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A\cap B} - \mathbf{1}_{A\cap C} - \mathbf{1}_{B\cap C} + \mathbf{1}_{A\cap B\cap C} && \text{d'après } \mathbf{2.}\end{aligned}$$

Avec la question **1.** et en utilisant la linéarité de l'espérance, on obtient finalement

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap C) - \mathbb{P}(B\cap C) + \mathbb{P}(A\cap B\cap B).$$

35.1.2 La formule de transfert

Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle $Y = g\circ X = g(X)$, où X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on peut commencer par chercher la loi de Y puis calculer

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y).$$

Mais connaissant la loi de X, il est bien plus efficace d'utiliser la formule suivante (et c'est donc ce qu'il faut faire !).

Théorème 35.13 - Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire réelle. Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Démonstration.

D'après la formule d'atomisation,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{\omega\in\Omega} g\circ X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} g\circ X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} g(x_k)\mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} \mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} \{\omega\}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x_k\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}(X=x_k).
\end{aligned}$$

□

Remarque 35.14 (♥). On reprend les notations précédentes. Si $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, alors

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}(X=x_k).$$

Exercice d'application 35.15. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

k	-4	-1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Déterminer l'espérance de $Y=X^2+2X$ sans calculer sa loi.

➥

Remarque 35.16. L'espérance de $g(X)$ ne dépend que de la loi de X.

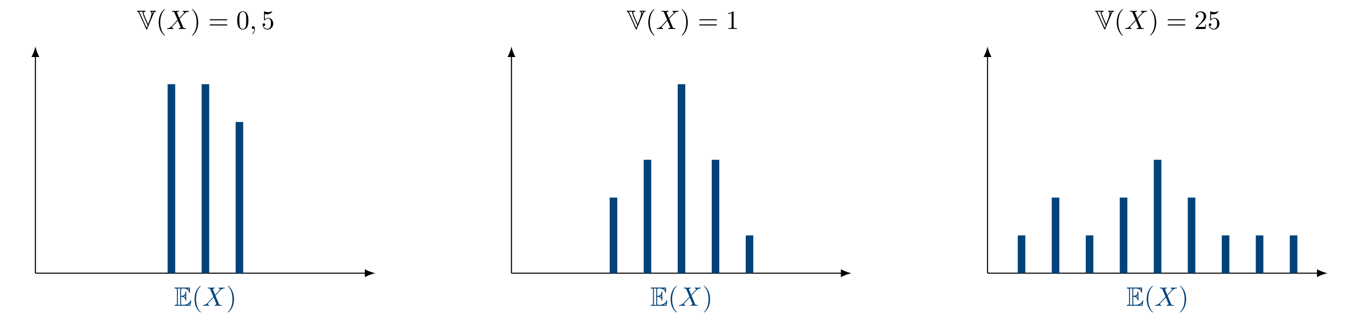
35.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

35.2.1 Variance

Définition 35.17 - Variance.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$. On appelle **variance** de X le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, défini par $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\Big((X-\mathbb{E}(X))^2\Big)$.

Interprétation. $\mathbb{V}(X)$ est la moyenne pondérée des carrés des distances de X à sa moyenne pondérée ; elle mesure la dispersion quadratique de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$.



Remarque 35.18.
1. Si X a une unité u, l'unité de $\mathbb{V}(X)$ est u^2.
2. Le nombre $\mathbb{V}(X)$ ne dépend que de la loi de X.
3. Si X est une variable aléatoire réelle constante, alors $\mathbb{V}(X) = 0$. En effet, on a alors $X = \mathbb{E}(X)$ et donc $\mathbb{V}(X)$ est l'espérance d'une variable réelle nulle.

Proposition 35.19 - Formule de Kœnig-Huygens.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Démonstration.

En pratique, on utilise jamais la définition mais toujours la formule de Kœnig-Huygens, qui nécessite peu de calculs (car on peut déterminer facilement $\mathbb{E}(X^2)$ via la formule de transfert).

Exercice d'application 35.20. On reprend l'Exercice d'application 35.15. Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

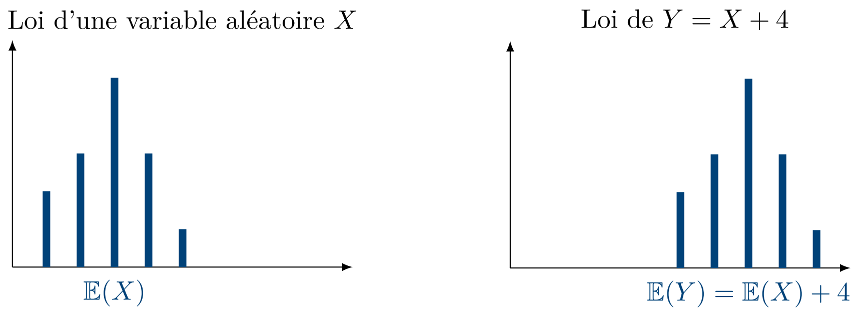
➥

Proposition 35.21 - Principales propriétés de la variance.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(X + \mu) = \mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

Remarque 35.22. Lorsqu'on rajoute une constante à une variable aléatoire réelle X, il est attendu que sa variance ne bouge pas, puisque ses valeurs sont distribuées de la même façon que celles de X par rapport à leur moyenne. Autrement dit, sa moyenne change, mais pas les écarts à la moyenne.



35.2.2 Écart-type

Définition 35.23 - Écart-type.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **écart-type** de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ et défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarque 35.24.
1. Si X est exprimée dans une certaine unité, l'écart-type de X a la même unité.
2. L'écart-type d'une variable aléatoire constante est nul.

Exemple 35.25. On reprend l'Exercice d'application 35.15. On a déterminé que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{9}{2}$, on en déduit que $\sigma(X) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Définition 35.26 - Variable aléatoire réduite.

Une variable aléatoire réelle de variance ou d'écart-type égal à 1 (c'est la même chose) est dite **réduite**.

Proposition 35.27 - Principales opérations sur l'écart-type.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. $\sigma(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$ et $\sigma(X + \mu) = \sigma(X)$.

Démonstration. **1.** $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$, donc $\sqrt{\mathbb{V}(X)} \geqslant 0$.

2. Soit $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda X+\mu) &= \sqrt{\mathbb{V}(\lambda X+\mu)}\\ &= \sqrt{\lambda^2 \mathbb{V}(X)}\\ &= |\lambda| \sqrt{\mathbb{V}(X)}\\ &= |\lambda|\, \sigma(X)\end{aligned}$$

□

Corollaire 35.28 - Obtenir une variable aléatoire centée réduite.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si $\sigma(X) \neq 0$, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Démonstration.

35.3 Espérance et variance des lois usuelles

35.3.1 Variables aléatoires constantes

Soit c un nombre fixé et X une variable aléatoire constante égale à c.

$$\mathbb{E}(X) = c \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$

35.3.2 Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

Proposition 35.29 - Espérance et variance pour une loi uniforme.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration.

Exercice d'application 35.30. ♨ Trouver l'espérance et la variance de Y, variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{5, 7, 9, 11, 13\}$.

➥

35.3.3 Variable aléatoire de Bernoulli

Proposition 35.31 - Espérance et variance pour une loi de Bernoulli.

Soit $p \in [0\,;\,1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On note $q = 1 - p$.

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = pq.$$

Démonstration.

Exemple 35.32 (♨). Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a $\mathbf{1}_A \sim \mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$, donc

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)).$$

35.3.4 Loi binomiale

Proposition 35.33 - Espérance et variance pour une loi binomiale.

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0\,;\,1]$. On note $q = 1-p$.

$$\mathbb{E}(Y) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = npq.$$

Démonstration.

Remarque 35.34 (♥). On reprend les notations de la démonstration. Pour la variance, on aurait pu faire une preuve bien plus rapide (similaire à celle de l'espérance). En effet, nous verrons plus loin (Corollaire 35.50) qu'avec l'indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on obtient :

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

Exercice d'application 35.35. Lorsqu'on lance simultanément cinq dés, combien en moyenne affichent 6 ?

➥

35.4 Couples de variables aléatoires

35.4.1 Formule de transfert vectorielle

La formule de transfert vue dans le Théorème 35.13 peut également s'appliquer à des couples de variables aléatoires. On obtient ainsi l'énoncé suivant.

Théorème 35.36 - Formule de transfert pour un couple de variables aléatoires.

Soit X et Y des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y).$$

Remarque 35.37. Le théorème s'étend de même à un n-uplet de variables aléatoires réelles.

Exercice d'application 35.38. On considère une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4. On tire successivement sans remise deux boules. On note U le premier numéro obtenu et V qui vaut 1 si le second numéro est supérieur au premier et 0 sinon.

1. Déterminer $\mathbb{E}(UV)$.
2. Donner les lois de U et de V et en déduire $\mathbb{E}(U+2V)$.

➥

35.4.2 Covariance de deux variables aléatoires réelles

Définition 35.39 - Covariance.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On appelle **covariance** de X et Y le réel

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\Big].$$

Proposition 35.40 - Formule de Kœnig-Huygens pour la covariance.

Soit X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration.

Proposition 35.41 - Principales propriétés de la covariance.

Soit X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. **Symétrie**. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
2. **Linéarité à gauche, à droite**. Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$ et toutes variables aléatoires réelles X_1, X_2, Y_1, Y_2,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) &= a \cdot \mathrm{Cov}(X_1, Y) + b \cdot \mathrm{Cov}(X_2, Y)\\ \mathrm{Cov}(X, aY_1 + bY_2) &= a \cdot \mathrm{Cov}(X, Y_1) + b \cdot \mathrm{Cov}(X, Y_2)\end{aligned}$$

3. **Positivité**. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

Démonstration. **1.** Évident.

2.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) &= \mathbb{E}((aX_1 + bX_2)Y) - \mathbb{E}(aX_1 + bX_2)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(aX_1Y + bX_2Y) - (a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2))\mathbb{E}(Y)\\ &= a\mathbb{E}(X_1Y) + b\mathbb{E}(X_2Y) - a\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y) - b\mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y)\\ &= a(\mathbb{E}(X_1Y) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y)) + b(\mathbb{E}(X_2Y) - \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y))\\ &= a \cdot \mathrm{Cov}(X_1, Y) + b \cdot \mathrm{Cov}(X_2, Y)\end{aligned}$$

La linéarité à droite s'obtient par symétrie.

3. Évident. □

Corollaire 35.42 - Variance d'une somme de v.a.r..

Soit X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

Démonstration.

Exercice d'application 35.43. Reprenons l'Exercice d'application 35.38. Déterminer $\text{Cov}(U, V)$.

➥

Interprétation. La covariance mesure la corrélation entre les variables X et Y. Si cette covariance est strictement positive, alors X et Y ont tendance à varier dans le même sens (ce que l'on peut attendre de variables qui mesurent le poids et la taille d'un individu pris au hasard : « plus la taille augmente, plus le poids augmente »). Si cette covariance est strictement négative, alors X et Y ont tendance à varier dans des sens contraires (ce que l'on peut attendre de la température extérieure et du nombre de manteaux vendus chaque jour).

Définition 35.44 - Variables aléatoires décorrélées.

On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont **décorrélées** lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Proposition 35.45 - Somme de variables aléatoires décorrélées.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si X et Y sont décorrélées alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser la relation

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

et utiliser $\text{Cov}(X, Y) = 0$. □

35.4.3 Espérance et variance pour des variables aléatoires indépendantes

Proposition 35.46 - Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration.
On utilise le théorème de transfert : $\mathbb{E}(XY) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\, \mathbb{P}(X = x, Y = y)\Big)$. Par indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)}\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\ \mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y)\\
&= \mathbb{E}(Y)\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\\
&= \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

□

Remarque 35.47. Autrement dit, si deux variables sont indépendantes, alors elles sont décorrélées. La réciproque est fausse (voir l'exemple qui suit).

Exemple 35.48. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$ et $Y=\mathbf{1}_{(X=0)}$.

- $\mathbb{E}(X) = -1\times\mathbb{P}(X=-1)+0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1) = -1\times\dfrac{1}{3}+0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{1}{3}=0$;
- $\mathbb{E}(Y) = 0\times\mathbb{P}(Y=0)+1\times\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(\mathbf{1}_{(X=0)}=1)=\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{1}{3}$;
- $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{(X=0)})=\mathbb{E}(0)=0$.

On a donc $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et pourtant X et Y ne sont pas indépendantes.

En effet, $\mathbb{P}(\{X=1 \text{ et } Y=1\})=\mathbb{P}(\{X=1 \text{ et } X=0\})=0$ et $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\neq 0$.

Corollaire 35.49 - Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.
C'est une conséquence directe des Propositions 35.45 et 35.46. □

Corollaire 35.50 - Espérance (variance) d'un produit (somme) de var indépendantes.

Soit X_1, X_2,... , X_n des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes. Alors,

$$\mathbb{E}(X_1X_2\cdots X_n)=\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\cdots\mathbb{E}(X_n)$$

et

$$\mathbb{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2)+\cdots+\mathbb{V}(X_n).$$

Démonstration.
Récurrence immédiate sur n en utilisant la Proposition 35.46 et le Corollaire 35.49. □

35.5 Inégalités probabilistes

Proposition 35.51 - Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration.

Remarque 35.52. Ce résultat n'est intéressant que si a est grand et plus précisément lorsque $a > \mathbb{E}(X)$.

Proposition 35.53 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ. Pour tout $d > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma^2}{d^2}.$$

Démonstration.

Remarque 35.54 (☕). Cette propriété n'a d'intérêt que si $d > \sigma$. Elle explique que la probabilité que X soit « loin » de sa moyenne est petite et décroît au delà de σ en $\mathrm{O}\big(1/d^2\big)$ (d étant un minorant de la distance de X à sa moyenne).

Exemple 35.55. Des élèves de PCSI rendent au cours d'une année 1550 interrogations de cours. À chaque fois, il y a 30% de chances que l'interrogation doive être recopiée par l'élève. On suppose que les recopies d'interrogations sont mutuellement indépendantes. On note X le nombre d'interrogations recopiées pendant l'année.

Cherchons un intervalle I tel que la probabilité que $X \in I$ soit d'au moins $0,95$.

On a $X \sim \mathscr{B}\left(1550, \dfrac{3}{10}\right)$. Notons

$$m = \mathbb{E}(X) = 1550 \times 0,3 = 465.$$

On a de plus, si σ est l'écart-type de X,

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{1550 \times 0,3 \times 0,7}.$$

On cherche donc a positif tel que

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant a) \leqslant 0,05.$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Résolvons $\dfrac{\sigma^2}{a^2} \leqslant 0,05$. Cette équation équivaut à $a \geqslant \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{0,05}} \approx 80,7$.

Donc, en prenant $a = 81$, on a que

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2} \leqslant 0,05$$

et par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}(|X - m| < 81) = 1 - \mathbb{P}(|X - m| \geqslant 81) \geqslant 0,95.$$

Donc la probabilité que le nombre d'interrogations recopiées soit strictement entre $465 - 81 = 384$ et $465 + 81 = 546$, c'est-à-dire soit dans $[385\,;\,545]$, est d'au moins $0,95$.

Exercice d'application 35.56. On dispose d'une pièce éventuellement truquée dont la probabilité d'obtention de Pile est notée p. Pour connaître p, on lance cette pièce n fois et on note F la fréquence d'apparition de Pile obtenue. Chercher une valeur de n à partir de laquelle la probabilité que F soit une approximation de p à 10^{-2} près est supérieure à $0,9$, c'est-à-dire à partir de laquelle $\mathbb{P}\left(|F - p| < 10^{-2}\right) \geqslant 0,9$.

➥

On peut généraliser la méthode de cet exercice et obtenir la **loi faible des grands nombres**.

Exemple 35.57 (*Loi faible des grands nombres* ♨). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi. On note m (resp. σ) la moyenne (resp. l'écart-type) de X_1. On pose enfin $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$. Montrons que

$$\mathbb{P}(|Y_n - m| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma^2}{nd^2}.$$

Comme elles suivent la même loi, les variables X_i ont toutes la même espérance m et le même écart-type σ.

Par linéarité de l'espérance, on a que

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)\right) = \frac{1}{n}(nm) = n.$$

De plus, par indépendance des X_i, on a que

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Donc $\sigma(Y_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n. Pour tout $d > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma(Y_n)^2}{d^2}$$

puis

$$\mathbb{P}(|Y_n - m| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma^2}{nd^2}.$$

Interprétation fréquentiste. Si l'on répète une expérience aléatoire quantitative un grand nombre de fois, en notant X_i le résultat de chaque expérience, alors Y_n représente la moyenne empirique de l'expérience.

La loi faible des grands nombres implique que pour tout $d > 0$, la probabilité que Y_n soit dans l'intervalle $]m - d\,;\, m + d[$ converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, on a montré que parmi tous les échantillons de valeurs possibles, ceux dont la moyenne s'éloigne de la probabilité sont rares, et que cette rareté relative s'accentue avec la taille de l'échantillon (donc mesurer la fréquence permet d'estimer raisonnablement la probabilité).

Par exemple, si on lance un grand nombre de fois un dé équilibré, la fréquence d'apparition du six doit se rapprocher de $\frac{1}{6}$. On propose ci-après une illustration de ce phénomène réalisée avec Python.

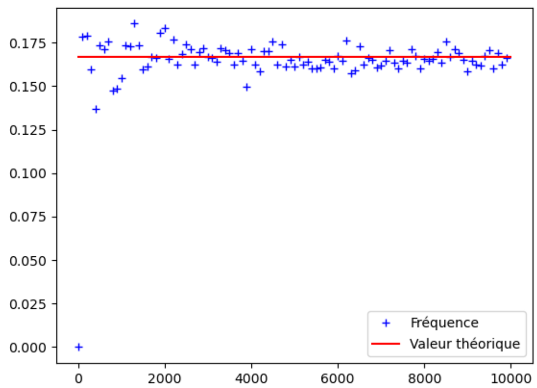
Script Python

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def freq_six(N:int) -> float:
    """ Fréquence d'apparition d'un six lorsqu'on lance N fois le dé
    """
    n_six = 0 # nombre de six
    for k in range(N):
        de = rd.randint(1,7) # simulation d'un lancer de dé
        if (de == 6):
            n_six += 1
    return n_six / N

def graphique(N:int):
    """ Illustration de la loi faible des grands nombres : la fréquence "converge" vers la
        probabilité théorique
    """
    X = [k for k in range(1, N+1, 100)]
    Y = [0 for k in range(1, N+1, 100)]
    cpt = 0
    for k in range(1, N+1, 100):
        Y[cpt] = freq_six(k)
        cpt += 1
    plt.plot(X, Y, '+b', label='Fréquence')
    plt.plot([0, N],[1/6, 1/6],'-r', label='Valeur théorique')
    plt.legend()
    plt.show()
```

L'appel `graphique(10000)` a renvoyé pour une simulation :



On constate que les fréquences obtenues pour de plus en plus de lancers se rapprochent de $\frac{1}{6}$.

Questions de cours

1. Donner la définition d'espérance d'une variable aléatoire réelle X.
2. Définir la notion de variable aléatoire centrée.
3. Donner la formule de linéarité de l'espérance.
4. Donner la propriété de positivité de l'espérance.
5. Donner la propriété de croissance de l'espérance.
6. Énoncer l'inégalité triangulaire pour l'espérance.
7. Énoncer la formule de transfert pour une variable aléatoire réelle.
8. Donner la définition de variable d'une variable aléatoire réelle X.
9. Énoncer la formule de Kœnig-Huygens.
10. Si X est une variable aléatoire réelle et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, compléter : $\mathbb{V}(\lambda X + \mu) =$
11. Donner la définition d'écart-type d'une variable aléatoire.
12. Définir la notion de variable aléatoire réduite.
13. Si X est une variable aléatoire réelle et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, compléter : $\sigma(\lambda X + \mu) =$
14. Donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire constante égale à $c \in \mathbf{R}$.
15. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Donner l'espérance et la variance de X.
16. Soit $p \in [0\,;\,1]$ et $X \sim \mathscr{B}(p)$. Donner l'espérance et la variance de X.
17. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [0\,;\,1]$ et $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Donner l'espérance et la variance de X.
18. Énoncer la formule de transfert pour un couple de variables aléatoires réelles.
19. Définir la covariance d'un couple de variables aléatoires réelles.
20. Énoncer la formule de Kœnig-Huygens pour la variance.
21. Donner la propriété de symétrie de la variance.
22. Donner la propriété de linéarité à gauche (resp. à droite) de la variance.
23. Donner la propriété de positivité de la variance.
24. Soit X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé fini. Compléter : $\mathbb{V}(X + Y) =$
25. Donner la définition de variables aléatoires décorrélées.
26. Soit X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé fini. Donner une condition suffisante pour que $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.
27. Soit X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé fini. Donner une condition suffisante pour que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
28. Quel lien existe t-il entre des variables aléatoires décorrélées et des variables aléatoires indépendantes ?
29. Énoncer l'inégalité de Markov.
30. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.