Chapitre 34 Conditionnement et indépendance

Dans tout ce chapitre, on note $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un univers probabilisé fini. Soit n un entier naturel non nul.

34.1 Probabilités conditionnelles

34.1.1 Définitions et propriétés

Exemple 34.1. Dans un grand lycée, il y a 200 élèves de PCSI, et trois langues sont proposées en LV1. La répartition est donnée dans le tableau ci-après.

LV1	Anglais	Allemand	Espagnol	Total
Hommes	55	18	17	90
Femmes	58	23	29	110
Total	113	41	46	200

On choisit un élève au hasard parmi les étudiants de PCSI. On se pose les questions suivantes.

1. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une femme germaniste ?
3. On croise une étudiante de PCSI dans le couloir. Quelle est la probabilité qu'elle soit germaniste ?
4. On sélectionne un élève au hasard parmi tous les germanistes. Quelle est la probabilité que cet étudiant soit une femme ?

On note Ω l'ensemble des élèves et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

1. Notons F l'événement « l'élève choisi est une femme ». On a alors $\mathbb{P}(F) = \dfrac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{110}{200}$.
2. Notons A l'événement « l'élève choisi apprend l'allemand ». On a $\mathbb{P}(A \cap F) = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{23}{200} = 0,115$.
3. Ici l'expérience aléatoire n'est plus la même que dans les deux questions précédentes. En effet, on *sait* que la personne sélectionnée est une femme, il faut donc calculer la probabilité qu'un élève suive la LV1 allemand *sachant* que c'est une femme. Il faut donc considérer la probabilité uniforme sur l'ensemble des femmes, qu'on note $\mathbb{P}_F$.
   La valeur cherchée est alors $\mathbb{P}_F(A) = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(F)} = \dfrac{23}{110}$.
4. Encore une fois, l'expérience aléatoire change, puisqu'on sait maintenant que l'étudiant est germaniste. On considère la probabilité uniforme $\mathbb{P}_A$ sur l'ensemble des étudiants germanistes.
   La valeur cherchée est alors $\mathbb{P}_A(F) = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{23}{41}$.

Définition 34.2 - Probabilité conditionnelle d'un événement.

Soit E un événement de probabilité non nulle de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Pour tout événement A, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant E** et on note $\mathbb{P}_E(A)$ (ou $\mathbb{P}(A \mid E)$) le nombre

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}.$$

Remarque 34.3. **1.** $A \mid E$ n'est pas un événement.

2. Il ne faut pas confondre $\mathbb{P}_E(A)$ et $\mathbb{P}(A \cap E)$ (relire l'Exemple 34.1 si ça n'est pas clair).

Proposition 34.4 - Application probabilité conditionnelle.

Soit E un événement de probabilité non nulle de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
L'application $\mathbb{P}_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_E(A) \end{array}$ est une probabilité sur Ω appelée la probabilité conditionnelle sachant E.

Démonstration.

Corollaire 34.5.

Soit E un événement de probabilité non nulle, soit A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. $\mathbb{P}_E(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_E(A)$.

2. $\mathbb{P}_E(B \backslash A) = \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.

3. $\mathbb{P}_E(A \cup B) = \mathbb{P}_E(A) + \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.

Démonstration.
Tout cela découle immédiatement du fait que $\mathbb{P}_E$ est une probabilité. □

Exercice d'application 34.6. Un homme rend visite a une famille qui compte deux enfants d'âges différents. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille. Il sonne et un des deux enfants ouvre.
On introduit les événements suivants :

- A : « l'aînée est une fille » ;
- B : « les deux enfants sont des filles » ;
- C : « il y a au moins une fille ».

1. On s'intéresse ici uniquement à l'enfant qui n'ouvre pas la porte.

(a) Proposer un univers Ω qui modélise cette expérience.

(b) Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ?

2. On s'intéresse maintenant aux deux enfants.

(a) Proposer un univers Ω qui modélise cette nouvelle expérience.

(b) Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B \cap C)$.

(c) C'est une fille qui ouvre à l'homme. Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ? Vous commencerez par écrire la probabilité demandée comme une probabilité conditionnelle avec A, B, C (les trois ne sont pas utiles).

(d) Le père rejoint sa fille à l'entrée et il dit à l'homme : « je vois que vous avez rencontré mon aînée ». Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ? Vous commencerez par écrire la probabilité demandée comme une probabilité conditionnelle avec A, B, C (les trois ne sont pas utiles).

➥

Remarque 34.7. Si un événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ est incompatible avec A, c'est-à-dire, si $A \cap B = \varnothing$, alors

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0}{\mathbb{P}(A)} = 0,$$

ce qui est intuitif : puisque B ne peut pas arriver en même temps que A, alors, si on suppose que l'événement A est réalisé, on est sûr à 100% que l'événement B n'est pas réalisé : $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1$, et $\mathbb{P}_A(B) = 1 - \mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 1 = 0$.

Notons également que, puisque $A \cap A = A$,

$$\mathbb{P}_A(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1,$$

ce qui est également intuitif : si on suppose que l'événement A est réalisé, alors on est sûr à 100% que l'événement A est réalisé.

34.1.2 Conditionnement

Pour évaluer la probabilité de $E \cap A$, il est souvent plus simple d'évaluer la probabilité de E (la « cause ») et la probabilité de A sachant E (la « conséquence ») puis d'utiliser (si $\mathbb{P}(E) \neq 0$) :

$$\mathbb{P}(E \cap A) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(A)$$

(qui est une réécriture de l'égalité qui définit $\mathbb{P}_E(A)$).

Remarque 34.8. L'égalité ci-avant n'a *a priori* de sens que si $\mathbb{P}(E) \neq 0$. Toutefois, on l'utilisera même si $\mathbb{P}(E) = 0$ (auquel cas $\mathbb{P}_E(A)$ n'existe pas), en convenant qu'alors $\mathbb{P}(E \cap A) = 0$. On parle d'**évaluation paresseuse** de l'égalité (cette notion existe aussi en informatique).

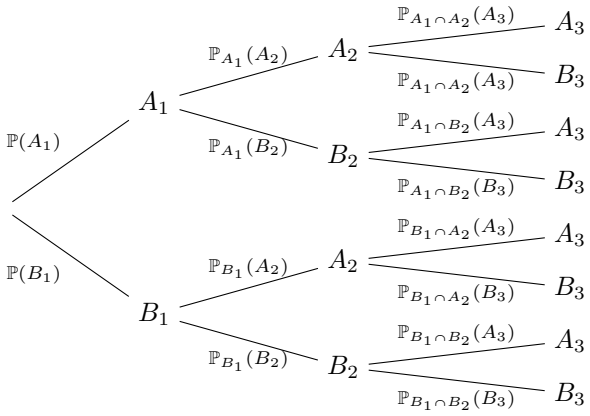
Exercice d'application 34.9. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne et on lui ajoute une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

On note N_i (pour $i \in \{1, 2\}$) l'événement « on tire une boule noire au i-ième tirage ».

➥

Méthode 34.10. *Construire un arbre de probabilité*

Dans de nombreuses situations, on peut rassembler les données de l'énoncé dans un **arbre de probabilité**. Ce qui apparaît au bout de chaque branche d'un tel arbre *doit être un événement*. Sur les branches, on lit des probabilités (simples au début, puis conditionnelles).



Vous pouvez (c'est même conseillé ☺) dessiner des arbres pour vous aider à modéliser une situation, mais cela ne vous dispense pas d'écrire explicitement les formules données après (qu'il faut nommer, après avoir rappelé les hypothèses).
On ne peut malheureusement pas toujours utiliser un arbre (penser à un arbre à n branches, difficile à représenter !) : il faut donc être capable d'utiliser les formules du cours sans arbre (c'est un des objectifs de cette année !).

Avec l'arbre précédent, pour calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$, il suffit donc de faire le produit des probabilités qui apparaissent sur les branches qui « passent » par A_1 et A_2. On peut généraliser et obtenir par exemple

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3).$$

En généralisant encore (pour un arbre à n branches par exemple, difficile à tracer mais cela arrive en pratique dans les exercices ☺) on obtient la formule suivante.

Proposition 34.11 - Formule des probabilités composées.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors les événements A_1, $A_1 \cap A_2$, $\dots$, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ sont de probabilité non nulle et

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose H_n : « $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$ ».

H_1 est l'égalité $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$, qui est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que H_n est vraie. Soit $A_1, \dots, A_{n+1}$ des événements. On note $E = A_1 \cap \dots \cap A_n$. Supposons que $\mathbb{P}(E) \neq 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E \subset A_1 \cap \dots \cap A_i$, donc $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_i) \geqslant \mathbb{P}(E) > 0$.

Ensuite, $\mathbb{P}(E \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(A_{n+1})$ par définition d'une probabilité conditionnelle. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\mathbb{P}(E \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \times \mathbb{P}_E(A_{n+1}).$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1}).$$

D'où H_{n+1}. Le principe de récurrence permet de conclure. □

Remarque 34.12. On tolère, dans les exercices, l'oubli de l'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ dans la formule précédente, on convenant que si $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = 0$, alors par évaluation paresseuse on aura $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 0$.

Exercice d'application 34.13. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient $2n$ boules dont n noires et n blanches, et on tire trois boules successivement. Avec quelle probabilité les tire-t-on dans l'ordre noire/blanche/noire si les tirages se font

1. sans remise ?
2. avec remise ?

➥

Remarque 34.14. On a $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{n}{2n-1} \times \dfrac{n-1}{2n-2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{8}$ ce qui traduit que dans l'exercice d'application précédent, si n devient grand, les tirages avec remise ou sans remise conduisent à des résultats similaires (ce qui est cohérent : si n est grand, la non-remise des boules tirées modifie à peine l'équilibre des couleurs au sein de l'urne).

34.1.3 Formule des probabilités totales

Lemme 34.15 - Formule de filtration.

Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_k).$$

Démonstration.

Théorème 34.16 - Formule des probabilités totales.

Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$$

en adoptant la convention que le produit $\mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$ vaut 0 si $\mathbb{P}(E_k) = 0$.

Remarque 34.17. La convention est nécessaire car si $\mathbb{P}(E_k) = 0$, alors $\mathbb{P}_{E_k}(A)$ n'est pas défini.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la formule de filtration puisque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A \cap E_k) = \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}_{E_k}(A)$. □

Exercice d'application 34.18. Soit $n, b \in \mathbf{N}^\star$. Une urne contient n boules noires et b blanches et on tire 2 boules successivement et sans remise. Avec quelle probabilité la deuxième boule tirée est-elle blanche ?

➥

Exercice d'application 34.19. Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil pouvant être réparé obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne au jour $n-1$ ($n \in \mathbf{N}^\star$), alors il a la probabilité $\dfrac{3}{5}$ de toujours fonctionner au jour n ;
- s'il est en panne au jour $n-1$ ($n \in \mathbf{N}^\star$), alors il a la probabilité $\dfrac{4}{5}$ d'être encore en panne au jour n.

On suppose que l'appareil est en état de marche au jour 0 et qu'après 100 jours il ne fonctionne plus. Pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche au jour n » et $p_n = \mathbb{P}(M_n)$.

1. Soit $n \in [\![0, 99]\!]$. Avec la formule des probabilités totales appliquée au SCE $\left\{M_n, \overline{M_n}\right\}$, démontrer soigneusement que :
$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}.$$
2. Déterminer l'expression de p_n pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$.

➥

34.1.4 Formule de Bayes

Dans ce paragraphe, on suppose qu'on a un système complet d'événements $\{E_1, \dots, E_n\}$ (les « causes ») et un événement A (une « conséquence »). On connaît les probabilités $\mathbb{P}(E_1), \dots, \mathbb{P}(E_n)$ ainsi que les probabilités de transitions $\mathbb{P}_{E_1}(A), \dots, \mathbb{P}_{E_n}(A)$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on cherche à savoir, lorsqu'on a observé que A s'est produit, avec quelle probabilité c'est l'événement E_k qui en est à l'origine ; autrement dit, on cherche à calculer $\mathbb{P}_A(E_k)$.

Exercice d'application 34.20. On reprend l'Exercice d'application 34.18. On observe qu'on a obtenu une boule blanche au deuxième tirage. Quelle est la probabilité qu'on en ait obtenu une aussi au premier tirage ?

➥

La formule qui suit généralise cette approche.

Proposition 34.21 - Formule de Bayes.

Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, tous les événements étant de probabilité non nulle. On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_A(E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}_{E_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)}.$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a par définition $\mathbb{P}_A(E_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap E_i)}{\mathbb{P}(A)}$ car $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Or $\{E_1, \dots, E_n\}$ est un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, donc la formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$. De plus, par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(A \cap E_i) = \mathbb{P}(E_i) \times \mathbb{P}_{E_i}(A)$. On obtient finalement la formule attendue. □

Exemple 34.22. Dans un pays, une maladie touche 3% de la population. Pour savoir si un individu est atteint par cette maladie, on dispose d'un test. Lorsque ce test est appliqué à un individu malade, le test renvoie un résultat positif dans 90% des cas. S'il est utilisé sur un individu sain, le test renvoie un résultat négatif dans 96% des cas.

Un individu se présente au centre de test. On considère Ω comme l'ensemble des individus. On considère de plus les événements suivants.

$$P : \text{« Le test est positif »} \quad \text{et} \quad M : \text{« La personne testée est malade »}.$$

Le résultat du test de l'individu se révèle positif. On cherche la probabilité qu'il soit effectivement malade.

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(M) = 0,03$, $\mathbb{P}_M(P) = 0,9$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P}) = 0,96$. Il faut calculer $\mathbb{P}_P(M)$. $\{M, \overline{M}\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, donc par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P)} = \frac{0,03 \times 0,9}{0,03 \times 0,9 + (1 - 0,03) \times (1 - 0,96)} \approx 0,41.$$

34.1.5 Loi conditionnelle

Théorème 34.23 - Loi de probabilité conditionnellement à un événement.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E. Soit B un événement de probabilité non nulle.
On appelle **loi de probabilité de X sachant** B, la probabilité définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(X \in A). \end{array}$$

Démonstration.
C'est bien une probabilité, car $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω. □

Exercice d'application 34.24. On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de X sachant $\{X \leqslant n\}$?

➥

34.2 Indépendance

34.2.1 Événements indépendants

Définition 34.25 - Indépendance de deux événements.

Soit A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On dit que les événements A et B sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
On note alors $A \perp\!\!\!\perp B$.

Remarque 34.26.

1. Si les événements A et B sont tous deux de probabilité non nulle, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).$$

   Autrement dit, pour des événements de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la connaissance du fait que l'un des événements est réalisé ne change pas la probabilité que l'autre événement se réalise.
2. L'indépendance de deux événements résulte souvent d'une hypothèse d'indépendance parmi les données du problème et n'est donc pas toujours à démontrer.
3. Il ne faut pas mélanger indépendance et incompatibilité. En fait, deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants : dans le cas contraire, on aurait $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0$, ce qui est absurde. Intuitivement, deux événements incompatibles sont dépendants l'un de l'autre puisque la place occupée par l'un ne peut pas être occupée par l'autre.

Exercice d'application 34.27. On lance indépendamment l'un de l'autre deux dés à 6 faces, un rouge et un vert. On considère A l'événement « le dé vert affiche le numéro 1 », B l'événement « le dé rouge affiche le numéro 2 » et C l'événement « les deux dés affichent le même numéro ». Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

➥

Proposition 34.28 - Indépendance et passage au contraire.

Soit A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si A et B sont indépendants, alors on a : $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Démonstration.

34.2.2 Indépendance (mutuelle) de plusieurs événements

Définition 34.29 - Indépendance (mutuelle) de plusieurs événements.

Soit A_1, A_2, ..., A_n des événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n sont **(mutuellement) indépendants** lorsque, pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Exemple 34.30 (♥). Avec trois événements A, B et C, ceux-ci sont mutuellement indépendants si, et seulement si,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \qquad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

Exercice d'application 34.31. Reprenons l'Exercice d'application 34.27 du lancer des deux dés. On définit les nouveaux événements suivants.

- A : « le dé vert donne un nombre pair » ;
- B : « le dé rouge donne un nombre impair » ;
- C : « les deux dés sont inférieurs ou égaux à 4 ».

Étudier l'indépendance mutuelle de A, B et C.

➥

ATTENTION

Les ensembles de deux éléments sont des parties finies de $[\![1, n]\!]$, donc

$$\boxed{\text{Indépendance (mutuelle)} \implies \text{indépendance deux à deux}}$$

mais la réciproque est fausse (voir l'exemple qui suit) !

Exemple 34.32. On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré. On définit les événements suivants.

- A : « le premier lancer donne un chiffre pair » ;
- B : « le deuxième lancer donne un chiffre impair » ;
- C : « l'un des lancer donne un chiffre pair, l'autre un chiffre impair ».

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants et que les événements B et C sont indépendants.

2. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

➥ On considère Ω comme l'ensemble des tirages possibles, donc $\text{Card}(\Omega) = 36$. On utilise la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1.
- On a, avec le principe additif (on compte les résultats pour le premier lancer puis le second) $\text{Card}(A) = 3 \times 6 = 18$ et $\text{Card}(B) = 6 \times 3 = 18$. De plus, en disjoignant les résultats où l'on commence par un pair et par impair, on obtient $\text{Card}(C) = 9 + 9 = 18$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

- $A \cap B = A \cap C = B \cap C$ et, avec le principe multiplication, $\text{Card}(A \cap B) = 3 \times 3 = 9$, ainsi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Donc les événements A, B et C sont indépendants deux à deux.

2. $A \cap B \cap C = A \cap B$, ainsi

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8},$$

donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Proposition 34.33 - Opérations sur des événements indépendants.

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (où $n \geqslant 2$) des événements (mutuellement) indépendants de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. En remplaçant des A_i par leur événement contraire, on obtient encore une famille d'événements (mutuellement) indépendants.

2. Chacun des A_i est indépendant de tout événement B qu'on peut former par intersections, réunions avec des événements A_k où $k \neq i$ ou leur contraire.

Démonstration. **1.** On va démontrer que $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont (mutuellement) indépendants (l'ordre n'a pas d'importance). Soit $p \in [\![2, n]\!]$ et $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ une partie de $[\![1, n]\!]$.

- 1er cas : $n \notin I$
  Comme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants, on a bien $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_p})$.

- 2e cas : $n \in I$. Disons que $i_p = n$. Il s'agit alors de montrer que

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) \times \mathbb{P}(\overline{A_n}).$$

  On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) &= \mathbb{P}\Big((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) \backslash A_n\Big) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) \times \mathbb{P}(A_n) \\
&\qquad \text{(par mutuelle indépendance des } A_1, \dots A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}})(1 - \mathbb{P}(A_n)) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}})\mathbb{P}(\overline{A_n})
\end{aligned}$$

  Ceci prouve que $A_1, \dots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont (mutuellement) indépendants.
  On peut alors remplacer A_{n-1} par son contraire et obtenir que les événements $A_1, \dots, A_{n-2}$, $\overline{A_{n-1}}, \overline{A_n}$ sont (mutuellement) indépendants. Et ainsi de suite (on peut le formaliser à l'aide d'une récurrence, c'est un exercice d'écriture).

2. Démonstration technique. Voyons sur un exemple. On suppose que A, B et C sont (mutuellement) indépendants et montrons que A et $(B \cup C)$ sont indépendants.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\
&= \mathbb{P}(A)\left(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\right) \\
&= \mathbb{P}(A)\left(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)\right) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).
\end{aligned}$$

  Donc A et $B \cup C$ sont indépendants. □

Méthode 34.34. *Utiliser l'indépendance mutuelle pour simplifier les calculs*

L'indépendance mutuelle (de lancers d'objets par exemple) est très utile pour simplifier les calculs ! Si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n).$$

L'indépendance n'est pas toujours bien précisée, mais elle a lieu par exemple quand on lance plusieurs fois un même objet, qu'on fait un tirage avec remise, etc.

Exercice d'application 34.35. On fait n lancers indépendants d'une pièce de monnaie. À chaque lancer, la probabilité de faire Face est la même : c'est le nombre $p \in]0\,;1[$. Calculer la probabilité d'avoir obtenu Pile pour la première fois au dernier lancer.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note F_k l'événement « le k-ième lancer est Face ».

➥

34.2.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition 34.36 - Variables aléatoires indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque,

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Remarque 34.37. Avec les notations de la définition, on a X et Y indépendantes lorsque pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Proposition 34.38 - Caractérisation des variables indépendantes.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y),$$

alors X et Y sont indépendantes.

Démonstration.

Remarque 34.39. Les variables X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x)$. Autrement dit, il y a indépendance de X et Y lorsque le fait de savoir que $Y = y$ n'apporte rien sur la probabilité de $\{X = x\}$.

Exercice d'application 34.40. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{U}(\{0,1\})$. On pose $Z = |X - Y|$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Montrer que X et Z sont indépendantes.

➥

Comme pour les événements, on utilise souvent l'indépendance pour simplifier les calculs.

Exercice d'application 34.41. On lance un dé équilibré à six faces 2 fois et on note X_1 (resp. X_2) la face obtenue au premier (resp. second) lancer. Avec quelle probabilité obtient-on les deux fois une face impaire ?

➥

34.2.4 Indépendance (mutuelle) de plusieurs variables aléatoires

Si on reprend l'Exercice d'application 34.40, on a montré que X, Y et Z sont deux à deux indépendantes.

On peut remarquer que malgré cette indépendance deux à deux, on a

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0, Z = 1) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{8}$$

donc

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0, Z = 1) \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}(Z = 1).$$

La notion précédente d'indépendance ne permet donc pas de travailler avec ces trois variables simultanément. Pour cela, il faut une notion d'indépendance plus contraignante : l'indépendance mutuelle.

Définition 34.42 - Indépendance (mutuelle) de plusieurs variables aléatoires.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour tout $A_1 \in X_1(\Omega), \dots, A_n \in X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont (mutuellement) indépendants.

Proposition 34.43 - Caractérisation de l'indépendance mutuelle de variables aléatoires.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Pour tous $B_1 \in X_1(\Omega), \dots, B_n \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in B_n).$$

(iii) Pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Démonstration.

- L'implication **(i)** $\implies$ **(ii)** est immédiate.
- L'implication **(ii)** $\implies$ **(iii)** est immédiate puisque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\{x_k\}$ est un événement de $X_k(\Omega)$.
- Montrons que **(iii)** $\implies$ **(ii)**. Supposons **(iii)** vraie. Soit $B_1 \in X_1(\Omega)$, ..., $B_n \in X_n(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \in B_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in B_n) &= \left(\sum_{x_1 \in B_1} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \right) \dots \left(\sum_{x_n \in B_n} \mathbb{P}(X_n = x_n) \right) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\
&= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) && \text{d'après } \textbf{(iii)} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n} \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \right) \\
&= \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n\big) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n).
\end{aligned}$$

- Montrons enfin que **(ii)** $\implies$ **(i)**. Supposons **(ii)** vraie. Soit $A_1 \in X_1(\Omega), \dots, A_n \in X_n(\Omega)$. Soit I une partie de $[\![1, n]\!]$. Nous devons montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\} \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Posons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = \begin{cases} A_i & \text{si} \quad i \in I \\ X_i(\Omega) & \text{si} \quad i \notin I \end{cases}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\} \right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\} \right) && \text{par définition des } A_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i) && \text{d'après } \textbf{(ii)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i) && \text{par définition des } A_i
\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 34.44. Soit $p_1, \dots, p_n \in [\![0, 1]\!]$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs $p_1, \dots, p_n$. Quelle est la loi de $X_1 \dots X_n$?

➥

Proposition 34.45 - Application de fonctions à des variables aléatoires indépendantes.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables (mutuellement) indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $g_1, \dots g_n$ des applications respectivement définies sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$.
Alors les variables aléatoires $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont (mutuellement) indépendantes.

Démonstration.

Exemple 34.46. L'énoncé de la proposition précédente a l'air compliqué, en réalité il s'applique assez facilement. Par exemple, si X, Y, Z sont indépendante, alors $\mathrm{e}^X + 1, 2Y - 1, Z^2$ sont aussi indépendantes.

On peut encore « généraliser » ce résultat.

Proposition 34.47 - Lemme des coalitions.

Soit m et n deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables (mutuellement) indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et f et g des applications définies sur des ensembles contenant respectivement $X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.
Les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont alors aussi indépendantes.

Démonstration.
Admis. □

Remarque 34.48. Dans l'énoncé précédent, il y a deux coalitions (car il y a deux fonctions qui interviennent). On peut généraliser à autant de coalitions que nécessaire.

On pourra par exemple retenir que toutes variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_k$, définies à partir de $X_1, \dots, X_n$ de sorte que chaque X_i n'intervient que dans au plus une des variables aléatoires Y_j, sont (mutuellement) indépendantes.

Exemple 34.49. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Les variables aléatoires $X + Y^2$ et $3Z + 1$ sont mutuellement indépendantes.

34.3 Loi binomiale

Définition 34.50 - Loi binomiale.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0\,;\,1]$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ suit une **loi binomiale** de paramètres n et p lorsque les deux points suivants sont vérifiés.

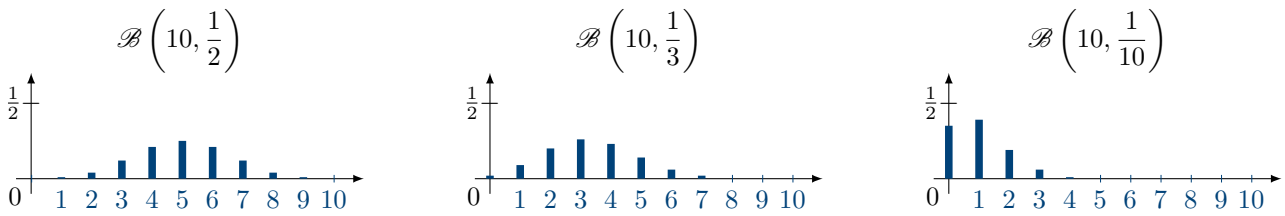
1. $[\![0, n]\!] \subset X(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q = 1 - p$.

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Démonstration.

Remarque 34.51. Une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 1 et p suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemple 34.52. On a par exemple :



Exercice d'application 34.53. ♥ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [0\,;\,1]$, $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Déterminer la loi de $Y = n - X$.

➥

Proposition 34.54 - Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ (mutuellement) indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;\,1]$.
La variable aléatoire $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Démonstration.
On a clairement $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On note $E_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = k\}$. Avec cette notation

$$\{S = k\} = \{X_1 + \cdots + X_n = k\} = \bigcup_{(x_1, \ldots, x_n) \in E_k} \{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$$

Les événements intervenant dans cette réunion sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1, X_2=x_2,\dots,X_n=x_n) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_2=x_2)\cdots\mathbb{P}(X_n=x_n) && \text{par indépendance mutuelle} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_1=x_2)\cdots\mathbb{P}(X_1=x_n) && \text{car } X_1,\dots,X_n \text{ ont la même loi.}
\end{aligned}$$

Dans chacun des termes de la somme précédente, on trouve un produit de facteurs valant $\mathbb{P}(X_1=0)$ ou $\mathbb{P}(X_1=1)$. Puisque $x_1+\cdots+x_n=k$, il y a exactement k fois le facteur $\mathbb{P}(X_1=1)$ et $n-k$ fois le facteur $\mathbb{P}(X_1=0)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=1)^k\mathbb{P}(X_1=0)^{n-k} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= p^k(1-p)^{n-k} \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} 1 \\
&= p^k(1-p)^{n-k}\,\mathrm{Card}(E_k) \\
&= \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

et donc S suit une loi binomiale de paramètres n et p. □

Situation d'apparition de la loi binomiale. Une variable de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ compte le nombre de succès dans n expériences aléatoires indépendantes où la probabilité de succès de chaque expérience est p.

Dans le langage des urnes et des boules, une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$ compte le nombre de boules d'un type donné que l'on obtient lorsqu'on fait des tirages avec remise (pour garder les mêmes proportions à chaque tirage).

Méthode 34.55. *Schéma de rédaction - justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale*

On pourra retenir que quand une variable aléatoire compte quelque chose, il y a de forte chance qu'une loi binomiale soit cachée derrière ! Pour cela, il faut tout de même que deux conditions soient remplies : qu'on répète la même expérience (donc que la probabilité p de succès à chaque étape ne change pas) et que les répétitions soient indépendantes. Pour bien justifier, on pourra retenir le schéma suivant :

> X compte les succès de l'épreuve de Bernoulli dont le succès est « ... » et dont la probabilité de succès est p. Cette épreuve est répétée n fois de manière indépendante, donc $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Un « succès » correspond à ce que l'on compte. Si après un tirage de boules dans une urne X compte les boules numérotées 42, alors un succès de l'expérience est « obtenir une boule numérotée 42 ».

Exemple 34.56.

1. On considère une urne qui contient une proportion p de boules rouges et $(1-p)$ de boules blanches. On effectue n tirages indépendants avec remise dans cette urne. On note X le nombre de boules rouges obtenues à l'issue des n tirages.

   X compte les succès de l'épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir une boule rouge » et dont la probabilité de succès est p. Cette épreuve est répétée n fois de manière indépendante, donc $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

2. On joue n fois à Pile ou Face avec la même pièce donnant « Pile » avec probabilité p. On note X le nombre de fois où on a obtenu « Pile ».

   X compte les succès de l'épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir Pile » et dont la probabilité de succès est p. Cette épreuve est répétée n fois de manière indépendante, donc $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Exercice d'application 34.57. On lance 5 fois un dé équilibré à six faces dont deux blanches et quatre noires. Avec quelle probabilité obtient-on exactement 3 fois une face noire ?

➥

Questions de cours

1. Donner la définition de probabilité conditionnelle d'un événement.
2. Énoncer la formule des probabilités composées.
3. Énoncer la formule de filtration.
4. Énoncer la formule des probabilités totales.
5. Énoncer la formule de Bayes.
6. Soit A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{P}(Omega), \mathbb{P})$. Définir « A et B sont indépendants ».
7. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{P}(Omega), \mathbb{P})$. Définir « $A_1, \dots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants ».
8. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(Omega), \mathbb{P})$. Définir « X et Y sont indépendantes ».
9. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(Omega), \mathbb{P})$. Donner une condition suffisante pour que X et Y soient indépendantes avec $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
10. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(Omega), \mathbb{P})$. Définir « $X_1, \dots, X_n$ sont (mutuellement) indépendants ».
11. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(Omega), \mathbb{P})$. Donner une condition suffisante pour que $X_1, \dots, X_n$ soient (mutuellement) indépendantes avec $\mathbb{P}(X = x_1), \dots, \mathbb{P}(X = x_n)$ pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$.
12. Énoncer le lemme des coalitions.
13. Définir la loi binomiale.
14. Que peut-on dire d'une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes ?