# CHAPITRE 33 PROBABILITÉS ET VARIABLES ALÉATOIRES

## 33.1 Univers, événements et variables aléatoires

### 33.1.1 Vocabulaire probabiliste

Le concept d'**expérience aléatoire** n'est pas mathématique à proprement parler. On appelle ainsi toute expérience (expérience matérielle ou expérience de pensée) susceptible a priori de résultats différents quand on la répète.

On considère qu'il est possible d'associer à une expérience aléatoire un ensemble qui contient tous les résultats possibles de l'expérience, ce qui nous permet de donner la définition suivante.

**Définition 33.1 - Issue, univers.**

1. On appelle **issue** d'une expérience aléatoire un résultat possible de l'expérience.
2. On appelle **univers** d'un expérience aléatoire l'ensemble des issues. On le notera souvent $\Omega$.

**Exercice d'application 33.2.** Donner des univers possibles pour les expériences aléatoires suivantes.

1. On lance un dé à six faces (sous-entendu, les faces portent les numéros 1,2,3,4,5 et 6, et on considère que le résultat de l'expérience est le numéro qui apparaît sur la face du dessus).
2. On lance une pièce de monnaie.
3. On met en route une machine et on considère le nombre total de jours de fonctionnement de cette machine avant qu'elle ne tombe en panne.
4. On tire deux boules successivement et avec remise dans une urne contenant des boules noires et des boules blanches.

➥

**Remarque 33.3.** Dans le troisième exemple, l'univers n'est pas un ensemble fini. Cette année, on ne s'intéressera qu'aux expériences pouvant être modélisées par un univers fini.

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire peuvent être appréhendés chacun en tant qu'élément de l'univers $\Omega$, mais ce qui nous intéresse, ce sont plutôt des ensembles de résultats.

**Définition 33.4 - Événement, réalisation d'un événement, événement élémentaire.**

1. On appelle **événement** tout sous-ensemble de l'univers $\Omega$.
2. On dit qu'un événement $A$ est **réalisé** lorsqu'à la fin d'une expérience aléatoire, le résultat de l'expérience appartient à $A$.
3. On appelle **événement élémentaire** tout événement constitué d'une seule issue.

**Remarque 33.5.** Un événement élémentaire est donc un singleton.

**Exemple 33.6.** On lance un dé à 6 faces, et on associe à l'expérience l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On considère l'événement $A =$« on obtient un nombre pair ». On a ainsi $A = \{2, 4, 6\}$, qui est bien une partie de $\Omega$.

**Exercice d'application 33.7.** On lance successivement deux dés à six faces. Un univers possible pour cette expérience est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ : pour chaque couple de $\Omega$, le premier (resp. le second) entier est le résultat du premier (resp. second) dé. Écrire toutes les issues contenues dans les événements suivants :

1. $A$ : « la somme des points obtenus vaut 7 » ;
2. $B$ : « le plus petit des nombres obtenus est 3 ».

➥

**Définition 33.8 - Événement certain, événement impossible.**

1. L'événement $\Omega$ est appelé l'événement **certain**.
2. L'événement $\varnothing$ est appelé l'événement **impossible**.

**Remarque 33.9.** L'événement certain est toujours réalisé et l'événement impossible n'est jamais réalisé.

**Exemple 33.10.** Lors d'un lancer de dé à 6 faces, l'événement $A =$« obtenir 6 » est l'événement élémentaire $A = \{6\}$, l'événement $B =$« obtenir un nombre à la fois pair et strictement inférieur à 2 » est l'événement impossible $B = \varnothing$, et l'événement $C =$« obtenir un nombre pair ou un nombre impair » est l'événement certain $C = \Omega$.

**Définition 33.11 - Opérations sur les événements.**

Soit $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$.

1. $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin A\}$ est l'**événement contraire** de $A$.
2. $A \cup B$ est l'événement « $A$ **ou** $B$ ».
3. $A \cap B$ est l'événement « $A$ **et** $B$ ».
4. $A \backslash B = \{\omega \in A \,|\, \omega \notin B\}$ est l'événement « $A$ **mais pas** $B$ ».

**Exercice d'application 33.12.** Dans le lancer de deux dés à 6 faces (avec $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$), on considère à nouveau les événements

- $A =$« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et
- $B =$« le plus petit des nombres obtenu est 3 ».

Donner les issues des événements $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \backslash B$.

➥

**Exercice d'application 33.13.** Soit $n \geqslant 3$ un entier. On lance une pièce $n$ fois successivement. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $F_k$ l'événement « on obtient Face au $k$-ème lancer ». Décrire les événements suivants à l'aide des $F_k$.

1. $A$ : « on obtient Pile au premier lancer ou au troisième lancer » ;
2. $B$ : « on obtient Pile au premier lancer et au troisième lancer » ;
3. $C$ : « on obtient Pile au moins une fois au cours des $n$ lancers » ;
4. $D$ : « on n'obtient jamais Pile » ;
5. $E$ : « on obtient deux Faces consécutifs au cours des $n$ lancers ».

➥

**Définition 33.14 - Événements incompatibles.**

Soit $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$. On dit que $A$ et $B$ sont **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsque $A \cap B = \varnothing$.

**Remarque 33.15.** Deux événements incompatibles sont deux événements qui ne peuvent pas être tous les deux réalisés au cours de l'expérience aléatoire.

**Exemple 33.16 (♥).** Un événement $A$ et son contraire $\overline{A}$ sont incompatibles.

**Exemple 33.17.** Dans le lancer de deux dés à 6 faces, les événements $A =$« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et $C =$« les deux numéros obtenus sont pairs » sont incompatibles car $A \cap C = \varnothing$.

**Définition 33.18 - Système complet d'événements.**

Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ des événements d'un univers $\Omega$. On dit que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est **un système complet d'événements** (SCE) lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. les événements $E_k$ (où $k \in [\![1, n]\!]$) sont deux à deux incompatibles ;
2. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \Omega$.

**Remarque 33.19.** C'est la traduction probabiliste de la notion de recouvrement disjoint.

Si aucun des événements $E_k$ n'est vide, la notion de système complet d'événements coïncide avec celle de partition de $\Omega$.

**Exemple 33.20 (♥).** **1.** Un événement $A$ et son contraire $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.

**2.** L'ensemble $\Big\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}\Big\}$ des événements élémentaires de l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est aussi un système complet d'événements.

**Exemple 33.21.** Lançons deux dés à six faces. L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

- $E_1$ : « la somme des deux dés est impaire ».
- $E_2$ : « les deux dés sont pairs ».
- $E_3 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$.

On a $E_1$ =« un dé est pair, l'autre est impair » $E_3$ =« les deux dés sont impairs ». Ainsi, un événement quelconque se trouve soit dans $E_1$, soit dans $E_2$, soit dans $E_3$ ce qui montre que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{3} E_k$. De plus, on ne peut pas être à la fois dans deux ensembles simultanément, donc les $E_k$ sont disjoints deux à deux. Finalement, $(E_1, E_2, E_3)$ forme un système complet d'événements.

**Exercice d'application 33.22.** On lance deux dés. Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, notons $A_i$ l'événement « le premier dé affiche $i$ ». Les événements $A_1, \dots, A_6$ forment-ils un système complet d'événements ?

➥

**Exercice d'application 33.23. ♥** Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Une épreuve consiste à lancer $n$ fois une pièce et on note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k$ l'événement « le $k$-ième lancer est un Pile ».

**1.** L'ensemble $\{P_1, \dots, P_n\}$ est-il un système complet d'événements ?

**2.** Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $A_k$ l'événement « le premier Pile apparaît au $k$-ième lancer ». L'ensemble $\{A_1, \dots, A_n\}$ est-il un système complet d'événements ?

**3.** On note aussi $A_\infty$ l'événement « Pile n'apparaît jamais ». L'ensemble $\{A_\infty, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est-il un système complet d'événements ?

➥

### 33.1.2 Variables aléatoires

Dans toute la suite de ce cours, $\Omega$ désigne un univers fini.

La plupart du temps, les événements qu'on manipule sont définis par des grandeurs, numériques ou non, qu'on appelle des variables aléatoires. Par exemple, quand on lance une pièce 10 fois successivement, l'événement « on a obtenu exactement trois Piles » peut être écrit « $N = 3$ » si on note $N$ le nombre de Piles obtenus. Ce nombre $N$ n'est pas a priori une constante. Il dépend du lancer qu'on effectue et doit donc être vu comme une fonction.

**Définition 33.24 - Variable aléatoire, variable aléatoire réelle.**

1. On appelle **variable aléatoire** définie sur $\Omega$ à valeurs dans un ensemble $E$ toute application définie sur $\Omega$ et à valeur dans $E$.
2. On appelle **variable aléatoire réelle (v.a.r.)** toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}$.

En dépit de son nom, une variable aléatoire sur $\Omega$ n'est ni variable, ni aléatoire. C'est une fonction et en tant que telle, elle envoie tout élément de $\Omega$ sur un élément parfaitement fixé de $E$. L'aléatoire fera irruption quand nous attribuerons à tout événement de $\Omega$ une probabilité.

**Exemple 33.25.** 1. On considère l'expérience qui consiste à lancer 6 fois une pièce de monnaie équilibrée et à noter la succession des Piles/Faces. Dans ce cas, $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^6$. On considère l'application

$$X : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega & \longmapsto & \text{nombre de « Piles » dans } \omega \end{array}$$

$X$ est une variable aléatoire réelle qui donne donc le nombre de « Piles » obtenus lors de l'expérience. Par exemple, $X((\text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face})) = 3$.

2. On considère l'expérience qui consiste à lancer trois dés distinguables à 6 faces. Ici, $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$. On considère la variable aléatoire $S$ qui à toute issue de l'expérience associe la somme des trois nombres obtenus.

$$S : \begin{array}{ccc} [\![1, 6]\!]^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega = (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z \end{array}$$

**Définition 33.26 - Univers image d'une variable aléatoire.**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ et à valeurs dans un ensemble $E$. On appelle **univers image** de $X$ l'ensemble de toutes les valeurs prises par $X$. On rappelle qu'on le note $X(\Omega)$.

**Remarque 33.27.** 1. $X(\Omega)$ représente l'ensemble des valeurs prises par $X(\omega)$ lorsque $\omega$ parcourt $\Omega$ : $X(\Omega) = \{X(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\}$.

2. Vu que $\Omega$ est un ensemble fini, il en est de même pour $X(\Omega)$.

**Exercice d'application 33.28.** Donner l'univers image pour les variables aléatoires $X$ et $S$ de l'Exemple 33.25.

➥

**Notation 33.29.** Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ à valeurs dans l'ensemble $E$. Soit $A$ une partie de $E$ et $a \in E$.

- On note $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par :
$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$
- On note $(X = a)$ ou $\{X = a\}$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par
$$(X = a) = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}.$$
- Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note $(X \leqslant a)$ ou $\{X \leqslant a\}$ l'événement
$$(X \leqslant a) = X^{-1}(]-\infty; a]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}.$$

**ATTENTION**

Comme dans la théorie des ensembles, ici, $X^{-1}$ ne désigne pas la bijection réciproque de $X$, qui n'est pas nécessairement bijective. $X^{-1}$ tout seul n'a donc pas de sens, seul $X^{-1}(A)$ (image réciproque de $A$ par $X$) où $A$ est un ensemble est licite.

**Exercice d'application 33.30.** On considère à nouveau la variable $S$ de l'Exemple 33.25. Donner toutes les issues des événements $(S = 3)$, $(S = 4)$ et $(S \geqslant 17)$.

➥

**Proposition 33.31 - Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.**

Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec les $x_i$ deux à deux distincts. Les événements $(X = x_1)$, ..., $(X = x_n)$ forment un système complet d'événements.

*Démonstration.*

## 33.2 Probabilités

Pour modéliser une expérience aléatoire, on associe à chaque événement la « chance » qu'il se réalise.

### 33.2.1 Définition

**Définition 33.32 - Probabilité.**

On appelle **probabilité** sur $\Omega$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0\,;\,1]$ qui vérifie :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
2. pour tous événements $A$ et $B$ **incompatibles**, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

**Définition 33.33 - Probabilité d'un événement.**

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\Omega$. Pour tout événement $A$, le nombre $\mathbb{P}(A)$ est appelé la **probabilité de** $A$.

**Définition 33.34 - Espace probabilisé.**

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\Omega$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé fini**.

**Exemple 33.35.** On considère le lancer d'une pièce de monnaie qui donne Pile avec une fréquence $p \in [0\,;\,1]$ et Face avec une fréquence $1 - p \in [0\,;\,1]$.

Pour modéliser fidèlement l'expérience, on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = \{\text{pile,face}\}$ et $\mathbb{P}$ est l'application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0\,;\,1]$ définie par :

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0 \qquad \mathbb{P}(\{\text{Pile}\}) = p \qquad \mathbb{P}(\{\text{Face}\}) = 1 - p \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Vérifions que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité.

**1.** Le point **1.** de la définition est vérifié par construction.

**2.**
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(A \cup \varnothing) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\varnothing)$.
- $\mathbb{P}(\{\text{Pile}\} \cup \{\text{Face}\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 = p + 1 - p = \mathbb{P}(\{\text{Pile}\}) + \mathbb{P}(\{\text{Face}\})$.

$\mathbb{P}$ est donc bien une probabilité.

**Remarque 33.36.** Dans l'exemple précédent, on a dû donner la probabilité de tous les événements appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$. On verra plus loin qu'on peut définir correctement une probabilité $\mathbb{P}$ sans être aussi exhaustif.

### 33.2.2 Exemple fondamental : la probabilité uniforme

**Définition 33.37 - Événements équiprobables.**

Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

**Définition 33.38 - Probabilité uniforme.**

Soit $\Omega$ un univers fini non vide. On appelle **probabilité uniforme** sur $\Omega$ l'application

$$\mathbb{P} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \end{array}$$

**Proposition 33.39 - La probabilité uniforme est une... probabilité !.**

L'application définie ci-dessus est bien une probabilité sur $\Omega$.

*Démonstration.*

La probabilité uniforme est un exemple très utile de probabilité, mais ça n'est pas la seule que nous rencontrerons (loin de là !).

**Remarque 33.40.** La définition de la probabilité uniforme donne :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

ce qui signifie que tous les événements élémentaires sont équiprobables. On verra plus loin que c'est la seule probabilité sur $\Omega$ qui a cette propriété. On pourra retenir qu'en pratique, pour la probabilité uniforme :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On utilise cette probabilité lorsque toutes les issues de l'expérience on la même « chance » de se produire. Dans les énoncés, cela se traduit par « choix au hasard », « dé non truqué », « pièce équilibrée ». Les calculs avec la probabilité uniforme font appel aux techniques de dénombrement.

**Exercice d'application 33.41.** Soit $n \geqslant 1$. On range au hasard les $n$ tomes d'une encyclopédie sur une étagère. Déterminer la probabilité que les tomes 1 et 2 soient côte à côte et dans cet ordre.

➥

**Exercice d'application 33.42.** On tire simultanément cinq cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir les 4 as ?

➥

**Exercice d'application 33.43.** On lance deux pièces simultanément et on observe le résultat. On note $A$ l'événement « une pièce tombe sur Pile, l'autre sur Face ».

**1.** On suppose que les deux pièces sont indiscernables (c'est a priori le cas d'après les données de l'énoncé).
   **(a)** Préciser l'univers $\Omega$ (on donnera toutes les issues) puis $\text{Card}(\Omega)$.
   **(b)** Est-on dans une situation d'équiprobabilité ?

**2.** On suppose dorénavant que les deux pièces sont discernables (on colorie par exemple les pièces avant de les lancer ; cela ne change en rien la probabilité de réalisation de $A$ !).
   **(a)** Préciser l'univers $\Omega$ (on donnera toutes les issues) puis $\text{Card}(\Omega)$.
   **(b)** Est-on dans une situation d'équiprobabilité ? Donner $\mathbb{P}(A)$.

**3.** On lance maintenant 100 pièces simultanément et on s'intéresse à l'événement $B$ : « on obtient exactement un Pile ». Calculer $\mathbb{P}(B)$, en veillant à choisir la modélisation (c'est-à-dire ici l'univers $\Omega$) la plus simple possible.

➥

### 33.2.3 Propriétés

**Proposition 33.44 - Règles de calcul avec les probabilités.**

Soit $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

**1.** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
**2.** $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
**3.** $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
**4.** Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
**5.** Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
On dit que la probabilité est une application **croissante** pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

*Démonstration.*

**Méthode 33.45.** *Utiliser l'événement contraire*

Soit $A$ un événement. La relation $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ est parfois appelée « passage à l'événement contraire ». Elle est utile lorsqu'on cherche la probabilité d'un événement qui est décrit par la locution « au moins un » ou « au plus un ».

**Exercice d'application 33.46.** Le jeu de carte Uno™ contient 108 cartes, dont 32 cartes « spéciales ». Lorsqu'on pioche une main de sept cartes au hasard, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une carte spéciale parmi les sept ?

➥

**Exercice d'application 33.47.** Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. On lance simultanément $n$ dés à 6 faces et non pipés. Déterminer la probabilité qu'un des $n$ dés au moins donne un chiffre pair.

➥

**Proposition 33.48 - Probabilité d'une union disjointe.**

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

*Démonstration.*
Le résultat se démontre à l'aide d'une simple récurrence, en utilisant le fait que si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont deux à deux incompatibles $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ et $A_{n+1}$ sont aussi incompatibles. □

**Corollaire 33.49 - Somme des probabilités dans un SCE.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un système complet d'événements, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k) = 1$.
2. Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$, autrement dit la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

*Démonstration.*

**Proposition 33.50 - Formule du crible de Poincaré pour deux événements.**

Soit $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

*Démonstration.*
On a $B \subset A \cup B$, donc $\mathbb{P}((A \cup B)\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$ d'après la Proposition 33.44.

Or,$(A \cup B)\backslash B = A\backslash B$, d'où $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$. Toujours d'après la Proposition 33.44, $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$, donc :

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B).$$

□

**Exemple 33.51.** Dans un village, 70 % des habitants parlent français, 40 % parlent allemands et 20 % parlent français et allemand. On choisit une personne au hasard parmi les habitants. On note $F$ (resp. $A$) l'événement « la personne parle français (resp. allemand) ». $\Omega$ désigne l'ensemble des habitants et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

1. Cherchons la probabilité que cette personne parle soit français, soit allemand :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup F) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(A \cap F) && \text{d'après la formule de Poincaré}\\ &= 0,4 + 0,7 - 0,2\\ &= 0,9.\end{aligned}$$

2. Cherchons la probabilité que cette personne ne parle ni français ni allemand :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{F}) &= \mathbb{P}(\overline{A \cup F}) && \text{d'après Morgan}\\ &= 1 - \mathbb{P}(A \cup F)\\ &= 1 - 0,9\\ &= 0,1.\end{aligned}$$

3. Cherchons la probabilité que cette personne parle français mais pas allemand :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F\backslash A) &= \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(A \cap F)\\ &= 0,7 - 0,2\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

### 33.2.4 Construction de probabilités sur un univers fini

**Définition 33.52 - Distribution de probabilités.**

On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble fini $E$ toute famille d'éléments de $\mathbf{R}_+$ indexée par $E$ et de somme 1.

**Exemple 33.53.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La famille $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ des probabilités des événements élémentaires de $\Omega$ est une distribution de probabilités sur $\Omega$ car

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

**Théorème 33.54 - Détermination d'une probabilité.**

Soit $\Omega$ un univers fini et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités sur $\Omega$.
Il existe une et une seule probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ vérifiant :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

En l'occurrence, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega$.

*Démonstration.*

- *Analyse.* Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\Omega$. Supposons que $\mathbb{P}$ vérifie : pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}\right)}_{\text{union disjointe}} = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Donc si une telle probabilité existe, elle est unique.

- *Synthèse.* Montrons que l'application $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array}$ définit bien une probabilité sur $\Omega$ et que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.
  - Déjà, $\mathbb{P}$ est correctement définie, car pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$0 \leqslant \sum_{\omega\in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$$

  - Ensuite, on a bien $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.
  - Si $A$ et $B$ sont deux événements incompatibles,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\omega\in A\cup B} p_\omega = \left(\sum_{\omega\in A} p_\omega\right) + \left(\sum_{\omega\in B} p_\omega\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

  - Enfin, pour tout $\omega_0 \in \Omega$, on a :

$$\mathbb{P}(\{\omega_0\}) = \sum_{\omega\in\{\omega_0\}} p_\omega = p_{\omega_0}.$$

□

**Remarque 33.55 (♥).** Ainsi, pour définir complètement une probabilité, il suffit de définir la probabilité de chacun des événements élémentaires.

**Exemple 33.56 (♥).** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. L'unique probabilité telle que

$$k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n},$$

est la probabilité uniforme sur $\Omega$.

**Exercice d'application 33.57.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère $\Omega = [\![1, n]\!]$. Montrer qu'on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$, en posant :

$$\forall k \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{4k^3}{n^2(n+1)^2}.$$

➥

**Exercice d'application 33.58.** On lance une fois un dé pipé à six faces qui fournit le numéro 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et les autres faces avec une même probabilité $p$.

1. Déterminer $p$.
2. Notons $A$ l'événement « on obtient un numéro impair ». Calculer la probabilité que $A$ se réalise.

➥

## 33.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

### 33.3.1 Définition

**Théorème 33.59 - Loi de probabilité d'une variable aléatoire.**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble $E$.
On appelle **loi de probabilité de** $X$ ou plus simplement **loi de** $X$, la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

*Démonstration.*

**Exercice d'application 33.60.** On lance une pièce dix fois et on note $X$ le nombre de Piles obtenus. Déterminer $X(\Omega)$, $\mathbb{P}_X(\{0\})$ et $\mathbb{P}_X(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$.

➥

**Proposition 33.61 - Distribution de probabilité d'une variable aléatoire.**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$ appelée la **distribution de probabilités de** $X$.
2. La donnée de la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ détermine entièrement la loi de $X$. Plus précisément, on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

*Démonstration.*
Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}_X(\{x\})$. Or, puisque $\mathbb{P}_X$ est une probabilité, la famille $(\mathbb{P}_X(\{x\}))_{x \in X(\Omega)}$ des probabilités des événements élémentaires $\{x\}$ de $X(\Omega)$ forme une distribution de probabilités d'après l'Exemple 33.53 et on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}_X(\{x\}) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

□

**Méthode 33.62.** *Déterminer la loi d'une variable aléatoire finie*

Quand on demande la loi de la variable aléatoire réelle finie $X$, il suffit de donner l'univers image $X(\Omega) = \{x_1; \ldots, x_n\}$ (vous devez toujours commencer par cela !) et les valeurs des $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $n$ n'est pas trop élevé, on donne généralement ces informations dans un tableau :

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ |

**Exercice d'application 33.63.** On considère un joueur qui lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. À chaque fois qu'il obtient Pile, il gagne un euro et à chaque fois qu'il obtient Face, il perd deux euros.
On note $X$ le gain algébrique du joueur. Donner la loi de probabilité de $X$.

➥

**Exercice d'application 33.64.** On lance deux dés équilibrés et on note $X$ le plus grand chiffre obtenu.

1. ♥ On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Montrer que pour tout $k \in [\![1,6]\!]$,
$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X \leqslant k-1).$$
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour tout $k \in [\![1,6]\!]$.
3. Déterminer la loi de probabilité de $X$.

➥

**Notation 33.65.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Lorsque $X$ et $Y$ ont même loi, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, on notera $X \sim Y$.

**Exemple 33.66 (☕).** Soit $A \subset \Omega$. La **fonction indicatrice** de $A$, définie par

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

est une variable aléatoire réelle. On a $\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$ et sa loi de probabilité est donnée par

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\mathbf{1}_A = x)$ | $\mathbb{P}(\overline{A})$ | $\mathbb{P}(A)$ |

**Remarque 33.67 (☕).** Les indicatrices jouent un rôle naturel en probabilité. Par exemple, si on veut compter les bruns dans une assemblée, on peut donner la valeur 1 aux bruns et la valeur 0 aux autres, puis additionner toutes ces valeurs. Plus généralement, toute variable aléatoire qui représente un cardinal peut être exprimée comme une somme d'indicatrices.

**Exemple 33.68 (☕).** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On lance $n$ fois un dé à six faces. On note, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_k$ l'événement « on obtient 6 au $k$-ième lancer ». On note $N$ le nombre de 6 obtenus. On peut exprimer $N$ à l'aide d'indicatrices :
$$N = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \cdots + \mathbf{1}_{A_n}.$$

## 33.3.2 Loi d'une composée

**Méthode 33.69.** *Déterminer la loi d'une composée*

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble $E$ et $f$ une application définie sur un ensemble $F$ contenant $X(\Omega)$ et à valeur dans un ensemble $G$.

On peut considérer l'application $Y = f(X)$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $G$ :

$$\begin{array}{rccl} Y : & \Omega & \longrightarrow & G \\ & \omega & \longmapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

$Y$ est une variable aléatoire sur $\Omega$ à valeurs dans $G$

**Question** : comment connaître la loi de $Y$ à partir de celle de $X$ ?

Pour déterminer la loi de $Y$ à partir de celle de $X$, on peut procéder en deux étapes.

1. On détermine l'univers image de $Y$.
   Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$. On fera attention au fait que dans ce dernier ensemble, certains éléments peuvent être égaux (dans ce cas on ne les répète pas !).

2. Pour chaque $y \in Y(\Omega)$, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in F$. Par exemple, si $f(x) = y$ a trois solutions $x_1, x_2, x_3$ distinctes, on écrira :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(X = x_1 \text{ ou } X = x_2 \text{ ou } X = x_3) \\ &= \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \mathbb{P}(X = x_3)\end{aligned}$$

car $(X = x_1)$, $(X = x_2)$ et $(X = x_3)$ sont deux à deux incompatibles. On sait calculer les termes de cette dernière somme car on connaît la loi de $X$.

**Exemple 33.70.** Soit $X$ une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = [\![-2, 2]\!]$ et pour tout $k \in [\![-2, 2]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{5}$. On veut déterminer la loi de $Y = X^2 + 1$.

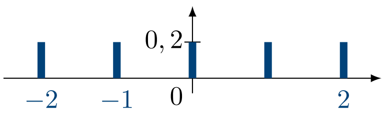
Notons $f : x \longmapsto x^2 + 1$. On a $f(0) = 1$, $f(-1) = f(1) = 2$ et $f(-2) = f(2) = 5$. Donc $Y(\Omega) = \{1, 2, 5\}$. De plus,

- $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X^2 + 1 = 1) = \mathbb{P}(X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{5}$.
- $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X^2 + 1 = 2) = \mathbb{P}(X^2 = 1) = \mathbb{P}(X = -1 \text{ ou } X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{2}{5}$.
- $\mathbb{P}(Y = 5) = \mathbb{P}(X^2 + 1 = 5) = \mathbb{P}(X^2 = 4) = \mathbb{P}(X = -2 \text{ ou } X = 2) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{2}{5}$.

Finalement,

Loi de $X$

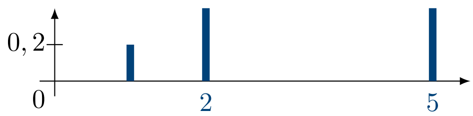
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |




$\xrightarrow{f}$

Loi de $X^2 + 1$

| $y$ | $1$ | $2$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |




**Exercice d'application 33.71.** On reprend la variable aléatoire $X$ définie l'Exercice d'application 33.63, dont on rappelle que la loi est donnée par :

| $x$ | $2$ | $-1$ | $-4$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = 2X + X^2$.

➥

**Remarque 33.72.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans $E$. Soit $g$ une application définie sur $E$ à valeurs dans $F$. Si $X \sim Y$, alors $g(X) \sim g(Y)$.

## 33.4 Premières lois usuelles

### 33.4.1 Loi uniforme

**Définition 33.73 - Loi uniforme.**

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts, $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On dit que $X$ suit une **loi uniforme** sur $E$ lorsque les deux points suivants sont vérifiés.

**1.** $E \subset X(\Omega)$.

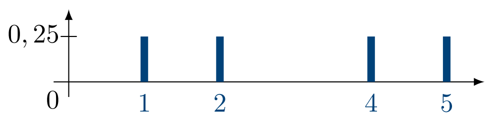
**2.** Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$.

On note alors $X \sim \mathscr{U}(E)$.

**Remarque 33.74.** Avec les notations de la définition précédente, $X$ suit une loi uniforme sur $E$ si et seulement si $\Big\{\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots, \{X = x_n\}\Big\}$ sont équiprobables. Cela revient à dire que $\mathbb{P}_X$ est la probabilité uniforme sur $E$.

**Exemple 33.75.** La loi de $X \sim \mathscr{U}(\{1, 2, 4, 5\})$ est donnée par :

| $x$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |




**Exercice d'application 33.76.** On lance un dé (à six faces, équilibré) et on note $X$ le résultat obtenu. Quelle est la loi de $X$ ?

➥

**Exercice d'application 33.77.** Une urne contient six boules : deux noires, deux rouges, deux blanches. Un joueur tire une boule dans l'urne. Il perd 2€ si la boule est blanche, il gagne 3€ si la boule est noire (et il ne se passe rien s'il tire la boule rouge). On note $X$ le gain algébrique du joueur. Quelle est la loi de $X$ ?

➥

**Exercice d'application 33.78.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, 2n]\!]$. Quelle est la loi de $Y = (-1)^X$ ?

➥

### 33.4.2 Loi de Bernoulli

**Définition 33.79 - Loi de Bernoulli.**

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0\,;\,1]$, lorsque les deux points suivants sont vérifiés.

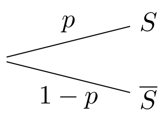
1. $\{0,1\} \subset X(\Omega)$.
2. $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$.

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

**Remarque 33.80.**
1. $\mathscr{B}(0)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 0.
2. $\mathscr{B}(1)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 1.
3. $\mathscr{B}(1/2)$ est la loi uniforme sur $\{0,1\}$.

**Remarque 33.81 (♥).** Si l'univers image d'une variable aléatoire $X$ est $\{0,1\}$, alors cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli (le paramètre s'obtient en calculant $\mathbb{P}(X=1)$).

Situation d'apparition de la loi de Bernoulli. La loi $\mathscr{B}(p)$ apparaît dans les expériences avec seulement deux issues : succès ($S$) et échec ($\overline{S}$). Le nombre $p$ est la probabilité d'obtenir un succès.




Une telle expérience (où l'on ne peut avoir que deux résultats possibles) est appelée **épreuve de Bernoulli**.

**Exercice d'application 33.82.** On considère une urne opaque contenant une proportion $p \in [0\,;\,1]$ de boules rouges et une proportion $1-p$ de boules blanches. On tire une boule dans cette urne. On considère la variable aléatoire $X$ qui vaut 1 si la boule tirée est rouge et 0 si la boule tirée est blanche. Donner la loi de $X$.

➥

**Exercice d'application 33.83.** Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Une urne contient $3n$ boules numérotées de 1 à $2n$, avec exactement deux boules indiscernables de numéro $2k$ et exactement une boule de numéro $2k-1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On note $X$ la variable aléatoire égale à 0 si la boule porte un numéro pair et qui vaut 1 sinon. Quelle est la loi de $X$ ?

➥

**Exemple 33.84 (☕).** Soit $A \subset \Omega$. Alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, où $p = \mathbb{P}(A)$ (cf. Exemple 33.66).

**Remarque 33.85 (☕).** On peut poursuivre la Remarque 33.67 : toute variable aléatoire qui représente un cardinal peut être exprimée comme une somme de variables aléatoires de loi de Bernoulli.

## 33.5 Couples de variables aléatoires

### 33.5.1 Définition et exemples

**Définition 33.86 - Vecteur aléatoire, couple de variables aléatoires.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On appelle **vecteur aléatoire** tout $n-$uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où chaque $X_i$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
2. Dans le cas $n = 2$, on dit que $(X_1, X_2)$ est un **couple de variables aléatoires.**

**Remarque 33.87.**

1. Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires sur $\Omega$ à valeurs respectives dans $E$ et $F$, alors $(X, Y)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $E \times F$.
2. Définir un vecteur aléatoire, c'est se donner plusieurs variables aléatoires relatives à la même expérience.
3. Comme pour les variables aléatoires, l'univers image $(X,Y)(\Omega) = \left\{\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \,:\, \omega \in \Omega\right\}$ est plus « important » que l'univers $\Omega$ lui-même : il faut obligatoirement le déterminer à chaque exercice.
4. Dans la pratique, on préfère souvent travailler avec le produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ plutôt que sur l'univers image $(X,Y)(\Omega)$, même si $(X,Y)(\Omega)$ n'est qu'une partie du produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ (voir l'exemple qui suit).
5. Dans la suite, on n'étudiera que les couples de variables aléatoires, mais les définitions et résultats se généralisent naturellement à un $n$-uplet de variables aléatoires.

**Exemple 33.88 (♨).** On tire simultanément au hasard deux nombres distincts dans l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$. L'univers ici est $\Omega = \{\{i,j\} \,:\, i, j \in [\![1,n]\!] \text{ et } i \neq j\}$. On considère les variables aléatoires $X$ et $Y$ où $X$ est la valeur du plus petit nombre tiré et $Y$ la valeur du plus grand. On a

$$X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$$

L'univers image est

$$(X,Y)(\Omega) = \left\{(x,y) \in [\![1,n]\!]^2 \;\middle|\; 1 \leqslant x < y \leqslant n\right\}$$

mais c'est un ensemble pénible à décrire. Dans un tel exercice, on préférera travaille avec :

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x,y) \,:\, x \in [\![1, n-1]\!] \text{ et } y \in [\![2,n]\!]\}$$

qui est un ensemble plus simple qui contient l'univers image.

**Notation 33.89.** On utilise les mêmes notations que pour les variables aléatoires. Si $(X,Y)$ est un couple de variables aléatoires tel que $X$ soit à valeurs dans $E$ et $Y$ à valeurs dans $F$, pour toute partie $A$ de $E \times F$, on note $\{(X,Y) \in A\}$ l'événement

$$\{(X,Y) \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}.$$

On notera également $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour $\mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) = \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y)$.

**Proposition 33.90 - Systèmes complets d'événements associés à un couple de v.a..**

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires.

1. La collection d'événements $\{(X = x) \text{ et } (Y = y) \,:\, (x,y) \in (X,Y)(\Omega)\}$ est un système complet d'événements.
2. La collection d'événements $\{(X = x) \text{ et } (Y = y) \,:\, (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements.

*Démonstration.*
Ces événements sont clairement incompatibles deux à deux et leur réunion fait $\Omega$. Dans la deuxième collection, certains événements sont l'événement impossible. □

### 33.5.2 Loi conjointe d'un couple de variable aléatoire

**Théorème 33.91 - Loi conjointe.**

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
La **loi conjointe** du couple $(X, Y)$ est la probabilité $\mathbb{P}_{(X,Y)}$, qui est définie sur $\mathcal{P}((X, Y)(\Omega))$ par :

$$\forall A \in (X, Y)(\Omega), \quad \mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \mathbb{P}\big(\{(X, Y) \in A\}\big).$$

*Démonstration.*
Il faut montrer que $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ construite comme dans le théorème est bien une probabilité. On a

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}\big((X, Y)(\Omega)\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

et pour toutes parties disjointes $A$ et $B$ de $(X, Y)(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X,Y)}(A \cup B) &= \mathbb{P}\big(\{(X, Y) \in A \cup B\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A \cup B\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\} \cup \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}\big) + \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}\big) \\
&\qquad \text{les deux événements sont incompatibles} \\
&= \mathbb{P}\big(\{(X, Y) \in A\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(X, Y) \in B\}\big) \\
&= \mathbb{P}_{(X,Y)}(A) + \mathbb{P}_{(X,Y)}(B).
\end{aligned}$$

□

**Remarque 33.92 (♥).**

1. Pour définir complètement $\mathbb{P}_{(X,Y)}$, il suffit de se donner les valeurs de $\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\})$ pour tout $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$. On préfère parfois donner les valeurs de $\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\})$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, sachant que $\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = 0$ lorsque $(x, y) \notin (X, Y)(\Omega)$. On rassemble si possible les résultats dans un tableau.
2. On a toujours $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = 1$.

**Exercice d'application 33.93.** Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 2 boules dans cette urne sans remise. On considère la variable aléatoire $X$ qui prend pour valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon, et $Y$ la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si la deuxième boule tirée est blanche et 0 sinon. Déterminer $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ puis la loi conjointe de $(X, Y)$.

➥

### 33.5.3 Lois marginales

**Proposition 33.94 - Lois marginales.**

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Les lois de probabilité $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ de $X$ et de $Y$ sont appelées les **lois marginales** du couple $(X, Y)$ et on les obtient de la manière suivante :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\})$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}).$$

*Démonstration.*

**Remarque 33.95.** En reprenant les notations de la proposition, on a plus généralement pour $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y = y\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) \in A \times \{y\})$$

et

$$\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y \in B\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) \in \{x\} \times B).$$

**Méthode 33.96.** *Déterminer les lois marginales en utilisant un tableau*

Dans le tableau qui donne la loi du couple $(X, Y)$, on obtient la loi de $X$ et la loi de $Y$ dans les marges (d'où le nom de « loi marginales »)

Le tableau qui suit explique comment on peut calculer $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ à partir de $\mathbb{P}_{(X,Y)}$. On a noté

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$$

et pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$,

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j).$$

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{1,1}$ | $p_{1,2}$ | $\cdots$ | $p_{1,n}$ | $\to \mathbb{P}(X = x_1) = \sum_{j=1}^{n} p_{1,j}$ |
| $x_2$ | $p_{2,1}$ | $p_{2,2}$ | $\cdots$ | $p_{2,n}$ | $\to \mathbb{P}(X = x_2) = \sum_{j=1}^{n} p_{2,j}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | |
| $x_m$ | $p_{m,1}$ | $p_{m,2}$ | $\cdots$ | $p_{m,n}$ | $\to \mathbb{P}(X = x_m) = \sum_{j=1}^{n} p_{m,j}$ |

Loi marginale $\mathbb{P}_X$

$$\underbrace{\mathbb{P}(Y = y_1) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,1} \qquad \mathbb{P}(Y = y_n) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,n}}_{\text{Loi marginale } \mathbb{P}_Y}$$

**Exercice d'application 33.97.** On reprend l'Exercice d'application 33.93. Donner les lois marginales de $X$ et de $Y$.

➥

## 33.5.4 Loi d'une composée

**Méthode 33.98.** *Déterminer la loi d'une composée*

On se donne un couple de variables aléatoires $(X, Y)$ à valeurs réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une fonction $g$ de deux variables à valeurs réelles dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. On peut considérer l'application $Z = g(X, Y)$ définie sur $\Omega$ :

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega & \longmapsto & g(X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Pour déterminer la loi de $Z$ à partir de celles de $X$ et de $Y$, on peut procéder en deux étapes.

1. On détermine l'univers image de $Z$ :
$$Z(\Omega) = \{g(x, y) \,:\, (x, y) \in (X, Y)(\Omega)\}\,.$$
2. Pour chaque $z \in Z(\Omega)$, on résout l'équation $f(x, y) = z$ d'inconnue $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Par exemple, si $f(x, y) = z$ a trois solutions $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, on écrira :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = z) &= \mathbb{P}((X, Y) = (x_1, y_1) \text{ ou } (X, Y) = (x_2, y_2) \text{ ou } (X, Y) = (x_3, y_3)) \\ &= \mathbb{P}(X = x_1 \text{ et } Y = y_1) + \mathbb{P}(X = x_2 \text{ et } Y = y_2) + \mathbb{P}(X = x_3 \text{ et } Y = y_3) \end{aligned}$$
car $(X = x_1) \cap (Y = y_1)$, $(X = x_2) \cap (Y = y_2)$ et $(X = x_3) \cap (Y = y_3)$ sont deux à deux incompatibles. On sait calculer les termes de cette dernière somme car on connaît les lois de $X$ et de $Y$.

**Exercice d'application 33.99.** On reprend l'Exercice d'application 33.93. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

➥

En reprenant les notations de la méthode précédente, on a :

$$\forall z \in g(X,Y)(\Omega), \quad \mathbb{P}(g(X,Y) = z) = \sum_{\{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega) \mid g(x,y)=z\}} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

On demande souvent de donner la loi de $X + Y$. On peut commencer par remarquer que, pour $z \in g(X,Y)(\Omega)$ :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad x + y = z \iff x = z - y$$

donc

$$\{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid x + y = z\} = \{(z-y,y) : y \in Y(\Omega)\}.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X+Y = z) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in\{(z-y,y) : y\in Y(\Omega)\}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = z-y, Y = y)$. On a une formule similaire en sommant sur les éléments de $X(\Omega)$. On pourra retenir :

$$\boxed{\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = z - y, Y = y) \text{ et } \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = z - x)}$$

**Exercice d'application 33.100.** ♥ ♨ On lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces et on note $(X,Y)$ le couple de valeurs obtenues.

1. Donner la loi de $(X,Y)$.
2. Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
4. Déterminer la loi de l'écart $D = |X - Y|$.

➥

## Questions de cours

1. Définir la notion d'issue, d'univers.
2. Définir la notion d'événement, de réalisation d'un événement, d'événement élémentaire.
3. Définir l'événement certain, l'événement impossible.
4. Définir la notion d'événements incompatibles.
5. Définir la notion de système complet d'événements.
6. Définir la notion de variable aléatoire réelle.
7. Définir la notion d'univers image d'une variable aléatoire.
8. Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (avec les $x_i$ deux à deux distincts). Quel est le système complet d'événements associé $X$ ?
9. Donner la définition de probabilité.
10. Donner la définition d'espace probabilisé.
11. Donner la définition d'événements équiprobables.
12. Donner la définition de probabilité uniforme.
13. Soit $A, B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $A \subset B$. Donner les formules qui permettent de calculer $\mathbb{P}(\overline{A})$ et $\mathbb{P}(B \backslash A)$. Donner le signe de $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
14. Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements. Que vaut $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)$ ?
15. Énoncer la formule du crible de Poincaré.
16. Donner la définition de distribution de probabilité.
17. Donner la définition de loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
18. Donner la distribution de probabilité d'une variable aléatoire $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
19. Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec tous les $x_i$ distincts. Définir « $X$ suit une loi uniforme sur $E$ ».
20. Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $p \in [0\,;\,1]$. Définir « $X$ suit une loi uniforme de Bernoulli de paramètre $p$ ».
21. Définir la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires.
22. Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Compléter :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) =$$

et

$$\forall y \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) =$$

Dans ce contexte, comment sont qualifiées les lois de $X$ et de $Y$ ?