

CHAPITRE 32

DÉTERMINANTS

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n est un entier naturel non nul et E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

32.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

32.1.1 Définition

Définition 32.1 - Application linéaire par rapport à chaque variable.

On considère une application

$$\begin{aligned} f : E^n &\longrightarrow \mathbf{K} \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto f(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

On dit que f est **linéaire par rapport à chaque variable** lorsque pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et tous vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n$ de E , l'application

$$\begin{aligned} f_k : E &\longrightarrow \mathbf{K} \\ y &\longmapsto f(u_1, \dots, u_{k-1}, y, u_{k+1}, \dots, u_n) \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

Exercice d'application 32.2. Montrer que l'application $f : (\mathbf{R}[X])^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est linéaire par rapport à chaque variable.

$$(P, Q) \longmapsto \tilde{P}(1)\tilde{Q}'(0)$$

➡

Exemple 32.3. L'application $\varphi : \mathcal{C}^0([a; b]) \longrightarrow \mathbf{R}$ est aussi linéaire par rapport à chacune de ses variables. On dit alors que φ est **bilinéaire**.

$$(f, g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t) \, dt$$

Définition 32.4 - Application linéaire alternée.

On considère une application $f : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables.

On dit que f est **alternée** lorsqu'elle s'annule en chaque n -uplet d'éléments de E contenant deux vecteurs identiques, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \left((\exists i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (i \neq j \text{ et } u_i = u_j)) \implies f(u_1, \dots, u_n) = 0 \right).$$

Proposition 32.5 - Antisymétrie d'une application alternée.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et n un entier naturel non nul. Si une application $f : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables est alternée, alors elle est **antisymétrique** : pour tous vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de E et tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$, on a

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

(c'est-à-dire que l'image par f d'un n -uplet de vecteurs est changée en son opposée si l'on permute deux des vecteurs).

Démonstration.

Définition 32.6 - Application déterminant.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}} :$

$$\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \end{array} \quad \text{qui vérifie les trois points suivants :}$$

1. $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
2. $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée.
3. $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ (c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$).

Cette application s'appelle le **déterminant** dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

La démonstration repose sur des notions hors programme. On admet le résultat. □

Théorème 32.7 - Application linéaire par rapport à chaque variable et alternée.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si l'application $f : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée, alors elle est un multiple de l'application $\det_{\mathcal{B}}$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

Démonstration.

La démonstration repose sur des notions hors programme. On admet le résultat. □

Définition 32.8 - Déterminant d'une famille de vecteurs.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $u_1, \dots, u_n \in E$. On appelle déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

**ATTENTION**

Dans un espace vectoriel de dimension n , on ne peut calculer le déterminant que d'une famille de n vecteurs. Cela n'aurait pas exemple aucun sens de parler du déterminant de deux vecteurs dans $\mathbf{R}^3$.

Proposition 32.9 - Principales propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $u_1, \dots, u_n \in E$. En plus des trois points de la Définition 32.6, le déterminant vérifie les deux propriétés importantes suivantes :

1. Le déterminant est antisymétrique.
2. Si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$.

Démonstration.

32.1.2 Expression en dimensions 2 et 3

Proposition 32.10 - Expression du déterminant en dimension 2.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B}$ une base de E . Pour deux vecteurs u et v de coordonnées (x, y) et (x', y') dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v) = xy' - yx' = \underbrace{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}_{\text{notation}}.$$

Démonstration.

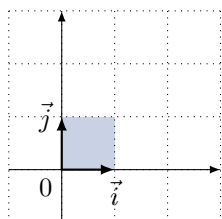
Interprétation géométrique.

Si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe du plan en géométrie plane, et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans $\mathcal{B}$, alors

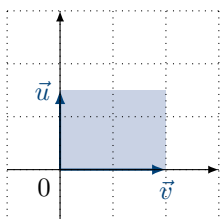
$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

est l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c'est-à-dire l'aire du parallélogramme si l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ a une mesure comprise entre 0 et π et l'opposé de cette aire sinon).

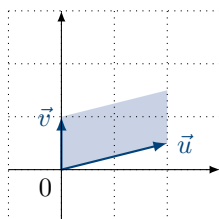
Unité d'aire, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$



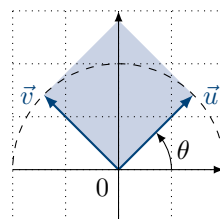
$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3/2 & 0 \end{vmatrix} = -3$



$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 2$



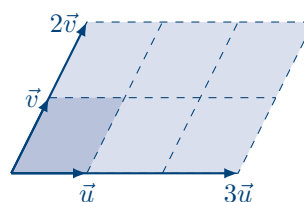
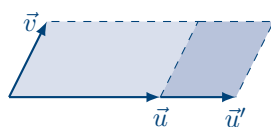
$\begin{vmatrix} 2 \cos \theta & -2 \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 2 \cos \theta \end{vmatrix} = 4$



Notons qu'on peut alors illustrer la linéarité par rapport aux variables. Soit $\vec{u}, \vec{u}', \vec{v} \in E$.

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}', \vec{v})$$

$$\det_{\mathcal{B}}(3\vec{u}, 2\vec{v}) = 3 \times \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, 2\vec{v}) = 3 \times 2 \times \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$$



Proposition 32.11 - Expression du déterminant en dimension 3 (règle de Sarrus).

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E . Pour trois vecteurs u, v et w de coordonnées (x, y, z) , (x', y', z') et (x'', y'', z'') dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'' = \underbrace{\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}}_{\text{notation}}.$$

Démonstration.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit u, v et w trois vecteurs de E . On note (x, y, z) les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, (x', y', z') celles de v et (x'', y'', z'') celles de w dans cette même base.

Alors $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $v = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ et $w = x''e_1 + y''e_2 + z''e_3$ donc

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \det_{\mathcal{B}}(xe_1 + ye_2 + ze_3, x'e_1 + y'e_2 + z'e_3, x''e_1 + y''e_2 + z''e_3).$$

En développant ce déterminant par rapport à chacune des variables, on obtient une combinaison linéaire de 27 déterminants. Si l'on ne conserve que ceux ne faisant pas intervenir deux fois le même vecteur on obtient :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = & xy'z'' \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) + yz'x'' \det_{\mathcal{B}}(e_2, e_3, e_1) + zx'y'' \det_{\mathcal{B}}(e_3, e_1, e_2) \\ & + xz'y'' \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_3, e_2) + yx'z'' \det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1, e_3) + zy'x'' \det_{\mathcal{B}}(e_3, e_2, e_1) \end{aligned}$$

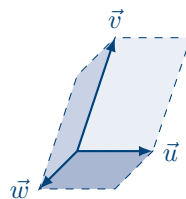
Dans le calcul précédent, à droite de l'égalité, tous les déterminants de la première ligne valent 1 car les familles (e_2, e_3, e_1) et (e_3, e_1, e_2) sont obtenues à partir de la base $\mathcal{B}$ par deux permutations successives de deux vecteurs $((e_1, e_2, e_3) \rightarrow (e_2, e_1, e_3) \rightarrow (e_2, e_3, e_1))$ ce qui change le déterminant deux fois de suite en son opposé. Quant à la deuxième ligne, tous les déterminants valent -1 car les familles dont on calcule le déterminant sont obtenues à partir de $\mathcal{B}$ par une seule permutation de deux vecteurs. On obtient donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''.$$

□

Interprétation géométrique.

Si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace, et si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$. Par orienté, il faut comprendre que si $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{w}$ « pointent » vers le même demi-espace délimité par le plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est égal au volume du parallélépipède. Dans le cas contraire, ce déterminant est l'opposé de ce volume.



32.1.3 Lien entre les applications déterminants dans deux bases différentes

Proposition 32.12 - Changement de base et déterminant.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

1. On a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ ce qui signifie que pour tous vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de E , on a

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

2. $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$.

Démonstration. 1. D'après la Définition 32.6, puisque $\det_{\mathcal{B}'}$ est une application de E^n dans $\mathbf{K}$ -linéaire par rapport à chaque variable et alternée, il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. On a alors pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

et en particulier, si l'on choisit $(u_1, \dots, u_n) = \mathcal{B}$ on obtient $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \times 1$ ce qui donne $\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$. Ainsi, $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

2. Dans la relation du point 1. de la proposition, si l'on choisit $(u_1, \dots, u_n) = \mathcal{B}'$, on obtient $1 = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ce qui est exactement le résultat annoncé. $\square$

32.1.4 Caractérisation des bases

Théorème 32.13 - Caractérisation des bases avec le déterminant.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base de E . Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Démonstration.

Exercice d'application 32.14. On considère dans $\mathbf{R}_2[X]$ les vecteurs $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 1 - X + 2X^2$ et $P_3 = 2 + X + X^2$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.



32.2 Déterminant d'un endomorphisme

32.2.1 Définition

Lemme 32.15 - Le choix de la base n'influe pas sur le déterminant.

Soit f un endomorphisme de E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . On a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)).$$

Démonstration.

Considérons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{array}$.

Il n'est pas difficile de montrer que φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables (on utilise la linéarité de u et la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables) et que φ est alternée. D'après la Définition 32.6, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que

$$\forall u_1, \dots, u_n \in E, \quad \varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n). \quad (*)$$

On utilise (*) avec $(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n)$ et on obtient $\lambda = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. On utilise ensuite (*) avec $(u_1, \dots, u_n) = (e'_1, \dots, e'_n)$. On obtient :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

c'est-à-dire

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).$$

Or on sait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}$ donc

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))}{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}$$

et donc

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)).$$

Le membre de droite de cette dernière égalité vaut $\det_{\mathcal{B}'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n))$ en vertu de la Proposition 32.12. Ainsi,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)).$$

□

Ceci montre que le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ choisie. D'où la définition suivante.

Définition 32.16 - Déterminant d'un endomorphisme.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit f un endomorphisme de E . On appelle le **déterminant** de l'endomorphisme f et on note $\det(f)$ le scalaire

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Exercice d'application 32.17. Soit l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & \tilde{P}(1)X + \tilde{P}(2) \end{array}$. Calculer $\det(f)$.

→

Exemple 32.18. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On a

$$\det(\text{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(e_1), \dots, \text{Id}_E(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

32.2.2 Propriétés

Proposition 32.19 - Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs.

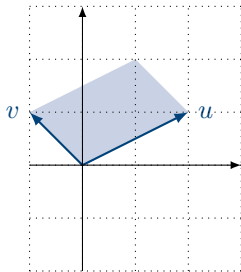
Soit f un endomorphisme de E . Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de E , on a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Démonstration.

Il ne s'agit de rien d'autre que la relation (*) obtenue dans la démonstration du Lemme 32.15, où l'on avait trouvé $\lambda = \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f)$. $\square$

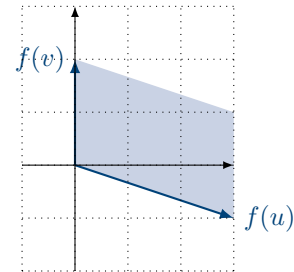
$$M_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$f : (x, y) \mapsto (x + y, y - x)$$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}(f(u), f(v)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Sur l'illustration précédente, on a $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$, donc $\det(f) = 2$ correspond au coefficient pour passer de $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$ à $\det_{\mathcal{B}}(f(u), f(v))$.

Proposition 32.20 - Principales propriétés.

1. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout endomorphisme u de E , on a $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
2. Pour tous endomorphismes f et g de E , on a $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f) = \det(f \circ g)$.
3. Pour tout endomorphisme f de E , on a l'équivalence :

f est un automorphisme de E si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.

4. Pour tout automorphisme f de E , on a $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Démonstration.

Exemple 32.21. L'endomorphisme $f : \mathbf{R}_1[X] \longrightarrow \mathbf{R}_1[X]$ est un automorphisme car son déterminant

$$P \longmapsto \tilde{P}(1)X + \tilde{P}(2)$$

 (calculé dans l'Exercice d'application 32.17) est non nul.

32.3 Déterminant d'une matrice carrée

32.3.1 Définition et premiers calculs

Définition 32.22 - Déterminant d'une matrice carrée.

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$. On note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A qui sont des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant** de la matrice A et on note $\det(A)$ le scalaire :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_n).$$

- Cas $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ses vecteurs colonnes sont $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K})$.

Alors les coordonnées de C_1 dans $\mathcal{C}$ sont (a, c) et celles de C_2 sont (b, d) . Ainsi,

$$\det(A) = \det_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

- Cas $n = 3$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$. Ses vecteurs colonnes sont $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} c \\ f \\ k \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$.

Alors les coordonnées de C_1 dans $\mathcal{C}$ sont (a, d, g) , celles de C_2 sont (b, e, h) et celles de C_3 sont (c, f, k) . Ainsi,

$$\det(A) = \det_{\mathcal{C}}(C_1, C_2, C_3) = aek + dhc + gbh - ahf - dbk - gec = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

Notation 32.23. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, le déterminant de A se note aussi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

32.3.2 Premières propriétés

Dans la suite, pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, si l'on désigne par $C_1, \dots, C_n$ les matrices colonnes de A qui sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on notera $A = [C_1, \dots, C_n]$.

Proposition 32.24 - Propriétés caractéristiques du déterminant matriciel.

1. $\det(I_n) = 1$.
2. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ est **linéaire et alternée par rapport à chaque colonne de sa variable**. Cela signifie que
 - pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour toutes matrices colonnes $C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\det([C_1, \dots, C_{i-1}, \lambda C_i + C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n]) = \lambda \det([C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n]) + \det([C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n])$$
 - si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.
3. Le déterminant matriciel est **antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable** : pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i < j$, et pour toutes matrices colonnes $C_1, \dots, C_n$, on a

$$\det([C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n]) = -\det([C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n]).$$

Démonstration. 1. La famille des colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ de la matrice I_n est en fait la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ donc $\det(I_n) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = 1$.

2. C'est immédiat avec le caractère linéaire par rapport à chaque variable et alterné du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
3. C'est aussi évident, car le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base est aussi antisymétrique. $\square$

Proposition 32.25 - Quelques règles de calcul.

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

1. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$.
2. Si l'une des colonnes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration. 1. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose que la colonne C_i est une combinaison linéaire des autres colonnes de A , alors la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est liée donc ce n'est pas une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et donc $\det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_n) = 0$, autrement dit $\det(A) = 0$.

2. Si l'une des colonnes de A est nulle, alors elle est combinaison linéaire des autres, donc on a à nouveau $\det(A) = 0$.

3. Avec les mêmes notations, on a

$$\det(\lambda A) = \det_{\mathcal{C}}(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{C}}(C_1, \dots, C_n) = \lambda^n \det(A)$$

par linéarité de $\det_{\mathcal{C}}$ par rapport à chacune de ses variables. $\square$

32.3.3 Liens avec le déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme

Proposition 32.26 - Lien entre déterminant d'une famille de vecteurs et celui d'une matrice.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(M_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)).$$

Démonstration.

Considérons l'application $\varphi :$

$$\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \det(M_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)). \end{array}$$

Le but est de prouver que φ est l'application $\det_{\mathcal{B}}$. Par définition du déterminant matriciel, en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on a pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{C}}(M_{\mathcal{B}}(x_1), \dots, M_{\mathcal{B}}(x_n)).$$

Puisque l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$ est une application linéaire et puisque l'application $\det_{\mathcal{C}}$ est une application

linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée, on peut affirmer que l'application φ est aussi linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée. D'après la Définition 32.6, on en déduit qu'il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Il reste à voir que $\lambda = 1$. On obtient cela en évaluant φ en la base $\mathcal{B}$:

$$\varphi(\mathcal{B}) = \det(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})) = \det(I_n) = 1$$

et $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$ donc $\lambda = 1$ et ainsi $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$. $\square$

Proposition 32.27 - Lien entre déterminant d'un endomorphisme et celui d'une matrice.

Soit f un endomorphisme de E . Pour toute base $\mathcal{B}$ de E , on a $\det(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f))$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Par définition, on a

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Or $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det(M_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)))$ d'après la proposition précédente, et par définition, on a $M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ d'où l'égalité $\det(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f))$. $\square$

32.3.4 D'autres propriétés du déterminant matriciel

Proposition 32.28 - Principales propriétés du déterminant matriciel.

1. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$ autrement dit :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \det(A) \neq 0.$$

3. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on a $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration.

Proposition 32.29 - Déterminant de la transposée.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

Démonstration.

Admis.

□

32.4 Calcul pratique des déterminants

32.4.1 Effet des opérations élémentaires

Proposition 32.30 - Opérations élémentaires sur les colonnes.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}^*$, $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un couple d'entiers distincts. Notons A' la matrice obtenue à partir de A à l'aide de l'opération élémentaire sur les colonnes décrite pour chaque cas.

- Opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$: $\det(A') = \det(A)$.
Autrement dit le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A .
- Opération $C_i \leftrightarrow C_j$: $\det(A') = -\det(A)$.
Autrement dit le déterminant de A change de signe si l'on permute deux colonnes de A .
- Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$: $\det(A') = \alpha \det(A)$.
Autrement dit le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une colonne de A par α .

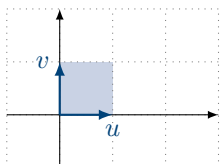
Démonstration. 1. Opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$. On utilise la linéarité par rapport à la i -ième colonne de A' : on obtient alors $\det(A') = \det(M) + \alpha \det(A_1)$ où A_1 est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne i par la colonne j . Ainsi A_1 possède deux colonnes identiques, d'où $\det(A_1) = 0$.

2. Opération $C_i \leftrightarrow C_j$. A' est obtenue à partir de A en échangeant deux colonnes. Par antisymétrie du déterminant, on en déduit $\det(A') = -\det(A)$.

3. Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$. Par linéarité par rapport à la i -ième colonne de M' , on obtient $\det(A') = \alpha \det(A)$. $\square$

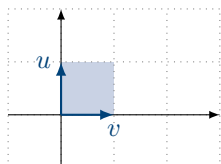
Remarque 32.31. Encore une fois, on peut interpréter graphiquement ! Notons $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$



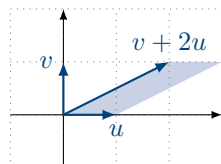
Opération $C_1 \leftrightarrow C_2$

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$



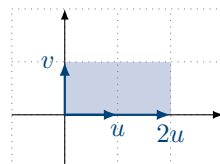
Opération $C_2 \leftarrow C_1 + 2C_2$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 + 2x_1 \\ x_2 & y_2 + 2x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$



Opération $C_1 \leftarrow 2C_1$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & y_1 \\ 2x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$



Corollaire 32.32 - Opérations élémentaires sur lignes.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ et $\alpha \in \mathbf{K}^*$.

- Le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne de A .
- Le déterminant de A est changé en son opposé si l'on permute deux lignes de A .
- Le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une ligne de A par α .

Démonstration.

Les opérations sur les lignes de A sont celles que l'on peut faire sur les colonnes de $A^\top$ et $\det(A) = \det(A^\top)$. $\square$

Exercice d'application 32.33. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.



On peut généraliser le procédé afin d'obtenir le déterminant d'une matrice triangulaire quelconque.

Proposition 32.34 - Déterminant d'une matrice diagonale, triangulaire.

1. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Démonstration. 1. Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, en utilisant la linéarité par rapport à toutes les colonnes, on a

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det(I_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que A est triangulaire supérieure, écrivez $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors par une succession d'opérations d'ajout d'un multiple d'une colonne à une autre, on peut transformer A en $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Comme ces opérations ne changent pas le déterminant,

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

- Si au moins un des coefficients diagonaux est nul, alors, en notant k le plus indice tel que λ_k soit nul, on peut, par une succession d'opérations d'ajout d'un multiple d'une colonne à une autre, transformer A en

une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_{k-1} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \star & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_{k+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Cette matrice a une colonne nulle donc son déterminant est nul. Donc $\det(A) = 0 = \lambda_1 \dots \lambda_n$. $\square$



ATTENTION



Le déterminant d'une matrice qui n'est pas triangulaire n'est pas nécessairement le produit de ses coefficients diagonaux.

Exercice d'application 32.35. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$



Exercice d'application 32.36. Calculer le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



32.4.2 Développement suivant une ligne ou une colonne

Proposition 32.37 - Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On note $\Delta_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A (appelée **mineur** de la matrice A d'indice (i, j)).

1. Développement par rapport à la ligne L_{i_0} : soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \det(\Delta_{i_0,j}).$$

2. Développement par rapport à la colonne C_{j_0} : soit $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \det(\Delta_{i,j_0}).$$

Démonstration.

Exemple 32.38. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer $\Delta_{3,3}(A)$, on barre (éventuellement mentalement) la troisième ligne et la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\Delta_{3,3}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

De même :

$$\Delta_{4,2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 32.39 (Développement sur une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ quelconque). Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.

1. Le développement par rapport à la première colonne s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a^{(+)} & b^{(-)} & c^{(+)} \\ d^{(-)} & e^{(+)} & f^{(-)} \\ g^{(+)} & h^{(-)} & k^{(+)} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}.$$

2. Le développement par rapport à la deuxième colonne s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a^{(+)} & b^{(-)} & c^{(+)} \\ d^{(-)} & e^{(+)} & f^{(-)} \\ g^{(+)} & h^{(-)} & k^{(+)} \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}.$$

3. Le développement par rapport à la troisième colonne s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a^{(+)} & b^{(-)} & c^{(+)} \\ d^{(-)} & e^{(+)} & f^{(-)} \\ g^{(+)} & h^{(-)} & k^{(+)} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}.$$

4. Le développement par rapport à la première ligne s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a^{(+)} & b^{(-)} & c^{(+)} \\ d^{(-)} & e^{(+)} & f^{(-)} \\ g^{(+)} & h^{(-)} & k^{(+)} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

5. Le développement par rapport à la deuxième ligne s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a^{(+)} & b^{(-)} & c^{(+)} \\ d^{(-)} & e^{(+)} & f^{(-)} \\ g^{(+)} & h^{(-)} & k^{(+)} \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}.$$

6. Le développement par rapport à la troisième ligne s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a^{(+)} & b^{(-)} & c^{(+)} \\ d^{(-)} & e^{(+)} & f^{(-)} \\ g^{(+)} & h^{(-)} & k^{(+)} \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}.$$

Remarque 32.40. Notons qu'en procédant comme dans l'exemple, on se ramène à des déterminants de taille plus petite. En itérant, on pourra, à partir de n'importe quelle matrice, se ramener à des déterminants de matrices de $M_2(\mathbf{K})$, qu'on sait calculer.

Exemple 32.41. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $\det(A)$ en développant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2(-2-9) + (1-9) - 2(3+6) = -4.$$

On aurait aussi pu développer par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(6-3) - 2(3+6) + (1+4) = -4.$$

Remarque 32.42. • Dans la formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne, si on écrit bien les termes dans l'ordre dans lequel on les rencontre, les signes sont alors alternés.

- Développer par rapport à une ligne ou une colonne peut permettre de trouver une relation de récurrence lorsqu'il s'agit de calculer un déterminant de taille n . Voir TD.

Exercice d'application 32.43. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

➡

Remarque 32.44. En général, on préfère choisir de développer par rapport à une ligne ou une colonne qui contient des zéros, cela fait d'autant moins de calculs à faire. Il est d'ailleurs recommandé de faire des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes pour faire apparaître un maximum de zéros sur une même ligne ou sur une même colonne avant de développer par rapport à celle-ci.

Exercice d'application 32.45. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

↳

Exercice d'application 32.46. Montrer que $(X + 1, X(X - 1), X^2 - 1)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

↳

Exercice d'application 32.47. Montrer que $u : \begin{matrix} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + z, -2x + 3z, x + 3y - 2z) \end{matrix}$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$.

↳

32.5 Résumé des liens entre les différents déterminants

On rappelle les liens qui existent entre les déterminants sur un exemple. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base. Soit $u_1, u_2 \in E$ dont on note $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ les coordonnées respectives. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note enfin $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. On rappelle que $\varphi_A : \begin{matrix} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$ est l'application linéaire (ici un endomorphisme) canoniquement associée à A .

	Famille	Endomorphisme	Matrice
Famille			$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \det \left(M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) \right)$
Endomorphisme	$\det(f) = \det_{\mathcal{B}} \left(f(e_1), f(e_2) \right)$		$\det(f) = \det \left(M_{\mathcal{B}}(f) \right)$
Matrice	$\det(A) = \det_{\mathcal{C}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$	$\det(A) = \det(\varphi_A)$	

Questions de cours

1. Donner la définition d'application linéaire par rapport à chaque variable.
2. Donner la définition d'application alternée.
3. Donner la définition d'application antisymétrique.
4. Définir l'application déterminant.
5. Que peut-on dire du déterminant d'une famille liée ?
6. Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 2, $u, v \in E$ de coordonnées respectives $(x, y), (x', y')$. Que vaut $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$?
7. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Soit $u_1, \dots, u_n \in E$. Donner la caractérisation de « $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E » avec le déterminant.
8. Définir le déterminant d'un endomorphisme.
9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Compléter $\det(\lambda f) =$
10. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Compléter $\det(g \circ f) =$
11. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Donner la caractérisation de « f est un automorphisme de E » avec le déterminant.
12. Soit f un automorphisme de E . Compléter : $\det(f^{-1}) =$
13. Définir le déterminant d'une matrice.
14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres, que peut-on dire de $\det(A)$?
15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si l'une des colonnes de A est nulle, que peut-on dire de $\det(A)$?
16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Compléter $\det(\lambda A) =$
17. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Compléter $\det(AB) =$
18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Donner la caractérisation de « A est inversible » avec le déterminant.
19. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Compléter $\det(A^{-1}) =$
20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Compléter $\det(A^{\top}) =$
21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On construit A' en ajoutant à une colonne (resp. ligne) de A un multiple d'une autre. Quel est le lien entre $\det(A')$ et $\det(A)$?
22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On construit A' en échangeant deux colonnes (resp. lignes) de A . Quel est le lien entre $\det(A')$ et $\det(A)$?
23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}$. On construit A' en multipliant une colonne (resp. ligne) de A par α . Quel est le lien entre $\det(A')$ et $\det(A)$?
24. Que vaut le déterminant d'une matrice diagonale ?
25. Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) ?