CHAPITRE 31 UTILISATION DES MATRICES EN ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $n, p \in \mathbf{N}^\star$.

31.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

31.1.1 Définition et propriétés

Définition 31.1 - Matrice colonne des coordonnées.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit x un vecteur de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$.

La **matrice colonne des coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$ est la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 31.2 - Matrice d'une famille de vecteurs.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
La **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$**, notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, est la matrice de format $n \times p$ où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ième colonne est celle des coordonnées de v_j dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice d'application 31.3. Dans $\mathbf{R}_3[X]$, on considère $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, $P = 1 - 2X^2 + X^3$, $Q = -X + 3X^3$ et $\mathcal{F} = (P, Q)$. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(P)$ et $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

➥

Proposition 31.4 - Matrice d'une combinaison linéaire de vecteurs.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tous x et y dans E et tout scalaire λ, on a

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x+y) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\lambda x) = \lambda \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Démonstration.
On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $(y_1, \dots, y_n)$ celles de y.

Par définition, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n$ donc

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + \dots + (x_n + y_n)e_n$$

et

$$\lambda x = (\lambda x_1)e_1 + (\lambda x_2)e_2 + \dots + (\lambda x_n)e_n.$$

On a

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x+y)$$

et

$$\lambda \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\lambda x).$$

□

31.1.2 Rang d'une matrice

Définition 31.5 - Rang d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On note C_1, C_2,..., C_p les colonnes de A (ce sont des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, appelés les vecteurs colonnes de A).
On appelle le **rang de la matrice** A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la famille de vecteurs $(C_1, \dots, C_p)$, autrement dit

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p).$$

Proposition 31.6 - Lien entre le rang et les dimensions de la matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On a $0 \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

Démonstration.
Le rang de A est le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$. Comme ces vecteurs colonnes sont des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui est de dimension n, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$. □

Exercice d'application 31.7. Quel est le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$?

➥

31.2 Matrice d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, E et F sont des espaces de dimensions finies égales à p et n respectivement, $\mathcal{B}_E$ est une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.

31.2.1 Définition

On note $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F.

Soit u une application linéaire de E dans F.

On a vu dans un chapitre précédent qu'en dimension finie, une application linéaire entre deux espaces vectoriels est entièrement déterminée par l'image d'une base donc l'application u est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $u(e_j)$ (où $j \in [\![1, p]\!]$).

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on peut exprimer le vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$: il existe un unique $n-$uplet de scalaires $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j})$ tel que

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\ f_i = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \cdots + a_{n,j} f_n,$$

les scalaires $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j})$ étant les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

La donnée de la famille de scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ définit donc entièrement l'application linéaire u, et nous pouvons la présenter à l'aide de la matrice

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \end{array}$$

dont les colonnes sont les matrices-colonnes qui représentent les vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Définition 31.8 - Matrice d'une application linéaire.

On reprend les notations précédentes.
On appelle **matrice de l'application linéaire** u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice, notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$, définie par

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

Dans le cas où u est un endomorphisme de E (c'est-à-dire où $E = F$), on peut choisir (mais ce n'est pas obligatoire) la même base au départ et à l'arrivée et, dans ce cas, on appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et définie par

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u).$$

ATTENTION

$\dim(E) = p$, $\dim(F) = n$ mais $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Remarque 31.9. La matrice d'un endomorphisme est une matrice carrée.

Exercice d'application 31.10. Notons $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et considérons

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x - 2y - z, x + 4z) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

2. Considérons maintenant la base $\mathcal{D} = ((1, 1), (1, 0))$ de $\mathbf{R}^2$. Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.

➥

Exercice d'application 31.11. Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}_3[X]$ et $\mathbf{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de l'application D suivante relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$D : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

➥

Exercice d'application 31.12. Considérons $h : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P \end{array}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$

Déterminer la matrice de h relativement à $\mathcal{B}$.

➥

Exercice d'application 31.13. ♨ Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques, ainsi que p le projecteur sur $\mathcal{S}$ parallèlement à $\mathcal{A}$. Alors, on a déjà vu que $p : M \longmapsto \frac{1}{2}(M + M^\top)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $\mathcal{C}$ une base adaptée à la somme directe $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice de p dans la base $\mathcal{C}$.

➥

Exercice d'application 31.14. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, E un espace vectoriel de dimension n. Soit u l'homothétie de rapport λ de E dans E. Donner la matrice représentative de u dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E.

➥

Exemple 31.15 (♥). Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E (de dimension n). Considérons l'endomorphisme

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

On a alors :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = I_n.$$

ATTENTION

On fera attention au fait que si l'on prend pas la même base au départ et à l'arrivée alors la matrice de Id_E dans ces bases n'est pas la matrice identité.

Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ (on vérifie facilement que c'est une base de $\mathbf{R}^3$) et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

31.2.2 Image d'un vecteur

Proposition 31.16 - Matrice de l'image d'un vecteur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $u \in E$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. On a

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Démonstration.

Notons $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $X = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_E = (e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1,\dots,f_n)$.

On a $x = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot e_k$. Puisque u est linéaire, on en déduit $u(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot u(e_k)$. Or par définition de la matrice d'une application linéaire, pour $k \in [\![1,p]\!]$, les coordonnées de $u(e_k)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont données par la k-ième colonne de A :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}\big(u(e_k)\big) = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot f_i$. Donc,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} f_i\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} (a_{i,k}x_k) f_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k\right)}_{i\text{-ème coordonnée de } u(x) \text{ dans } \mathcal{B}_F} f_i.$$

Finalement, $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{p} a_{n,k}x_k \end{pmatrix} = AX.$ □

Exercice d'application 31.17. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ telle que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $u(1,1,1)$ puis $u(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

➥

Exercice d'application 31.18. On reprend l'application D et les notations de l'Exercice d'application 31.11. On rappelle qu'on a obtenu

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, avec un produit de matrices, l'image de $Q = X^3 - 2X + 4$ par D, c'est-à-dire l'expression de la dérivée de Q dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}_2[X]$.

➥

Exercice d'application 31.19. ♨ ♥ Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On considère r la rotation vectorielle de centre 0 et d'angle θ dans $\mathbf{R}^2$. On admet que c'est un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$.

1. Déterminer la matrice de r dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^2$.
2. En déduire l'image de $(1,2)$ par la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

➥

Exercice d'application 31.20. ♨ Dans $\mathbf{R}^2$, on considère $u = (1,1)$, $v = (-1,2)$ et s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,(u)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(v)$.

1. Démontrer que (u,v) est une base de $\mathbf{R}^2$.
2. On note $\mathcal{B} = (u,v)$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ et $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(s)$.
3. On considère le vecteur $w = (2,-1) = u - v$. Déterminer $s(w)$.

➥

31.2.3 L'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Théorème 31.21 - Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{array}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. • Soit $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbf{K}$. La j-ième colonne de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u+v)$ est formée des coordonnées de $(\lambda u+v)(e_j)$ dans $\mathcal{B}_F$. Or les coordonnées de $u(e_j)$ (resp. $v(e_j)$) dans $\mathcal{B}_F$ constituent la j-ième colonne de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ (resp. $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)$). Comme $(\lambda u+v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j)$, on en déduit
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u+v) = \lambda \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v).$$
Donc l'application est linéaire

• De plus, l'application est bijective car une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base. □

Corollaire 31.22 - Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

$\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Démonstration.
On a $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = n \times p$, donc le théorème précédent donne $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = n \times p$. □

31.2.4 Composition d'applications

Proposition 31.23 - Matrice d'une composée.

Soit $r \in \mathbf{N}^\star$, G un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de r, $\mathcal{B}_G$ une base de G. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{B}_E = (e_1,\ldots,e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1,\ldots,f_q)$, $\mathcal{B}_G = (g_1,\ldots,g_r)$,
$$A = (a_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\1\leqslant k\leqslant p}} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u), \quad B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant q}} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \text{ et } C = (c_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant k\leqslant p}} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u).$$
Par définition des scalaires $a_{j,k}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$, on a
$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ u(e_k) = \sum_{j=1}^q a_{j,k} f_j, \qquad \forall j \in [\![1,q]\!],\ v(f_j) = \sum_{i=1}^r b_{i,j} g_i, \qquad \forall k \in [\![1,p]\!],\ v \circ u(e_k) = \sum_{i=1}^r c_{i,k} g_i$$
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a aussi :
$$\begin{aligned} v \circ u(e_k) = v\left(u(e_k)\right) &= v\left(\sum_{j=1}^q a_{j,k} f_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^q a_{j,k} v(f_j) = \sum_{j=1}^q \left(a_{j,k} \sum_{i=1}^r b_{i,j} g_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^r a_{j,k} b_{i,j} g_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^q b_{i,j} a_{j,k}\right) g_i \end{aligned}$$

Ainsi par unicité des coordonnées dans une base, on obtient

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \forall k \in [\![1, p]\!], \qquad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j} a_{j,k}.$$

On constate donc que l'on a : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v).\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$. □

ATTENTION

Il faut bien prendre garde à l'ordre des bases et celui des matrices ! On rappelle que le produit matriciel n'est pas commutatif !

Corollaire 31.24 - Composées itérées d'un endomorphisme.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbf{N}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u^n) = (\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u))^n$ (on rappelle que $u^n = u \circ \cdots \circ u$).

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u^n) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u)^n$ ».
On a $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u^0) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = I_p$ et $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u)^0 = I_p$, donc H_0 est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n est vraie. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u^{n+1}) &= \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u^n \circ u) \\
&= \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u^n) \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u) && \text{d'après la proposition précédente} \\
&= \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u)^n \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u) && \text{d'après } H_n \\
&= \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie et on conclut par récurrence. □

Exercice d'application 31.25. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par $u(x, y) = (3x + 6y, -x - 2y)$. Déterminer la matrice A de u relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et, à partir de celle-ci, montrer que u est un projecteur.

➥

31.2.5 Représentation des isomorphismes

Dans ce paragraphe, on suppose que E et F sont de même dimension $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 31.26 - Caractérisation des isomorphismes et matrice de la réciproque.

Une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme si, et seulement si, la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. Le cas échéant,

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))^{-1}.$$

Démonstration.

- Supposons que u est un isomorphisme.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u \circ u^{-1}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

et

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(u^{-1} \circ u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(\mathrm{Id}_F) = I_n$$

ce qui prouve que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible et que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))^{-1}$.

- Réciproquement, supposons $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ inversible. Puisque $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que u est injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On sait que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Or $u(x) = 0_F$, donc $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(x) = 0$ et, comme $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible, $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(x) = 0$ (toutes les coordonnées de x sont nulles), ce qui signifie que $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$. Puisque $0_E \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Ainsi u est injective et avec $\dim(E) = \dim(F)$, on en déduit que u est un isomorphisme. □

Exercice d'application 31.27. ♨ En déterminant l'endomorphisme Φ associé à la matrice suivante relativement à la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$, montrer que cette matrice est inversible et donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

➥

Corollaire 31.28 - L'inversibilité à gauche (resp. à droite) équivaut à l'inversibilité.

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

Démonstration.
Une matrice carrée A peut se voir comme représentant un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie n dans une base $\mathcal{B}_E$ de E au départ et à l'arrivée (cf. Théorème 31.21).

Si A est inversible à droite (resp. à gauche), alors il existe une matrice carrée B telle que $AB = I_n$ (resp. $BA = I_n$). En notant v l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(v) = B$, on a $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = I_n = AB = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u \circ v)$ donc $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ (resp $v \circ u = \mathrm{Id}_E$).

Donc, si A est inversible à droite ou à gauche, u l'est aussi.

On a vu dans le chapitre *Applications linéaires* que si u est inversible à droite ou à gauche, u est inversible et donc, en utilisant la proposition précédente, si A est inversible à droite ou à gauche, alors A est inversible. □

31.3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 31.29 - Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'application linéaire

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}.$$

Remarque 31.30. Avec les notations précédentes, la matrice de l'application linéaire φ_A dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est la matrice A.

Exercice d'application 31.31. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'endomorphisme φ_A canoniquement associé à A.

➥

Définition 31.32 - Noyau, image d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

- On appelle **noyau** de la matrice A et l'on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de l'application linéaire φ_A canoniquement associée à A. Autrement dit,
$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\varphi_A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})} \right\}.$$
- On appelle **image** de A et l'on note $\mathrm{Im}(A)$ l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A. Autrement dit,
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\varphi_A) = \{AX \,:\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\}.$$

Exercice d'application 31.33. On reprend la matrice A de l'Exercice d'application 31.31. Déterminer le noyau de A et l'image de A.

➥

On retiendra (pour bien comprendre pourquoi, vous pouvez relire l'Exercice d'application précédent), que pour une matrice :

1. Les colonnes engendrent l'image.
2. Les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Proposition 31.34 - Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application associée.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le rang de A est aussi le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Démonstration.
Le rang A est aussi le rang de la famille formée par les colonnes de A. Or la famille des colonnes de A, engendre $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ (car c'est la famille image d'une base de l'espace de départ de φ_A) donc $\mathrm{rg}(\varphi_A) = A$. □

Théorème 31.35 - Théorème du rang pour les matrices.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = p \quad \text{c'est-à-dire} \quad \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$

Démonstration.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On applique le théorème du rang à l'application φ_A canoniquement associée à A :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi_A)) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})).$$

□

Remarque 31.36 (♥). L'image d'une matrice A est toujours engendrée par les colonnes de la matrice (car les colonnes sont par définition les images des vecteurs de la base canonique par φ_A). Ainsi, une base de l'image était trouvable de tête dans l'Exercice d'application 31.33.

Pour trouver un élément du noyau, il suffit de trouver une combinaison linéaire des colonnes. Par exemple, notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ et C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. Si on trouve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})}$, alors cela traduit que $\lambda_1 \varphi_A(e_1) + \lambda_2 \varphi_A(e_2) + \lambda_3 \varphi_A(e_3) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})}$, donc $\varphi_A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})}$, donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$.

Dans l'Exercice d'application 31.33, une fois la base de l'image déterminée (et donc la dimension), on pouvait trouver de tête un élément du noyau. Avec le théorème du rang, on obtient alors que cet unique vecteur forme une base du noyau.

Exercice d'application 31.37. Déterminer « de tête » une base du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

➥

Proposition 31.38 - Caractérisation des matrices inversibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée. La matrice A est inversible si, et seulement si, l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est satisfaite.

(i) $\mathrm{Ker}(A) = \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}$.

(ii) $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

(iii) la famille $(C_1, \dots, C_n)$ des vecteurs colonnes de A engendre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

(iv) $\mathrm{rg}(A) = n$.

Démonstration.
Notons $\varphi_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors A est la matrice de cette application dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

$$\mathrm{Ker}(A) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{0\} \iff \varphi_A \text{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \iff A \text{ est inversible.}$$

D'après le théorème du rang, $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$. Donc,

$$\varphi_A \in \mathrm{GL}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) \iff \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0 \iff \dim(\mathrm{Im}(A)) = n \iff \mathrm{rg}(A) = n \iff \mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

Enfin, comme les colonnes de A engendrent $\mathrm{Im}(A)$, les points **(iii)** et **(iv)** sont équivalents. □

31.4 Changements de bases

31.4.1 Changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

Soit x un vecteur de E dont on note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, autrement dit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i.$$

On note X et X' les matrices colonnes représentant x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(x) = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Comment passe-t-on de X' à X ?

Comme $x = \mathrm{Id}_E(x)$, on peut écrire :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(x).$$

La j-ième colonne de la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x)$ est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Définition 31.39 - Matrice de passage entre deux bases.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** (ou **matrice de changement de base**) de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ dont la j-ième colonne (pour tout $j \in [\![1, n]\!]$) est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc la matrice carrée de type $n \times n$:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Remarque 31.40. Avec les notations de la définition, on a

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$$

telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

ATTENTION

$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ (attention au sens de l'écriture !).

Proposition 31.41 - Formule de changement de base pour les vecteurs.

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Alors

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(x).$$

Remarque 31.42. C'est souvent dans « l'autre sens » qu'on utilise cette formule, car $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est facile à trouver et on connaît $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x)$. On cherche alors souvent à obtenir $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(x)$, ce qui peut se faire avec le calcul suivant.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(x) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Exercice d'application 31.43. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ deux bases de $\mathbf{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $Q = 1 - 3X + X^2$ dans la base $\mathcal{B}'$ à l'aide de la formule de changement de base pour les vecteurs.

➥

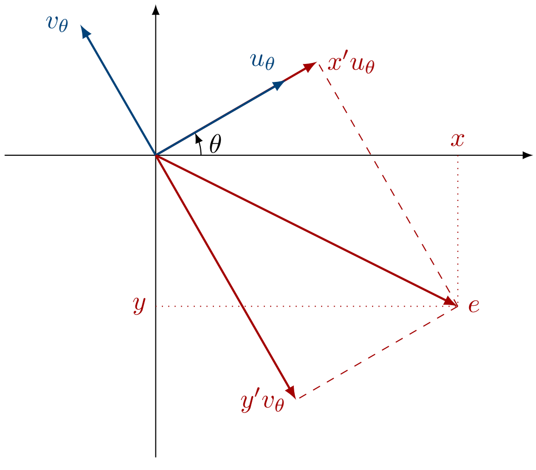
Remarque 31.44. On retrouve la formule de Taylor ! On a $Q(1) = -1$, $Q'(1) = -1$ et $Q''(1) = 2$, donc

$$Q = Q(1) + Q'(1)(X-1) + \frac{Q''(1)}{2}(X-1)^2 = -1 - (X-1) + (X-1)^2.$$

Exercice d'application 31.45. ♨ ♥ Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Considérons $E = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ la base (u_θ, v_θ) avec $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$, $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (en exercice : vérifier que c'est bien une base).

1. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2. Soit $e \in \mathbf{R}^2$. On note (x, y) les coordonnées de e dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de e dans $\mathcal{B}'$.

➥



31.4.2 Propriétés des matrices de changement de base

Proposition 31.46 - Inverse d'une matrice de passage.

Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$, autrement dit

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \qquad \text{et} \qquad (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

Réciproquement, toute matrice inversible $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ constituée des vecteurs colonnes de la matrice M.

Démonstration.

- Tout d'abord, puisque la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est une matrice représentant l'application Id_E qui est bijective, elle est inversible. Plus précisément,

$$(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = (\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E))^{-1} = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

- Pour la réciproque, il suffit de vérifier que les vecteurs colonnes de M forment bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Puisque M représente l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui transforme la base canonique $\mathcal{B}$ en les vecteurs colonnes de M, ces derniers vecteurs forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ si et seulement si l'endomorphisme est bijectif, ce qui est le cas car M est inversible. □

Exemple 31.47. On considère l'espace $\mathbf{R}^2$ muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}'(e_1', e_2')$ vérifiant :

$$e_1' = 2e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad e_2' = 3e_1 + 2e_2.$$

Soit x dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2, 3)$. On cherche ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

On écrit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ facilement :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On détermine l'inverse de cette matrice. Après calculs,

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

puis x a pour coordonnées $(-5, 4)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exemple 31.48 (♨). Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, considérons $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ avec :

$$e_1' = (1, 0, 0), \qquad e_2' = (1, 1, 0), \qquad e_3' = (1, 1, 1).$$

On a

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or $e_1' = e_1$ et $e_2' = e_1 + e_2$, donc $e_2 = e_2' - e_1'$. Enfin, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ donc $e_3 = e_3' - e_2'$. Ces observations permettent d'inverser P « de tête »

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

31.4.3 Formules de changement de bases

Proposition 31.49 - Formule de changement de bases pour les matrices.

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E, $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{où} \quad P = P_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E} \quad \text{et} \quad Q = P_{\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F}$$

ou encore

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = (P_{\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F})^{-1} \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times P_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E}.$$

Démonstration.
On a $u = \mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_E & \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = A & \mathcal{B}_F \\
E \arrow[rr, "u"'] & & F \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"', "{\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(\mathrm{Id}_F) = P_{\mathcal{B}'_F \to \mathcal{B}_F} = \left[P_{\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F}\right]^{-1}}"] \\
E \arrow[u, "\mathrm{Id}_E"', "{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E}}"] \arrow[rr, "u"] & & F \\
\mathcal{B}'_E & \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = A' & \mathcal{B}'_F
\end{tikzcd}$$

Ainsi

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(\mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(\mathrm{Id}_F)\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E).$$

□

Corollaire 31.50 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Alors

$$A' = P^{-1}AP$$

ou encore

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u)P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}.$$

Démonstration.
C'est un cas particulier de la proposition précédente. □

Définition 31.51 - Matrices semblables.

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont dites **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

Remarque 31.52. Autrement dit, en interprétant P comme une matrice de passage, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes, prises simultanément comme base de départ et d'arrivée.

Exercice d'application 31.53. On se place dans $\mathbf{R}_3[X]$ et on se donne les bases $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$ et $\mathcal{B}' = (X^3, X^2(X+1), X(X+1)^2, (X+1)^3)$.

On considère l'endomorphisme de dérivation d'un polynôme $D : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X]. \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$

1. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(D)$.

2. Soit $Q = 2X^3 + X^2(X+1) - 3X(X+1)^2 + (X+1)^3$. Déterminer les coordonnées de $D(Q)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

➥

Exercice d'application 31.54. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et considérons les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}\,(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\,(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$. On admet que $E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^4$. On considère la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Déterminer la matrice de s relativement à la base canonique.

➥

31.5 Rangs : tout s'imbrique

Rappelons rapidement les différentes notions de rang rencontrées jusqu'ici.

1. **Rang d'une famille de vecteurs**. Le rang d'une famille finie $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs est la dimension de $\mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n)$. On note $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n)$.

2. **Rang d'une application linéaire**. Une application linéaire u d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F est de rang fini.

   (a) Par définition, son rang $\mathrm{rg}(u)$ est la dimension de $\mathrm{Im}(u)$.

   (b) Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

3. **Rang d'une matrice**. Le rang d'une matrice A est le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

31.5.1 Rang des familles de vecteurs

Lemme 31.55 - Rang d'une famille de vecteurs et isomorphisme.

Soit $u : E \to F$ un isomorphisme entre deux espaces vectoriels E et F. Alors, si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille de E, on a

$$\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{rg}(u(v_1), \dots, u(v_n)).$$

Démonstration.
On considère u' la restriction de u à $\mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n)$. On a $\mathrm{Im}(u') = \mathrm{Vect}\,(u(v_1), \dots, u(v_n))$ donc

$$\mathrm{rg}(u') = \mathrm{rg}(u(v_1), \dots, u(v_n)).$$

Par ailleurs, en tant que restriction d'une bijection, u' est injective. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u')) + \dim(\mathrm{Im}(u')) = \dim(\mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n))$, donc $\dim(\mathrm{Im}(u')) = \dim(\mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_n))$ donc

$$\mathrm{rg}(u') = \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n).$$

Finalement, $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{rg}(u(v_1), \dots, u(v_n))$. □

Théorème 31.56 - Lien entre rang d'une famille de vecteurs et le rang de la matrice associée.

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
Alors le rang de cette famille est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base de E.

Démonstration.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrons que $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

Déjà, φ est une application linéaire d'après la première partie de ce chapitre et c'est une bijection car $\mathcal{B}$ est une base et que tout vecteur de E se décompose de manière unique dans $\mathcal{B}$.

Ainsi, d'après le lemme précédent, le rang de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est aussi le rang de la famille de matrices-colonnes qui les représentent dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire le rang de A. □

31.5.2 Rang des matrices et applications linéaires

Théorème 31.57 - Lien entre le rang d'une matrice et d'une application linéaire.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
Le rang d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est égal au rang de la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$.
En particulier,

- le rang d'une application linéaire est égal à celui de toute matrice la représentant (matrices différentes suivant les bases choisies) ;
- le rang d'une matrice est celui de n'importe quelle application linéaire représentée par cette matrice ;
- deux applications linéaires pouvant être représentées par la même matrice ont le même rang.

Démonstration.
Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$.

Par définition, on a $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_p))$ et d'après le théorème précédent, on a

$$rg(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p))) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)),$$

la dernière égalité découlant du fait que : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = M_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p))$. □

Corollaire 31.58 - Rang de matrices qui représentent la même application linéaire.

Deux matrices représentant la même application linéaire dans des bases différentes ont le même rang.
En particulier, si A et P sont deux matrices carrées de même format, P étant inversible, alors en posant $A' = P^{-1}AP$, on a $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A)$. Cette dernière propriété signifie que **deux matrices semblables ont le même rang.**

Corollaire 31.59 - Injectivité, surjectivité et rang.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. On rapporte E et F respectivement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit u une application linéaire de E dans F et $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$.

- u est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = p$ (nombre de colonnes de A).
- u est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = n$ (nombre de lignes de A).
- u est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = n = p$ (nombre commun de lignes et de colonnes de A, A étant carrée).

Si $E = F$, l'endomorphisme u est bijectif si, et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.
En particulier, une matrice A est inversible si, et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

31.5.3 Rang et pivot de Gauss

Théorème 31.60 - Conservation du rang après multiplication par une matrice inversible.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ et $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ deux matrices inversibles. On a alors :

$$\mathrm{rg}(RA) = \mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg}(RAQ) = \mathrm{rg}(A).$$

Autrement dit, on ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant à gauche et/ou à droite par une matrice inversible.

Démonstration.
On note :

- $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$;
- $\mathcal{B}_n = (f_1, \dots, f_n)$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$;
- $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A ;
- $\mathcal{B}'_p = (e'_1, \dots, e'_p)$ la base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ formée des vecteurs colonnes de Q, de sorte que $Q = P_{\mathcal{B}_p \to \mathcal{B}'_p}$;
- $\mathcal{B}'{}_n = (f'_1, \dots, f'_n)$ la base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ construite pour que l'on ait $R = P_{\mathcal{B}'_n \to \mathcal{B}_n}$.

On a alors :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(\varphi_A), \qquad Q = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'{}_p,\mathcal{B}_p}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})}) \qquad \text{et} \qquad R = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}'_n}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})})$$

de sorte que

$$AQ = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_p,\mathcal{B}_n}(\varphi_A \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_p,\mathcal{B}_n}(\varphi_A), \quad RA = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}'_n}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})} \circ \varphi_A) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}'_n}(\varphi_A)$$

et $RAQ = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_p,\mathcal{B}'_n}(\varphi_A)$. Les matrices A, AQ, RA et QAR représentent la même application linéaire (dans des bases différentes) donc elles ont même rang. □

Proposition 31.61 - Conservation du rang, noyau, image après opérations élémentaires.

1. Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice conserve le rang de celle-ci.
2. Toute opération élémentaire sur les lignes d'une matrice conserve le noyau de celle-ci.
3. Toute opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice conserve l'image de celle-ci.

Démonstration.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On rappelle que toute opération élémentaire sur les lignes (resp. les colonnes) de A est une multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible.

- Le rang est conservé après une opération élémentaire sur les lignes (resp. les colonnes) d'après le théorème précédent.
- Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$,
  $$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff PAX = 0 \iff X \in \mathrm{Ker}(PA).$$
  Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(PA)$.
- Soit $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$,
  $$X \in \mathrm{Im}(A) \iff \exists Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}),\ AY = X \iff \exists Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}),\ APZ = X \iff X \in \mathrm{Im}(AP),$$
  l'équivalence centrale provenant de l'inversibilité de P. Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(PA)$. □

Lemme 31.62.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ tels que

$$A = UJ_{n,p,r}V$$

où $J_{n,p,r}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont tous nuls, sauf ceux de position (i,i), avec $i \in [\![1, r]\!]$, qui valent 1. En utilisant une notation par blocs, on a :

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_{r,r} & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$$

Démonstration.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ de dimension $p - r$ et admet par conséquent un supplémentaire (que nous noterons H) de dimension r. Considérons

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{\in H}, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_p}_{\in \mathrm{Ker}(A)})$$

adaptée à la décomposition $H \oplus \mathrm{Ker}(A)$. On sait qu'alors $(Ae_1, \dots, Ae_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. Or, pour $k \in [\![r+1, p]\!]$, $Ae_k = 0$, donc la famille $(Ae_1, \dots, Ae_r)$ est encore génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. Or cette famille contient $r = \dim(\mathrm{Im}(A))$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(A)$. En particulier cette famille est libre. Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-r}$ tels que $\mathcal{C} = (Ae_1, \dots, Ae_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-r})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Notons φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_A) = J_{n,p,r}$:

$$\begin{array}{c} \\ Ae_1 \\ Ae_2 \\ \vdots \\ Ae_r \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-r} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_r & e_{r+1} & \cdots & e_p \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ à la base $\mathcal{B}$ et Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ à la base $\mathcal{C}$ alors, d'après les formules de changement de bases, $J_{n,p,r} = Q^{-1}AP$, ou encore $A = QJ_{n,p,r}P^{-1}$. On en déduit le résultat puisque les matrices de passage sont inversible. $\square$

Exemple 31.63. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on a $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, donc $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$. Avec le théorème du rang, on en déduit $\dim(\mathrm{Im}(A)) \geqslant 2$. Or C_1 et C_2 sont non colinéaires, donc (C_1, C_2) est une base de $\mathrm{Im}(A)$. Ensuite, avec le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$ et (D) est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C)$ soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Par exemple, $C = e_1$ convient (preuve laissée en exercice).
Vérifions que $\mathcal{E} = (e_1, e_2, D)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Comme cette famille comporte autant de vecteurs que la dimension, il nous suffit de vérifier qu'elle est libre. Or la famille (e_1, e_2) est libre et $D \notin \mathrm{Vect}\,(E_1, E_2)$ (il suffit de regarder la troisième composante), donc (e_1, e_2, D) est bien une famille libre donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Puisque $Ae_1 = C_1$, $Ae_2 = C_2$ et $AD = 0$, l'application linéaire canoniquement associée à A a pour matrice relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$:

$$J_{3,3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi expliciter les matrices U et V du lemme.

- U est la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à la base $\mathcal{C}$, à savoir

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- V est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base (e_1, e_2, e_3), et puisque $D = E_1 + E_2 - E_3$, alors $E_3 = E_1 + E_2 - D$, d'où

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 31.64 - Rang d'une transposée.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Démonstration.
D'après le théorème précédent, en notant $r = \mathrm{rg}(A)$, il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ telles que $A = UJ_{n,p,r}V$. Alors $A^\top = V^\top J_{n,p,r}^\top U^\top$. Or $J_{n,p,r}^\top = J_{n,p,r}$, d'où $\mathrm{rg}(J_{n,p,r}^\top) = r$. De plus, comme U et V sont inversibles, alors $U^\top$ et $V^\top$ le sont également et donc $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(J_{n,p,r}^\top) = r$. $\square$

31.5.4 Rang et système linéaire

Dans le chapitre sur les matrices, on a vu comment associer une matrice A et un vecteur colonne B à un système linéaire (S) afin que celui-ci soit équivalent à la résolution de $AX = B$ d'inconnue X.

Proposition 31.65 - Lien entre système linéaire, rang et image.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On s'intéresse au système $AX = B$.

1. Si $B = 0$, c'est-à-dire si le système est homogène, alors l'ensemble des solutions de $AX = 0$ est $\mathrm{Ker}(A)$.
2. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.
3. Si A est carrée et inversible, alors le système $AX = B$ possède une unique solution $A^{-1}B$. Dans ce cas, le système est dit de **Cramer**.

Démonstration.
Les deux premiers points sont immédiats.

Pour le troisième, si A est inversible, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a $AX = B$, ce qui équivaut à $X = A^{-1}B$. □

Définition 31.66 - Rang d'un système linéaire.

On appelle **rang d'un système** le rang de sa matrice associée.

Proposition 31.67 - Lien entre le rang et le nombre de pivots.

Le rang d'un système est le nombre de pivots de n'importe quelle réduite de Gauss de ce système.

Démonstration.
Soit (S) un système et M sa matrice associée.

En appliquant aux lignes de M les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de (S) pour trouver sa réduite de Gauss, on obtient une matrice M'.

La matrice associée à la réduite de Gauss du système (S) est cette matrice M' donc (S) et M ont le même nombre de pivots. Ainsi le rang de (S) est le nombre de pivots de sa réduite de Gauss. □

Corollaire 31.68 - Dimension de l'espace vectoriel des solutions.

Soit (S) un système linéaire **homogène** à n lignes et p inconnues. On note $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sa matrice associée.
Alors, la dimension de l'ensemble des solutions de (S) est $p - \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration.
On a vu que l'ensemble des solutions de $AX = 0$ est $\mathrm{Ker}(A)$, or par le théorème du rang, celui-ci est de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$. □

Exercice d'application 31.69. Justifier sans presque aucun calcul que $P = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x + y = 0 \text{ et } x - z + 3t = 0 \right\}$ est un plan vectoriel.

➥

Remarque 31.70. On savait déjà qu'un plan était décrit au minimum par une équation dans $\mathbf{R}^3$ (on précise au minimum car on peut décrire un plan par plusieurs équations proportionnelles).
On peut généraliser un peu l'exercice précédent : dans $\mathbf{R}^4$, un système d'équations cartésiennes d'un plan contient deux équations au minimum. Dans $\mathbf{R}^n$, un système d'équations cartésiennes d'un plan contient $n-2$ équations au minimum.

31.5.5 Utilisation du pivot de Gauss pour trouver le rang, le noyau, l'image d'une matrice

Méthode 31.71. *Utilisation du pivot de Gauss pour trouver le rang, le noyau, l'image d'une matrice*
En utilisant les Propositions 31.61 et 31.67, on peut utiliser efficacement la méthode de réduction de Gauss pour déterminer le rang, le noyau ou l'image d'une matrice.

1. Si on fait des opérations sur les lignes, le nombre de pivots donne le rang de la matrice et le système linéaire à résoudre pour trouver le noyau de la matrice est immédiat.
2. Si on fait des opérations sur les colonnes, le nombre de pivots donne le rang de la matrice et les colonnes avec pivot forment une base de l'image de la matrice.

Démonstration.
Justifions le deuxième point. Considérons une application linéaire $u : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associée à une matrice A. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $(f_1, \dots, f_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Après pivots sur les colonnes on obtient une matrice de la forme :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u(v_1) & u(v_2) & \dots & u(v_r) & u(v_{r+1}) & \dots & u(v_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{b_{1,1}} & 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} & \boxed{b_{2,2}} & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \dots & \boxed{b_{i,r}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,r} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array}$$

où la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de vecteurs de E obtenue à partir de $(e_1, \dots, e_p)$ en faisant les mêmes opérations sur les colonnes qui ont permis d'obtenir B. On a alors

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\left(u(v_1), \dots, u(v_p)\right) = \operatorname{Vect}\left(u(v_1), \dots, u(v_r)\right)$$

Le nombre de pivots étant égal au rang, on a $\dim(\operatorname{Im}(u)) = r$ et la famille $(v_1, \dots, v_r)$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$. □

Exercice d'application 31.72. Trouver une base de l'image et du noyau de

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+2y-z, 2x+3y-3z, 4x+5y-7z, x+y-2z) \end{array}$$

➥

Exercice d'application 31.73. La famille $((1,2,3),(1,1,1),(5,1,0),(4,1,-6))$ est-elle une famille libre de $\mathbf{R}^3$? Montrer que la famille est génératrice de $\mathbf{R}^3$ et en extraire une base.

➥

Exercice d'application 31.74. La famille $((1,2,3),(2,3,4))$ est-elle génératrice de $\mathbf{R}^3$? Montrer que la famille est libre et la compléter en une base.

➥

Questions de cours

1. Donner la définition de rang d'une matrice.
2. Si $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ (resp. $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$) est une base de E (resp. F) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, recopier l'égalité ci-après en remplaçant les ? par ce qu'il faut.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_F}(?, \dots, ?) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} ? & ? & \dots & ? \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{array} \end{array}$$

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in E$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Donner la formule qui permet de calculer la matrice de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ à partir de la matrice de l'application u entre les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
4. Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$?
5. Notons $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F et G. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G)$. Donner la formule permettant d'obtenir la matrice de $v \circ u$ (entre les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$) à partir des matrices de u (entre les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$) et de v (entre les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$).
6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbf{N}$. Donner la formule permettant d'obtenir la matrice de u^n (dans la base $\mathcal{B}_E$).
7. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une caractérisation de l'inversibilité de u à l'aide de sa matrice représentative entre les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Le cas échéant, donner la matrice de u^{-1} (entre les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$).
8. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Donner l'application linéaire canoniquement associée à A.
9. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définir le noyau de A (resp. l'image de A).
10. Énoncer le théorème du rang pour les matrices.
11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Donner une caractérisation de l'inversibilité de A à l'aide du noyau de A (resp. de l'image de A, resp. du rang de A).
12. Définir la matrice de passage entre deux bases.
13. Donner la formule de changement de base pour les vecteurs.
14. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel. Quel est l'inverse de la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$?
15. Donner la formule de changement de bases pour les matrices.
16. Définir le rang d'un système linéaire.
17. Donner le lien entre le rang d'un système linéaire et le nombre de pivots obtenus après une réduction de Gauss.