

CHAPITRE 30

ENSEMBLES FINIS ET
DÉNOMBREMENT

Dans toute la suite, n désignera un entier naturel non nul. Le but du chapitre est d'apprendre à **dénombrer** des ensembles finis, c'est-à-dire de donner leur nombre d'éléments.

30.1 Ensembles finis

Intuitivement, un **ensemble fini de cardinal** n est un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ comportant n éléments. Plus formellement, on a la définition suivante.

Définition 30.1 - Ensemble fini, cardinal.

On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- (a) E est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son **cardinal** est nul ;
- (b) E est en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$, auquel cas on dit que son **cardinal** est n .

Le cardinal d'un ensemble fini E est noté $\text{Card}(E)$ (la notation $|E|$ est aussi au programme).

Exemple 30.2. 1. $\text{Card}(\{\odot, \square, \circ, \heartsuit\}) = 4$.

2. $\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'application $\begin{array}{ccc} \llbracket 1, n \rrbracket & \longrightarrow & \mathbf{U}_n \\ k & \longmapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array}$ est bijective, donc $\mathbf{U}_n$ est fini et $\text{Card}(\mathbf{U}_n) = n$.

Exemple 30.3 ($\frac{\text{III}}{\text{I}}$). Soit $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ avec $p \leq q$. On a $\begin{array}{ccc} \llbracket 1, q - p + 1 \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket p, q \rrbracket \\ k & \longmapsto & k - p + 1 \end{array}$ bijective, donc

$$\text{Card}(\llbracket p, q \rrbracket) = q - p + 1.$$

Théorème 30.4 - Cardinal d'une partie, cas d'égalité.

Soit E un ensemble fini et F une partie de E .

- 1. F est un ensemble fini et $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.
- 2. $F = E \iff \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$.

Pour montrer que deux ensembles finis A et B sont égaux, on peut donc se contenter de montrer que $A \subset B$ et $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$, au lieu de montrer $A \subset B$ et $B \subset A$.

Proposition 30.5 - Effet d'une application sur le cardinal.

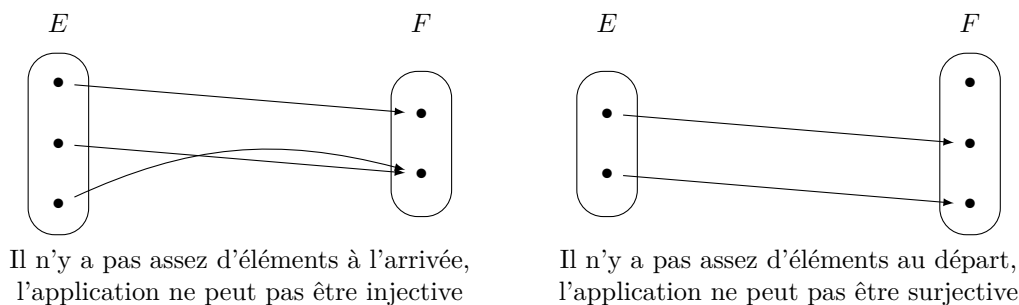
Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F .

- 1. $f(E)$ est un ensemble fini, $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(F)$ et $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$.
- 2. L'application f est injective, si et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et dans ce cas $\text{Card}(F) \geq \text{Card}(E)$.
- 3. L'application f est surjective si, et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ et dans ce cas $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.
- 4. L'application f est bijective si, et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Démonstration.

Notons n le cardinal de E .

1. La finitude de $f(E)$ est évidente car $f(E)$ est une partie de F qui est un ensemble fini. Même chose pour la majoration par $\text{Card}(F)$. On a $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ donc puisque E possède n éléments, $f(E)$ a au plus n éléments distincts donc $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(F)$.
2. $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ si, et seulement si, tous les éléments de E ont des images distinctes par f , autrement dit si, et seulement si, f est injective. Comme $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(F)$ et que $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ on a le résultat.
3. Si f est surjective, alors $f(E) = F$ donc $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$.
Réciproquement, si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$, alors $f(E) = F$ car $f(E)$ est un sous-ensemble de F et donc f est surjective.
4. C'est une conséquence de 3. et 4. □


Corollaire 30.6 - Caractérisation des applications bijectives entre ensembles finis.

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, $f : E \rightarrow F$. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Démonstration.

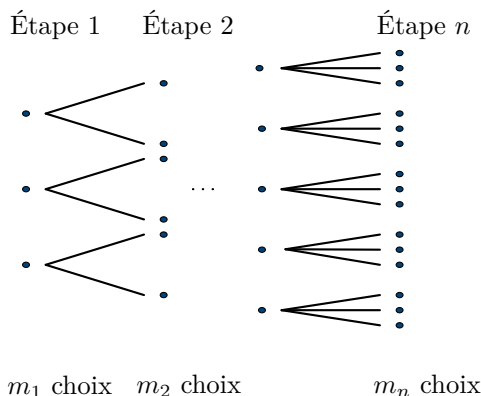
Si f est injective, alors $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$, donc $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ et donc f est aussi surjective, donc bijective.

Si f est surjective, alors $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$, donc $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et donc f est aussi injective, donc bijective. □

30.2 Principe multiplicatif


Méthode 30.7. Principe multiplicatif

Si on cherche à dénombrer des objets construits en plusieurs étapes, on peut représenter ces objets comme les différentes branches d'un arbre simple :

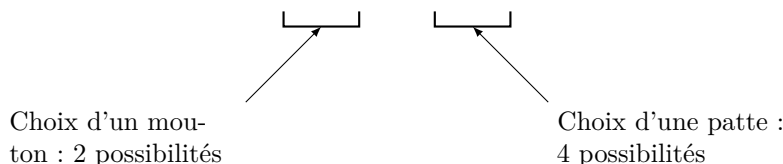


Si il y a n étapes, et qu'à l'étape k , il y a m_k possibilités (m_k branches si on représente la situation avec un arbre), alors le nombre total d'objets est $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

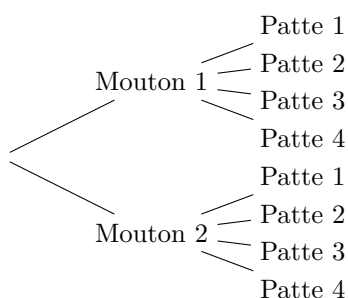
Exemple 30.8. Un berger possède 2 moutons non infirmes dans un pâturage. Pour compter les pattes de moutons présentes dans le pâturage, on peut procéder en deux étapes :

1. on regarde le nombre de choix de moutons qu'il y a ;
2. on regarde le nombre de choix de pattes qu'il y a pour un mouton.

On peut résumer cela avec un dessin :

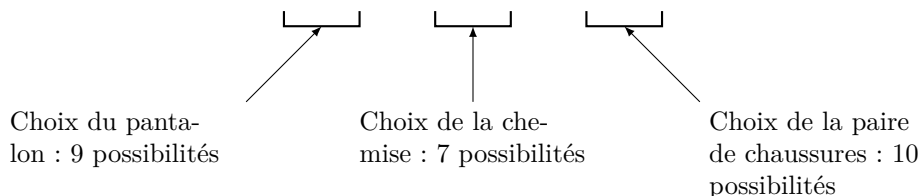


On retrouve qu'il y a 2×4 choix possibles en tout. On peut aussi faire un arbre comme dans la méthode :



Ainsi, il y a $2 \times 4 = 8$ pattes de moutons.

Exemple 30.9. Un jeune homme élégant aime changer d'allure chaque jour. Il possède 9 pantalons différents, 7 chemises différentes et 10 paires de chaussures. De combien de façons différentes le jeune homme pourra-t-il s'habiller ? On peut faire des choix par étapes : on choisit le pantalon, puis la chemise et enfin les chaussures.



En tout, il y a $9 \times 7 \times 10 = 630$ possibilités.

Exercice d'application 30.10. Dans une salle, il y a 10 femmes et 15 hommes. Combien y a-t-il de possibilités pour choisir un couple mixte de danseurs ?



Exercice d'application 30.11. En utilisant l'alphabet français (avec 26 lettres ☺), combien existe-t-il de mots de 3 lettres (successions de 3 lettres : le mot n'a pas forcément de sens) ne se terminant pas par la lettre e ?



30.3 Disjonction de cas

On rappelle que deux ensembles sont dits **disjoints** lorsque leur intersection est vide.

Proposition 30.12 - Cardinal d'une union disjointe de deux ensembles finis.

Soit A et B deux ensembles finis disjoints. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Par récurrence on peut généraliser la proposition précédente.

Corollaire 30.13 - Cardinal d'un union d'ensembles finis deux à deux disjoints.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ une famille de p ensembles finis deux à deux disjoints. L'ensemble $\bigcup_{k=1}^p A_k$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^p A_k\right) = \sum_{k=1}^p \text{Card}(A_k).$$

Démonstration.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite d'ensembles. Posons, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, H_p : « $\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^p A_k\right) = \sum_{k=1}^p \text{Card}(A_k)$ ».

On a $\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^1 A_k\right) = \text{Card}(A_1) = \sum_{k=1}^1 \text{Card}(A_k)$, donc H_1 est vraie.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que H_p soit vraie. On a

$$\begin{aligned} \text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k\right) &= \text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^p A_k \cup A_{p+1}\right) \\ &= \text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^p A_k\right) + \text{Card}(A_{p+1}) && \text{d'après la Proposition} \\ &= \sum_{k=1}^p \text{Card}(A_k) + \text{Card}(A_{p+1}) && \text{d'après } H_p \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \text{Card}(A_k) \end{aligned}$$

Donc H_{p+1} est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, H_p est vraie. $\square$

La méthode consistant à utiliser les résultats précédents pour dénombrer s'appelle le **principe de disjonction**.

Exemple 30.14. On pioche au hasard 7 lettres successivement et avec remise dans un sac qui contient 12 consonnes et 18 voyelles. On note E l'ensemble des tirages où l'on ne pioche que des voyelles ou que des consonnes. Il y a deux sortes de tirages : les tirages où l'on pioche une consonne en premier (on note C l'ensemble des ces tirages) et les tirages où l'on pioche une voyelle en premier (on note V l'ensemble de ces tirages).

- Si on pioche une consonne en premier, alors il y a 12 choix pour la première lettre, 12 choix pour la deuxième lettre etc. Donc en tout 12^7 choix, ce qui signifie que $\text{Card}(C) = 12^7$.
- De même, $\text{Card}(V) = 18^7$.

On a $E = V \cup C$ avec union disjointe (un tirage commence soit par une voyelle, soit par une consonne donc $E = V \cup C$; un tirage ne peut pas commencer à la fois par une voyelle et par une consonne, donc $V \cap C = \emptyset$). Donc $\text{Card}(E) = \text{Card}(V) + \text{Card}(C) = 12^7 + 18^7$.

Exercice d'application 30.15. Dans une classe, il y a 30 étudiants. 18 sont bruns, 9 sont blonds et 3 sont roux. Un professeur envoie au hasard deux élèves différents à la suite au tableau pour faire un exercice.

1. On note B l'ensemble des choix où les deux étudiants sont bruns. Que vaut $\text{Card}(B)$?
2. On note L l'ensemble des choix où les deux étudiants sont blonds. Que vaut $\text{Card}(L)$?
3. On note R l'ensemble des choix où les deux étudiants sont roux. Que vaut $\text{Card}(R)$?
4. On note E l'ensemble des choix où les étudiants ont la même couleur de cheveux. Exprimer E à l'aide de B , L et R . En déduire $\text{Card}(E)$.

➡

Exercice d'application 30.16. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire successivement sans remise. Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

➡

Pour l'instant nous avons une formule pour le cardinal d'une réunion disjointe d'ensembles. La formule suivante précise le cardinal d'une union non nécessairement disjointe.

Corollaire 30.17 - Formule du crible de Poincaré.

Soit A et B deux ensembles finis. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Démonstration.

Exercice d'application 30.18. On considère un jeu de 32 cartes.

1. Soit C l'ensemble des cœurs et D l'ensemble des dames. Que valent $\text{Card}(C)$ et $\text{Card}(D)$?
2. Combien y a-t-il de cartes qui sont soit dame soit cœur dans un jeu de 32 cartes ? On pourra noter A l'ensemble des cartes qui sont soit dame, soit cœur.

**Proposition 30.19 - Cardinal du complémentaire.**

Soit A une partie finie d'un ensemble fini E . Le complémentaire de A dans E est une partie finie et

$$\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

Démonstration.

**Méthode 30.20.** Dénombrer un problème décrit avec « au plus » ou « au moins »

Quand on a un ensemble décrit avec « au plus » (ou « au moins »), on le décompose en ensembles disjoints. Par exemple, si on veut compter l'ensemble A des étudiants d'un lycée pratiquant au plus deux sports, on procédera par disjonction de cas en dénombrant :

- A_0 : l'ensemble des étudiants qui pratiquent 0 sport ;
- A_1 : l'ensemble des étudiants qui pratiquent exactement 1 sport ;
- A_2 : l'ensemble des étudiants qui pratiquent exactement 2 sports.

Ainsi, $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ et puisque l'union est disjointe (si on est dans un ensemble alors on n'est pas dans un autre), $\text{Card}(A) = \text{Card}(A_0) + \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2)$.

Parfois, il est plus simple de passer par le complémentaire ! En effet, si on veut dénombrer l'ensemble B des étudiants qui pratiquent au moins trois sports il est impossible de le faire directement. Par contre, le complémentaire de B est A , donc on a :

$$\text{Card}(B) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A),$$

où E désigne l'ensemble des étudiants du lycée.

Exemple 30.21. On considère trois urnes, qui contiennent chacune 10 boules, qui peuvent être soit rouges soit bleues. La première contient 1 boule bleue, la seconde 2 boules bleues et la troisième 3 boules bleues. On pioche une boule dans chaque urne. On veut savoir combien il existe de tirages où l'on obtient au moins une boule bleue.

Si on veut traiter le problème « directement », il faut distinguer beaucoup de cas : compter les tirages où on obtient exactement une boule bleue, puis exactement deux boules bleues, puis exactement trois boules bleues... C'est long !! On va plutôt utiliser le complémentaire ici.

Notons E l'ensemble des tirages possibles et A l'ensemble des tirages où l'on a au moins une boule bleue.

- Pour dénombrer E , on peut appliquer le principe multiplicatif : il y a 10 choix pour la première boule, 10 choix pour la deuxième boule, 10 choix pour la troisième boule. Donc $\text{Card}(E) = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$.
- On procède de même pour dénombrer $\bar{A}$, qui est l'ensemble des tirages où l'on n'obtient pas de boules bleues (on ne tire donc que des boules rouges). Il y a 9 choix pour la première boule (car il y a 9 boules rouges dans la première urne), 8 choix pour la deuxième et 7 choix pour la troisième. Ainsi, $\text{Card}(\bar{A}) = 9 \times 8 \times 7$.

Avec la formule du complémentaire, on obtient

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\bar{A}) = 10^3 - 9 \times 8 \times 7.$$

Exercice d'application 30.22. On considère un code qui contient 4 chiffres. On note E l'ensemble des codes possibles, et A l'ensemble des codes qui contiennent au moins un chiffre pair. Quel est le cardinal de A ?



30.4 Objets ordonnés, répétitions autorisées

30.4.1 Étude pratique

Quand les objets sont ordonnés (ou qu'on peut les ordonner), on peut appliquer le principe multiplicatif ! Si les répétitions sont autorisées, le nombre de possibilités ne change pas à chaque étape du principe multiplicatif.



Méthode 30.23. Repérer une situation où les objets sont ordonnés, les répétitions sont autorisées

- On peut repérer une situation où les objets sont ordonnés avec l'expression « tirages successifs ». Quand les objets sont « distincts », on peut aussi les ordonner (si on est capable de distinguer deux objets alors on peut convenir, arbitrairement, que l'un des deux est le premier et l'autre le second).
- L'expression « tirage avec remise » correspond à une situation où les répétitions sont autorisées.

Exemple 30.24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut déterminer de combien de façons on peut tirer n cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes.

On a 52 choix pour la première carte, 52 choix pour la seconde carte (car la première carte a été remplacée dans le jeu), etc. D'où $52 \times 52 \times \dots \times 52 = 52^n$ choix au total.

Exercice d'application 30.25. On lance n fois de suite une pièce de monnaie et on regarde si la pièce est tombée sur Pile ou sur Face. Combien y a-t-il de résultats possibles ?



Exercice d'application 30.26. On pioche successivement et avec remise n boules, dans une urne qui contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Combien y a-t-il de tirages possibles ?



30.4.2 Étude théorique

Définition 30.27 - Liste.

Soit E un ensemble et $p \geq 1$ un entier. On appelle **p -liste** d'éléments de E ou **p -uplet** d'éléments de E un élément de E^p .

On rappelle qu'un élément de E^p (donc une p -liste) s'écrit avec des parenthèses : $(x_1, x_2, \dots)$.

Quand on écrit $(x_1, x_2, \dots)$, l'ordre compte (par exemple, $(1, 2) \neq (2, 1)$) et les répétitions comptent (par exemple, $\underbrace{(1, 1, 2)}_{\text{triplet}} \neq \underbrace{(1, 2)}_{\text{couple}}$). Les listes sont donc adaptées pour représenter des tirages lorsque les objets sont ordonnés et les répétitions autorisées.

Proposition 30.28 - Cardinal d'un produit cartésien de deux ensembles.

Soit A et B deux ensembles finis non vides. L'ensemble $A \times B$ est fini et

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

Démonstration.

On a

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(\{(x, y) : x \in A \text{ et } y \in B\}).$$

Ainsi, il faut compter le nombre de couples (x, y) , où $x \in A$ et $y \in B$. On peut commencer par choisir x (il y a $\text{Card}(A)$ possibilités) puis y (il y a $\text{Card}(B)$ possibilités). Donc en tout, il y a $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ choix possibles. $\square$

Corollaire 30.29 - Cardinal d'un produit cartésien d'un nombre quelconque d'ensembles.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_p$ des ensembles finis. Alors

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \cdots \times \text{Card}(A_p).$$

Démonstration.

On procède par récurrence. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles. Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $H_p : \ll \text{Card}(A_1 \times \cdots \times A_p) = \prod_{k=1}^p \text{Card}(A_k) \gg$.

On a $\text{Card}(A_1) = \prod_{k=1}^1 \text{Card}(A_k)$, donc H_1 est vraie.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que H_p soit vraie. On a

$$\begin{aligned} \text{Card}(A_1 \times \cdots \times A_p \times A_{p+1}) &= \text{Card}((A_1 \times \cdots \times A_p) \times A_{p+1}) \\ &= \text{Card}(A_1 \times \cdots \times A_p) \times \text{Card}(A_{p+1}) && \text{d'après la Proposition 30.28} \\ &= \text{Card}(A_1) \times \cdots \times \text{Card}(A_p) \times \text{Card}(A_{p+1}) && \text{d'après } H_p \end{aligned}$$

Donc H_{p+1} est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure. $\square$

Corollaire 30.30 - Nombre de p -listes d'un ensemble à n éléments.

Soit E un ensemble à n éléments et $p \geq 1$ un entier. Le nombre de p -listes ou p -uplets d'éléments de E est égal à n^p .

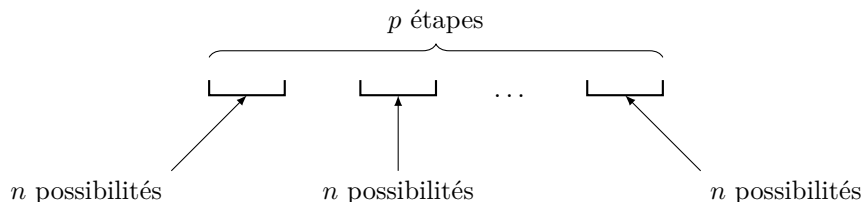
Démonstration.

L'ensemble des p -listes de E est E^p . On a $E^p = E \times E \times \cdots \times E$, donc avec le Corollaire , on a

$$\text{Card}(E^p) = \text{Card}(E) \times \cdots \times \text{Card}(E) = \text{Card}(E)^p = n^p.$$

$\square$

Notons que le dernier résultat précédent n'est qu'une traduction du principe multiplicatif dans un cas particulier :



Exemple 30.31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut déterminer de combien de façons peut-on tirer n cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes.

Puisque l'ordre compte (le tirage est successif) et les répétitions sont autorisées (le tirage s'effectue avec remise), le problème revient à compter les n -listes d'un ensemble à 52 éléments. Il y a donc 52^n possibilités.

Exercice d'application 30.32. Combien y a-t-il de mots de sept lettres contenant le mot « PCSI » (par exemple, « APCSIBC », « CDPCSIE ») ?



Théorème 30.33 - Nombre de parties d'un ensemble fini.

Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration.

30.5 Objets ordonnés, répétitions interdites

30.5.1 Étude pratique

On rappelle que quand les objets sont ordonnés (ou qu'on peut les ordonner), on peut appliquer le principe multiplicatif ! Si les répétitions sont interdites, le nombre de possibilités change à chaque étape du principe multiplicatif (une fois qu'on a choisi un objet, on ne peut plus le choisir à nouveau : il y a donc un objet de moins disponible à chaque étape).



Méthode 30.34. Repérer une situation où les objets sont ordonnés, les répétitions sont interdites

| L'expression « tirage sans remise » correspond à situation où les répétitions sont interdites.

Exemple 30.35. On veut déterminer de combien de façons on peut tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes.

On a 52 choix pour la première carte, 51 choix pour la seconde carte (car la première carte n'a pas été remplacée dans le jeu), etc. Donc le nombre de choix est

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = \frac{52!}{47!}$$

Exercice d'application 30.36. On pioche successivement et sans remise six boules, dans une urne qui contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

→

Exercice d'application 30.37. Une course compte 10 participants. Combien de podiums sont possibles (on rappelle qu'un podium distingue le vainqueur de la course, ainsi que le deuxième et le troisième) ?

→

30.5.2 Étude théorique

Définition 30.38 - Arrangement.

Soit E un ensemble et p un entier naturel non nul. On appelle **p -arrangement** de E une p -liste d'éléments distincts de E .

Exemple 30.39. Dans $E = \{\heartsuit, \square, \circ, \clubsuit\}$, les couples $(\heartsuit, \circ)$ et $(\circ, \heartsuit)$ sont deux 2-arrangements de E différents (l'ordre compte).

Proposition 30.40 - Nombre de p -arrangements d'un ensemble à n éléments.

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel inférieur ou égal à n et strictement positif. Le nombre de p -arrangements de E vaut

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

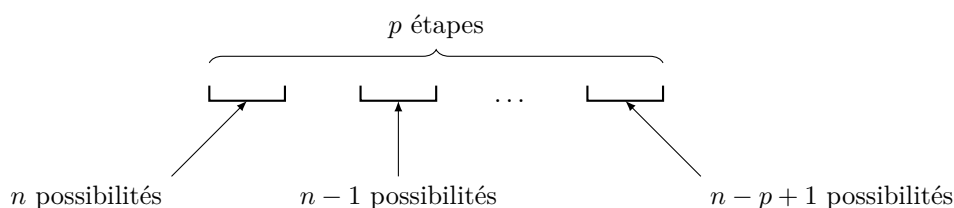
Démonstration.

Pour créer un tel p -arrangement, on procède de la façon suivante :

- choix du premier élément de l'arrangement (n possibilités) ;
- choix du deuxième élément ($n-1$ possibilités) ;
- $\vdots$
- choix du p -ième élément ($n-p+1$ possibilités).

En utilisant le principe multiplicatif, on obtient le résultat voulu. □

Notons que le résultat précédent n'est qu'une traduction du principe multiplicatif dans un cas particulier :



Exemple 30.41. De combien de façon peut-on tirer cinq cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?
Le problème revient à compter les 5-arrangements d'un ensemble à 52 éléments, donc il y a $\frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!}$ possibilités.

Exercice d'application 30.42.  Soit $n \in \mathbf{N}^*$. De combien de façons peut-on asseoir n personnes

- (a) sur un banc rectiligne qui compte n places ?
- (b) autour d'une table ronde qui compte n places ? ?



30.6 Objets non ordonnés, répétitions interdites

30.6.1 Présentation théorique

Exercice d'application 30.43.  Dans une classe de 47 places, de combien de manières peut-on placer 41 élèves ?
En comptant de deux manières différentes, déterminer une formule donnant X le nombre de façons de choisir simultanément 6 places parmi 47.



En généralisant, on retrouve que pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, le nombre de choisir p éléments simultanément parmi n est

$\binom{n}{p}$. On rappelle que $\binom{n}{p}$ vaut 0 si $p > n$ et $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leq n$.

Définition 30.44 - Combinaison.

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \leq n$ un entier naturel.
On appelle **p -combinaison** de E toute partie de E de cardinal p .

Exemple 30.45. Dans $E = \{\ominus, \square, \circ, \heartsuit\}$, les ensembles $\{\ominus, \square, \circ\}$, $\{\square, \ominus, \circ\}$ et $\{\ominus, \square, \circ, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit\}$ désignent les mêmes 3-combinaisons (l'ordre ne compte pas, les répétitions non plus).

Proposition 30.46 - Nombre de p -combinaisons d'un ensemble à n éléments.

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \leq n$ un entier naturel.

Le nombre de p -combinaisons de E est : $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. On appelle ce nombre **coefficient binomial** et on note

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

(se lit « p parmi n »). On convient que si $p \notin \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $\binom{n}{p} = 0$.

Démonstration.

Notons c le nombre de p -combinaisons de E . L'idée consiste à compter le nombre de p -arrangements de E d'une nouvelle manière. Pour compter les p -arrangements, on procède ainsi :

1. on choisit une p -combinaison X de E : il y a c possibilités ;
2. on attribue un numéro à chaque élément de X (puisque un arrangement est une combinaison où l'ordre compte) : il y a $p!$ possibilités (il y a p choix pour l'élément 1, puis $p-1$ choix pour l'élément 2, etc.).

En tout, on obtient que le nombre de p -arrangements de E est $c \times p!$. Or la Proposition 30.40 assure que le nombre de p -arrangements de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$. On a donc

$$c \times p! = \frac{n!}{(n-p)!}$$

ce qui s'écrit aussi

$$c = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

□



Méthode 30.47. Modélisation des tirages simultanés

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages **simultanés** (l'ordre ne compte pas et les répétitions sont interdites).

Exemple 30.48 (Interprétation combinatoire de quelques coefficients binomiaux). Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Il n'y a qu'une seule façon de ne choisir aucun élément dans un ensemble à n éléments, donc $\binom{n}{0} = 1$.
2. Il n'y a qu'une seule façon de choisir simultanément tous les éléments d'un ensemble à n éléments, donc $\binom{n}{n} = 1$.
3. Il y a n façon de choisir un élément dans un ensemble à n éléments, donc $\binom{n}{1} = n$.
4. Si on doit piocher $n-1$ éléments dans un ensemble qui en compte n , cela revient à choisir l'unique élément qu'on ne pioche pas : il y a $\binom{n}{n-1} = n$ possibilités. □

Exercice d'application 30.49. De combien de façons peut-on tirer cinq cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?



Exercice d'application 30.50. Un jeu de tarot contient 78 cartes : 21 atouts, la carte que l'on appelle l'« excuse » et 14 cartes de chacune des 4 couleurs cœur, pique, trèfle et carreau. Combien de tirages simultanés de six cartes contiennent :

1. 2 atouts et 4 trèfles ?
2. exactement un atout et au moins 3 as ?



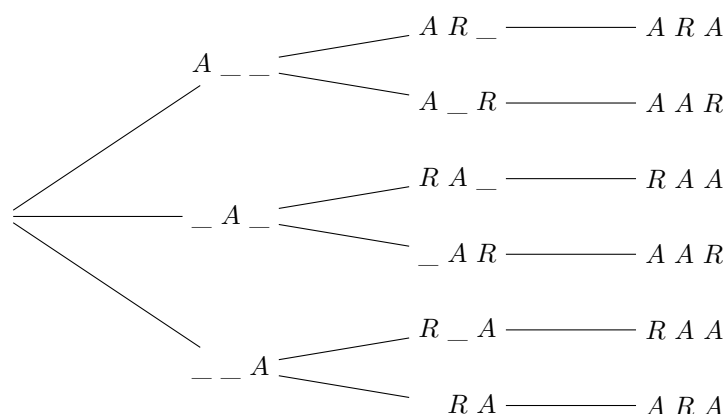
30.6.2 Une application classique : dénombrer des anagrammes



Méthode 30.51. Dénombrer des anagrammes

On appelle **anagramme** d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres mais dans un ordre quelconque. Par exemple, une anagramme de « GALILEE » est « EGAILLE ». Une autre anagramme est aussi « AEEIGLL ».

Pour dénombrer des anagrammes, on peut dénombrer les positions possibles des différentes lettres. Si les lettres sont indiscernables, il faut bien penser à choisir simultanément la position des lettres identiques. Par exemple, cherchons les anagrammes de « ARA ». Si on cherche séparément les positions de chaque lettre, on commet une erreur puisque certains mots sont comptés deux fois.

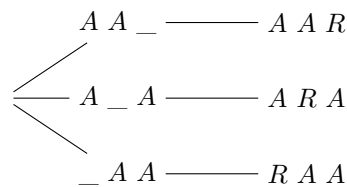


En effet, en procédant ainsi, on considère les lettres discernables $A_1R_2A_3$. Ainsi les mots $A_1R_2A_3$ et $A_3R_2A_1$ sont distincts, alors qu'en réalité on lit le même mot !

Pour traiter correctement cet exercice, il faut placer simultanément les lettres identiques !

- Positions des deux A : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités.
- Position du R : 1 possibilité (il ne reste plus qu'une place si deux lettres sont déjà placées).

En tout, $\binom{3}{2} \times 1 = 3$ anagrammes de « ARA ».



Exemple 30.52. Cherchons le nombre d'anagrammes du mot « BOROROS » (peuple amérindien du Brésil). Pour construire une anagramme de « BOROROS », on peut :

- choisir d'abord la position des « O » : il y a $\binom{7}{3} = 35$ possibilités ;
- choisir la position des « R » : il y a $\binom{7-3}{2} = \binom{4}{2} = 6$ possibilités (en effet, puisque 3 lettres sont déjà positionnées, il ne reste plus que $7 - 3 = 4$ emplacements pour les « R ») ;
- choisir la position des « B » : il y a $\binom{2}{1} = 2$ possibilités ;
- enfin choisir la position du S « S » : il y a $\binom{1}{1} = 1$ possibilité (il ne reste plus qu'une place).

D'où un total de $35 \times 6 \times 2 = 420$ anagrammes possibles.

Exercice d'application 30.53. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « BANANE ».

➡

Exercice d'application 30.54.  Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n , dont chacune peut accueillir autant de boules qu'on le souhaite. De combien de manières peut-on y ranger p boules indiscernables ? Une représentation du problème pour $n = 4$ et $p = 10$ est donnée ci-après.



➡

30.6.3 Démonstration combinatoire de quelques formules

Théorème 30.55 - Formule du binôme de Newton.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(a, b) \in \mathbf{C}^2$.

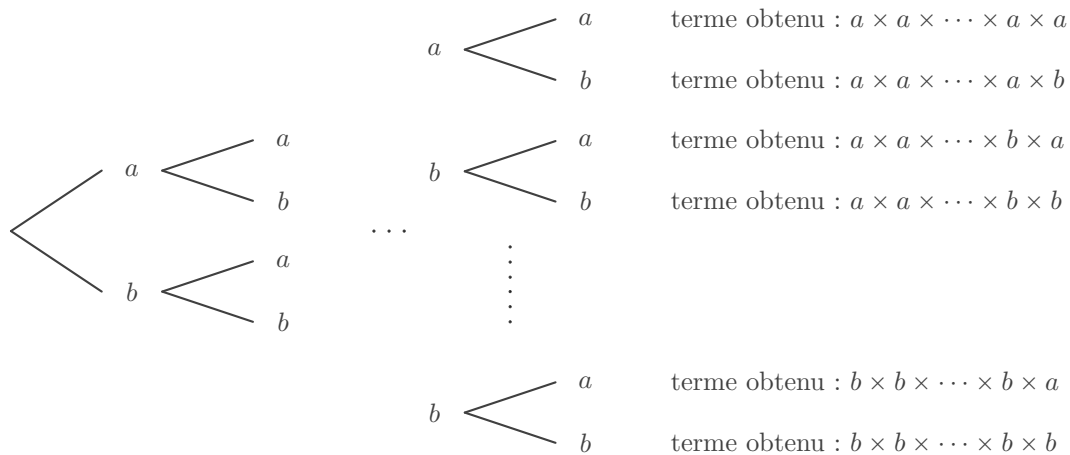
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= (a + b) \times (a + b) \times \cdots \times (a + b) \\ &= (a \times a \times \cdots \times a \times a) + (a \times a \times \cdots \times a \times b) + \cdots \end{aligned}$$

Développer le produit $(a + b)^n$, c'est faire la somme de tous les termes obtenus en faisant les produits des éléments de chaque branche de l'arbre suivant :



Autrement dit, on fait la somme des éléments de l'ensemble suivant (tous les produits possibles de n termes avec des a et des b) :

$$\{c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n : c_1, \dots, c_n \in \{a, b\}\}.$$

Chaque terme de la somme est un produit de n termes, avec des « a » et des « b », donc de la forme $a^k b^{n-k}$ où $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de tels produits $a^k b^{n-k}$? Il y en a autant qu'il y a d'anagrammes du mot

$$\underbrace{aa \dots a}_k \underbrace{bb \dots b}_{n-k}$$

Pour compter ces anagrammes, on place les « a » (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités), puis on place les « b » (il y a $\binom{n-k}{n-k} = 1$ possibilité). En tout, il y a $\binom{n}{k}$ termes $a^k b^{n-k}$. Finalement, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. $\square$

Proposition 30.56 - Symétrie du coefficient binomial.

Soit $(n, p) \in \mathbf{N}^2$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration.

Proposition 30.57 - Formule du capitaine.

Soit $n, p \in \mathbf{N}$.

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration.

Proposition 30.58 - Formule de Pascal.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

Démonstration.

30.7 Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Proposition 30.59 - Nombre d'applications.

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors le nombre d'applications de E dans F est un ensemble fini et $\text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$.

Démonstration.

Proposition 30.60 - Nombre d'applications injectives.

Soit E et F deux ensembles finis, dont on note p et n les cardinaux respectifs. On suppose $p \leq n$. L'ensemble des applications injectives de E dans F est de cardinal $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration.

Remarque 30.61. Dans la proposition précédente, si $n > p$, il n'y a pas d'application injective de E dans F .

Définition 30.62 - Permutation.

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E .

Exemple 30.63. Soit $E = \{\heartsuit, \square, \odot\}$. L'application $\sigma : E \longrightarrow E$ définie par $\sigma(\heartsuit) = \square$, $\sigma(\square) = \heartsuit$, $\sigma(\odot) = \odot$ est une permutation de E . L'application σ « mélange » les éléments de E .

Corollaire 30.64 - Nombre de permutations.

Si E est un ensemble fini non vide de cardinal $n > 0$, alors le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Démonstration.

Puisque le nombre d'éléments de l'espace de départ est égal à celui de l'espace d'arrivée, compter le nombre de bijections revient à compter le nombre d'injections. Ainsi, il y a $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$ bijections de E dans E . $\square$

Exercice d'application 30.65.  Soit $n \geq 3$. Combien y a-t-il de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 1 ?



30.8 Bilan pratique pour les exercices de dénombrement

En pratique, un problème de dénombrement peut être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Propriétés de l'objet à dénombrer		Modélisé par	Exemple fondamental	Écriture
Ordre	Éléments tous distincts			
Non	Oui	Parties d'un ensemble E : on utilise des combinaisons	Tirages simultanés	$\{...;...;...\}$
Oui	Non	p -uplets d'éléments d'un même ensemble E : on utilise des listes	Tirages successifs avec remise	$(...;...;...)$
Oui	Oui	p -uplets d'éléments d'un même ensemble E , sans répétition : on utilise des arrangements	Tirages successifs sans remise	$(...;...;...)$
Non	Non	On modifie la modélisation pour se ramener à l'un des trois cas précédents		

Questions de cours

1. Donner la définition (même intuitive) de la notion de cardinal.
2. Soit E un ensemble fini et $F \subset E$. Que peut-on dire de $\text{Card}(F)$? Si $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$, que peut-on en déduire?
3. Soit E, F deux ensembles finis, $f : E \longrightarrow F$. Si f est injective, quelle inégalité a-t-on sur les cardinaux de E et F ?
4. Soit E, F deux ensembles finis, $f : E \longrightarrow F$. Si f est surjective, quelle inégalité a-t-on sur les cardinaux de E et F ?
5. Soit E, F deux ensembles finis, $f : E \longrightarrow F$. Si f est bijective, quelle relation existe-t-il entre les cardinaux de E et F ?
6. Donner la caractérisation des applications bijectives entre ensembles finis.
7. Soit A, B deux ensembles finis. Quelle condition est suffisante pour avoir $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$?
8. Énoncer la formule du crible de Poincaré.
9. Soit E un ensemble fini et $A \subset E$. Compléter : $\text{Card}(\overline{A}) = \dots$.
10. Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbf{N}^*$. Définir la notion de p -liste (ou de p -uplet) de E .
11. Soit $n, p \in \mathbf{N}^*$. Combien y a-t-il de p -listes dans un ensemble à n éléments?
12. Soit E un ensemble fini et $p \in \llbracket 1, \text{Card}(E) \rrbracket$. Définir la notion de p -arrangement de E .
13. Soit $n, p \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de p -arrangements dans un ensemble à n éléments?
14. Soit E un ensemble fini et $p \in \llbracket 1, \text{Card}(E) \rrbracket$. Définir la notion de p -combinaison de E .
15. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de p -combinaisons dans un ensemble à n éléments?
16. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Exprimer $\binom{n}{p}$ à l'aide de factorielles.
17. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?
18. Soit E, F deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications de E dans F ?
19. Soit E, F deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de E dans F ?
20. Définir la notion de permutation définie sur un ensemble E de cardinal fini.
21. Soit E un ensemble fini. Combien y a-t-il de permutations de E ?