CHAPITRE 29 APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n et p désignent des entiers naturels non nuls. E, F et G désigneront des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

29.1 Définitions et premières propriétés

29.1.1 Définition et exemples

Définition 29.1 - Application linéaire, forme linéaire.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application. On dit que u est une **application linéaire** si

$$\forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

Si $F = \mathbf{K}$ et si u est linéaire, alors on dit alors que u est une **forme linéaire**.

Notation 29.2. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 29.3 - Premières propriétés.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,

1. $u(0_E) = 0_F$.
2. $\forall x_1, \ldots, x_n \in E,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \quad u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$.

Démonstration. 1. $u(0_E) = u(0_E + 0_E) = u(0_E) + u(0_E)$. D'où $0_F = u(0_E)$.
2. Par récurrence sur n à partir de la définition. □

Proposition 29.4 - Caractérisation des applications linéaires.

Soit $u : E \longrightarrow F$. u est linéaire si et seulement si

$$\forall x, x' \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x').$$

Démonstration.
Si u est linéaire, alors on a immédiatement pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, pour tous $x, x' \in E$, $u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$.
Réciproquement, supposons que

$$\forall x, x' \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x').$$

Soit $y, y' \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$.

$$\begin{aligned} u(\alpha y + \beta y') &= \alpha u(y) + u(\beta y') && \text{en choisissant } \lambda = \alpha,\ x = y \text{ et } x' = \beta y' \\ &= \alpha u(y) + \beta u(y') && \text{en choisissant, pour trasnformer } u(\beta y'),\ \lambda = \beta,\ x = y',\ x' = 0 \end{aligned}$$

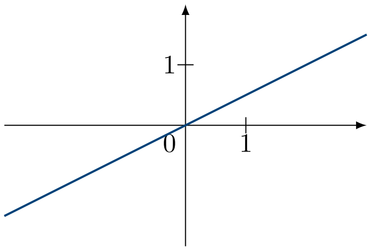
□

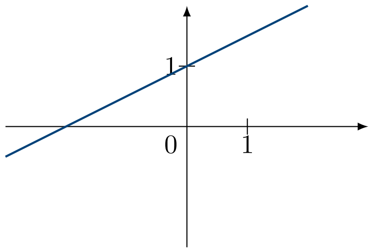
Exemple 29.5.

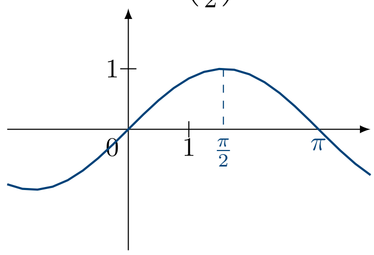
$$u_1 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{2} \end{array} \text{ est linéaire} \qquad u_2 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{2}+1 \end{array} \text{ non linéaire} \qquad u_3 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \text{ non linéaire}$$

car $u_2(0) \neq 0$ par exemple

car $u_3(\pi) \neq 2u_3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ par exemple







Exercice d'application 29.6. Soit $a < b$ des réels. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

2. $\theta : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$

3. $u_3 : \begin{array}{rcl} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+3y+1 \end{array}$

4. $u_4 : \begin{array}{rcl} \mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y-z, 5x+6y-4z) \end{array}$

5. $u_5 : \begin{array}{rcl} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longrightarrow & \bar{z} \end{array}$

6. $u_6 : \begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

7. $u_7 : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^1(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbf{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$

8. $u_8 : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}([a\,;\,b], \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

9. $u_9 : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ M & \longrightarrow & M^\top \end{array}$

10. $u_{10} : \begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P}(a) \end{array}$

➥

Remarque 29.7 (♥). On peut généraliser le point **4.** de l'exercice d'application précédent : une application $u : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^p$ telle que chaque composante de $u(x_1, \dots, x_n)$ est définie comme une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ est une application linéaire.

Remarque 29.8. Si A est un sous-espace vectoriel de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $u|_A$ est elle aussi linéaire.
En effet, s'il est vrai que pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $u(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$, c'est a fortiori vrai pour tous $x, y \in A$.

29.1.2 Opérations et structure

Proposition 29.9 - Combinaison d'applications linéaires.

L'ensemble $\big(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot\big)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

Démonstration.

Proposition 29.10 - Composée de deux applications linéaires.

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration.

Proposition 29.11 - Bilinéarité de la composition.

Pour tous $u, u' \in \mathcal{L}(E,F)$, $v, v' \in \mathcal{L}(F,G)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, on a :

$$v \circ (\lambda u + \mu u') = \lambda v \circ u + \mu v \circ u' \quad \text{et} \quad (\lambda v + \mu v') \circ u = \lambda v \circ u + \mu v' \circ u.$$

Démonstration.
Soit $u, u' \in \mathcal{L}(E,F)$, $v, v' \in \mathcal{L}(F,G)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

1. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}\left(v \circ (\lambda u + \mu u')\right)(x) &= v((\lambda u + \mu u')(x)) \\ &= v(\lambda u(x) + \mu u'(x)) && \text{par linéarité de } u \\ &= \lambda v(u(x)) + \mu v(u'(x)) && \text{par linéarité de } v\end{aligned}$$

d'où $v \circ (\lambda u + \mu u') = \lambda v \circ u + \mu v \circ u'$.

2. Soit $x \in F$.

$$\begin{aligned}((\lambda v + \mu v') \circ u)(x) &= (\lambda v + \mu v')(u(x)) \\ &= \lambda v(u(x)) + \mu v'(u(x)) \\ &= (\lambda v \circ u + \mu v' \circ u)(x)\end{aligned}$$

donc $(\lambda v + \mu v') \circ u = \lambda v \circ u + \mu v' \circ u$. □

Remarque 29.12. Une autre façon de voir la proposition précédente est de dire que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \varphi & \longmapsto & v \circ \varphi \end{array} \qquad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ u \end{array}$$

sont des applications linéaires.

On pourrait donc être tenté de dire que $\mathcal{L}(E)$ muni la composition et de la multiplication externe par un scalaire est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Ce n'est a priori pas vrai car les éléments de $\mathcal{L}(E)$ ne sont pas tous inversibles pour la loi $\circ$ (c'est-à-dire bijectifs).

29.1.3 Endomorphismes

Définition 29.13 - Endomorphisme.

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 29.14. $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (d'après la Proposition 29.9).

Définition 29.15 - Homothétie.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. L'application $\lambda \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E appelé l'**homothétie de E de rapport λ**.

Démonstration.
Soit $\alpha \in \mathbf{K}$, $x, x' \in E$.

$$(\lambda \mathrm{Id}_E)(\alpha x + x') = \lambda \mathrm{Id}_E(\alpha x + x') = \lambda \alpha x + \lambda x' = \alpha((\lambda \mathrm{Id}_E)(x)) + (\lambda \mathrm{Id}_E)(x')$$

donc $\lambda \mathrm{Id}_E$ est une application linéaire. Puisque son espace vectoriel de départ est le même que son espace vectoriel d'arrivée, on en déduit que $\lambda \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$. □

Exemple 29.16. **1.** $\begin{array}{rcl} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-5y,-x+y) \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}^2$.

2. $\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$.

3. Pour tout $A \in \mathbf{K}[X]$, $\begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & AP \end{array}$ (multiplication par A) est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$.

4. Pour tout $Q \in \mathbf{K}[X]$, $\begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P \circ Q \end{array}$ (composition à droite par Q) est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$.

Exercice d'application 29.17. Montrer que $u : \begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & (X^3+5X+2)P \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$.

➥

La Proposition 29.10 assure que si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E)$. En particulier, $u \circ u \in \mathcal{L}(E)$ et on peut continuer : $u \circ u \circ u \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ u \circ u \circ u \in \mathcal{L}(E)$, etc. On peut généraliser.

Notation 29.18. On note souvent la composition des endomorphismes de E comme un produit. C'est-à-dire que pour u et v dans $\mathcal{L}(E)$,

$$uv = u \circ v.$$

On notera en particulier la composée n-ième d'un endomorphisme u avec lui-même comme :

$$u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}.$$

Plus précisément, on convient que $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et on note

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u^{n+1} = u \times u^n$$

(ou pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u^{n+1} = u^n \times u$).

ATTENTION

Même si elle est notée comme un produit, la composition n'est PAS commutative. Il vaut mieux la voir comme la multiplication de matrices carrées.

Proposition 29.19 - Formules de « factorisation » avec la composée n-ième.

Soit u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent, alors

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \quad \text{et} \quad u^n - v^n = (u-v) \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-k-1}.$$

Démonstration.
On suppose que u et v commutent.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note H_n : « $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ ». Il est rapide de constater que H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n est vraie.

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= (u+v)(u+v)^n \\
&= (u+v)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n-k} && \text{via } H_n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k+1}v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}u^k v^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n-k+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}u^k v^{n-k+1} + \binom{n}{n}u^{n+1}v^0\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n+1-k} + \binom{n}{0}u^0 v^{n+1}\right) \\
&= u^{n+1} + v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)u^k v^{n-k+1} \\
&= \binom{n+1}{0}u^0 v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^k v^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}u^{n+1}v^0 && \text{Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^k v^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

2. On a

$$\begin{aligned}
(u-v)\sum_{k=0}^{n-1}u^k v^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}u^{k+1}v^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1}u^k v^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}u^k v^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1}u^k v^{n-k} && \text{décalage dans la 1ère somme} \\
&= u^n v^0 + \sum_{k=1}^{n-1}u^k v^{n-k} - \left(u^0 v^n + \sum_{k=1}^{n-1}u^k v^{n-k}\right) \\
&= u^n - v^n
\end{aligned}$$

□

Exemple 29.20. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Puisque Id_E commute avec tout endomorphisme de E, on a les résultats suivants.

1. $u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u = u$.

2. $(u+\mathrm{Id}_E)^3 = (u+\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E) = u^3+3u^2+3u+\mathrm{Id}_E$.

3. $u\circ u - \mathrm{Id}_E = u^2 - \mathrm{Id}_E = (u-\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E)$.

ATTENTION

Comme pour le produit de matrices, on peut avoir $u \circ v = 0$ avec u et v toutes les deux non nulles.

29.1.4 Noyau, Image

Proposition 29.21 - Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Si G est un sous-espace vectoriel de E, alors $u(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2. Si H est un sous-espace vectoriel de F, alors $u^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Définition 29.22 - Noyau, image d'une application linéaire.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On appelle **noyau** de u et on note $\mathrm{Ker}(u)$ l'ensemble des antécédents de 0_F par u.

$$\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}).$$

2. On appelle **image** de u et on note $\mathrm{Im}(u)$ l'ensemble des images des éléments de E par u.

$$\mathrm{Im}(u) = u(E).$$

Remarque 29.23. On a en particulier

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u) == \{y \in F \mid \exists x \in E, u(x) = y\}.$$

Proposition 29.24 - Le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

1. $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E,

2. $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

Exemple 29.25. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f, g deux fonctions continues sur I. On pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} D(I) & \longrightarrow & D(I) \\ h & \longmapsto & h' + ah \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} D(I) & \longrightarrow & D(I) \\ h & \longmapsto & h'' + ah' + bh \end{array}$$

On peut facilement vérifier que ces deux applications sont linéaires.

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$ et $\mathrm{Ker}(\psi)$ est l'ensemble des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Ces ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$.

Exemple 29.26. L'application $u: \begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ a pour noyau $\mathrm{Ker}(u) = \mathbf{K}_0[X]$.

Exercice d'application 29.27. Soit $u : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, y-2z) \end{array}$ (c'est une application linéaire). Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

➥

29.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

29.2.1 Définitions

Définition 29.28 - Isomorphisme, automorphisme d'espaces vectoriels.

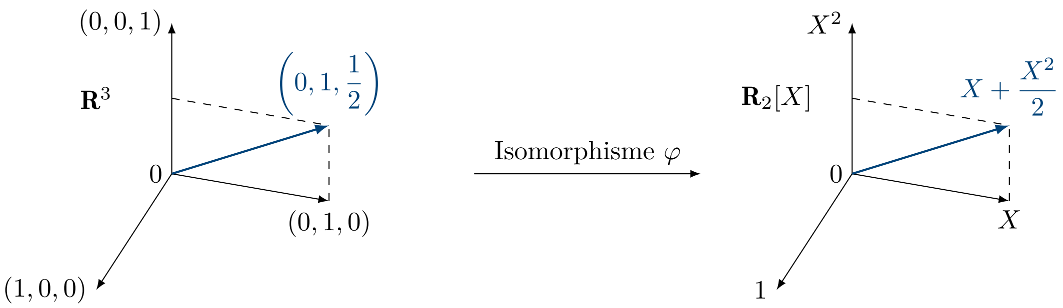
1. On appelle **isomorphisme** une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels.
2. On appelle **automorphisme** un endomorphisme bijectif.

L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E est appelé **groupe linéaire** de E et se note $\mathrm{GL}(E)$.

Définition 29.29 - Espaces vectoriels isomorphes.

On dit que deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.

Exemple 29.30. L'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & a+bX+cX^2 \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}_2[X]$. Cet isomorphisme « géométrise » $\mathbf{R}_2[X]$ en faisant une sorte de copie parfaite de $\mathbf{R}^3$. Par exemple, la coplanarité des vecteurs $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ se traduit dans $\mathbf{R}_2[X]$ par celle des vecteurs X, X^2 et $X+\dfrac{X^2}{2}$.



Exemple 29.31.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 3x + 2y) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$. En effet, on peut montrer après résolution d'un système linéaire que, pour tous $(x, y), (a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$f(x, y) = (a, b) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 2a - b \\ y & = & 2b - 3a \end{array} \right.$$

Ce calcul donne au passage l'expression de la réciproque

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (a, b) & \longmapsto & (2a - b, 2b - 3a) \end{array}$$

2. Pour $\lambda \neq 0$ dans $\mathbf{K}$, l'homothétie $\lambda \cdot \mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est un automorphisme, dont la réciproque est $\frac{1}{\lambda}\mathrm{Id}_E$.

Exercice d'application 29.32. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ P & \longmapsto & (\widetilde{P}(0), \widetilde{P}'(0)) \end{array}$ est un isomorphisme et donner l'expression de sa réciproque.

➥

Exemple 29.33. $\mathbf{R}_1[X]$ est isomorphe à $\mathbf{R}^2$ d'après l'exemple précédent.

Proposition 29.34 - Réciproque d'un isomorphisme.

Soit $u : E \longrightarrow F$ un isomorphisme.
Alors $u^{-1} : F \longrightarrow E$, l'application réciproque de u, est aussi un isomorphisme. On a de plus $\left(u^{-1}\right)^{-1} = u$.

Démonstration.
Par définition des isomorphismes, u^{-1} existe bien et est bijective. Il faut donc montrer qu'elle est linéaire.

Soit $y, y' \in F$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors, par linéarité de u, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda u^{-1}(y) + u^{-1}(y')) &= \lambda u(u^{-1}(y)) + u(u^{-1}(y')) && \text{par linéarité de } u \\ &= \lambda y + y' && \text{car } u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F \\ &= u(u^{-1}(\lambda y + y')) && \text{car } u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F \end{aligned}$$

Comme u est bijective, on en déduit que $\lambda u^{-1}(y) + u^{-1}(y') = u^{-1}(\lambda y + y')$.

Donc u^{-1} est linéaire. □

Proposition 29.35 - Composition d'isomorphismes.

Soit E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$, $v : F \longrightarrow G$ des isomorphismes.
Alors $v \circ u : E \longrightarrow G$ est un isomorphisme. On a de plus $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Démonstration.
On a déjà vu que la composée de deux bijections est une bijection (voir le chapitre *Ensembles et applications*) et que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire. □

Remarque 29.36. $\mathrm{GL}(E)$ s'appelle « groupe linéaire » car il s'agit effectivement d'un groupe, en considérant l'opération $\circ$. Cela signifie que la composition est bien interne (Proposition 29.35), associative (la composition d'application est toujours associative), possède un élément neutre (Id_E, d'après l'Exemple 29.31) et tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ possède un inverse dans $\mathrm{GL}(E)$ pour la loi $\circ$ (Proposition 29.34). Cette notion est hors-programme et n'est donnée qu'à titre culturel !

Notation 29.37. La proposition précédente assure que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme, alors $u^{-1} \circ u^{-1}$, $u^{-1} \circ u^{-1} \circ u^{-1}$, etc. sont encore des automorphismes. On notera alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u^{-n} = (u^{-1})^n = \underbrace{u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1}}_{n \text{ fois}}.$$

Ainsi, en se rappelant de la Notation 29.18, on a donné un sens à u^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $u \in \mathrm{GL}(E)$.

29.2.2 Injectivité et noyau, surjectivité et image

On commence par un rappel du chapitre *Ensembles et applications*.

Théorème 29.38 - Lien entre surjectivité et image.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$.

Le résultat suivant est fondamental, c'est en effet presque toujours ainsi que l'on montre l'injectivité d'une application linéaire.

Théorème 29.39 - Lien entre injectivité et noyau.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Démonstration.

Exercice d'application 29.40. L'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (2x+3y-z, 5x+6y-4z) \end{array}$ est-elle injective ?

➥

Exemple 29.41 (☕). Montrons que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\ f & \longmapsto & f \times \sin \end{array}$ n'est pas injective mais que $\varphi\left|_{\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})}\right.$ l'est.

φ est linéaire (à faire en exercice), donc $\varphi\left|_{\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})}\right.$ aussi (cf. Remarque 29.8).

- Soit $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
$$f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff \forall x \in \mathbf{R},\ f(x)\sin(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbf{R}\backslash\pi\mathbf{Z},\ f(x) = 0.$$
En particulier, la fonction $\mathbf{1}_{\pi\mathbf{Z}}$ vérifie cette dernière assertion donc $\mathbf{1}_{\pi\mathbf{Z}} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, puis $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ et par conséquent φ n'est pas injective.
- On a par ailleurs :
$$\operatorname{Ker}\left(\varphi\left|_{\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})}\right.\right) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \,\middle|\, \varphi(f) = 0 \right\} = \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \cap \operatorname{Ker}(\varphi).$$
Or la seule fonction continue nulle partout sauf en les multiples de π est la fonction nulle, donc $\operatorname{Ker}\left(\varphi\left|_{\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})}\right.\right) = \{0_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}\}$, ce qui entraîne que $\varphi\left|_{\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})}\right.$ est injective.

Remarque 29.42 (☕). On peut généraliser le travail fait dans le deuxième point : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et A est un sous-espace vectoriel de E, alors
$$\operatorname{Ker}\left(u\left|_A\right.\right) = A \cap \operatorname{Ker}(u).$$

ATTENTION

Avec les mêmes notations que dans la remarque précédente, $\operatorname{Im}\left(u\left|_A\right.\right) \neq A \cap \operatorname{Im}(u)$.

29.3 Applications linéaires en dimension finie

29.3.1 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Lemme 29.43 - Image d'une famille génératrice par une application linéaire.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $e_1, \dots, e_n \in E$. Alors,
$$u(\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n)) = \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))\,.$$

Démonstration.
- Soit $x \in \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))$. Par définition, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = \lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n)$. On a donc, par linéarité de u, $x = u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n)$. Donc $x \in u(\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n))$. D'où
$$\operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n)) \subset u(\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n)).$$
- Soit $x \in u(\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n))$. Alors il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n)$. D'où $x = \lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n)$. Donc $x \in \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))$. Ainsi,
$$u(\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n)) \subset \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))\,.$$

□

Proposition 29.44 - Famille génératrice d'une image.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Démonstration.
On a $\mathrm{Im}(f) = u(E) = u(\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \dots, u(e_n))$ d'après la proposition précédente. □

Exercice d'application 29.45. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + 2z, 2y + 4z) \end{array}$. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

➥

Proposition 29.46 - Image d'une famille libre, génératrice, d'une base.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On pose $\mathcal{G} = (u(e_1), \dots, u(e_n))$.

1. Si u est injective et si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est libre.
2. Si u est surjective et si $\mathcal{F}$ est génératrice de E, alors $\mathcal{G}$ est génératrice de F.
3. Si u est bijective et si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors $\mathcal{G}$ est une base de F.

Démonstration.

29.3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 29.47 - Application linéaire de rang fini.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de **rang fini** si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie. Le cas échéant, on appelle **rang** de u l'entier $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Remarque 29.48. On n'impose pas que E ou F soient de dimension finie dans la définition précédente.

Théorème 29.49 - Inégalités sur le rang et cas d'égalité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si F est de dimension finie, u est de rang fini et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$, avec égalité si et seulement si u est surjective.
2. Si E est de dimension finie, u est de rang fini et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si u est injective.
3. Si E et F sont de dimension finie, u est de rang fini, $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$. De plus, u est un isomorphisme si et seulement si $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) = \dim(F)$.

Démonstration. **1.** On suppose que F est de dimension finie.

- Puisque $\mathrm{Im}(u) \subset F$, on a $\dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant \dim(F)$, donc u est de rang fini et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$.
- Si u est surjective, $\mathrm{Im}(u) = F$, donc en particulier $\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$.

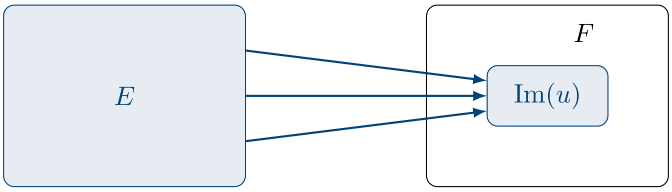
2. On suppose que E est de dimension finie.

- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \dots, u(e_n))$ (cf. Corollaire). En particulier, $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie (donc u est de rang fini) et $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant n = \dim(E)$.
- Si u est injective, alors la famille $(u(e_1), \dots, u_(e_n))$ est libre (cf. Proposition), donc c'est une base de $\mathrm{Im}(u)$. En particulier, $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$.

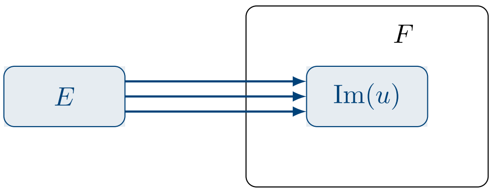
3. Supposons E et F de dimension finie.

- Les deux premiers points donnent que $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$.
- Toujours avec les deux premiers points, u est un isomorphisme si et seulement si u est injective et surjective, ce qui équivaut à $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$. □

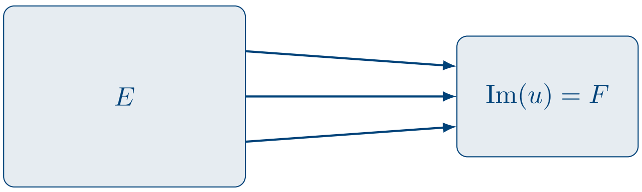
En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition, donc on retrouve que si E et F sont de dimension finie, $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$.



u est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$



u est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$



Corollaire 29.50 - Caractérisation des espaces isomorphes.

Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration.

Remarque 29.51 (♥). Le théorème précédent entraîne les remarques suivantes.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$. En particulier, il n'existe pas d'application linéaire injective $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ (l'espace de départ est « trop gros » par rapport à l'espace d'arrivée pour que tous les éléments aient des images distinctes).
2. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$. En particulier, il n'existe pas d'application linéaire surjective $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ (l'espace d'arrivée est « trop gros » par rapport à l'espace de départ pour que tous les éléments de l'espace d'arrivée aient un antécédent).

Démonstration.
1. Si u est injective, alors d'après le théorème précédent, $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$. Or on sait que $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$, d'où le résultat.
2. Si u est surjective, alors d'après le théorème précédent, $\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$. Or on sait que $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$, d'où le résultat. □

Proposition 29.52 - Rang d'une composée.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Si u et v sont de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

Démonstration.
- On sait que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$. Comme $\mathrm{Im}(v)$ est de dimension finie, il en va de même pour $\mathrm{Im}(v \circ u)$ donc $v \circ u$ est de rang fini. En outre, $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(v))$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.
- On sait que $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}(u))$ donc $\dim(\mathrm{Im}(v \circ u)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(u))$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$. □

Proposition 29.53 - Composer par un isomorphisme ne change pas le rang.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Si u est un isomorphisme et si v est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.
2. Si u est de rang fini et si v est un isomorphisme, alors $v \circ u$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

Démonstration.
1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}((v \circ u) \circ u^{-1}) \subset \mathrm{Im}(v \circ u)$ donc $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v \circ u)$.
2. On a $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}(u))$. Or $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie donc $v(\mathrm{Im}(u))$ est de dimension finie. Notons $\mathcal{B}$ une base de $\mathrm{Im}(u)$. Puisque $\mathcal{B}$ est libre et comme v est injective, $v(\mathcal{B})$ est libre. Or on sait que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ donc $v(\mathcal{B})$ est une famille génératrice $v(\mathrm{Im}(u))$. Au final, $v(\mathcal{B})$, qui a autant de vecteurs que $\mathcal{B}$, est une base de $\mathrm{Im}(v \circ u)$ donc $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$. □

Théorème 29.54 - Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est bijective} \iff \begin{cases} u \text{ est injective} \\ \dim(E) = \dim(F) \end{cases} \iff \begin{cases} u \text{ est surjective} \\ \dim(E) = \dim(F) \end{cases}.$$

Démonstration.

ATTENTION

Ce résultat est faux en dimension infinie. Par exemple, l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est surjective mais pas injective.

Corollaire 29.55 - Caractérisation des isomorphisme avec un inverse à droite ou à gauche.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $u \in \mathrm{GL}(E)$.

(ii) u est **inversible à gauche** dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire

$$\exists v \in \mathcal{L}(E), \quad v \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

(iii) f est **inversible à droite** dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire

$$\exists v \in \mathcal{L}(E), \quad u \circ v = \mathrm{Id}_E.$$

Démonstration.
Si $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ (resp. $v \circ u = \mathrm{Id}_E$) pour un certain $v \in \mathcal{L}(E)$, alors on sait que u est surjective (resp. injective) d'après la démonstration de la caractérisation de la bijectivité avec la composition, faite dans le chapitre *Ensembles et applications*. Le résultat découle donc du théorème précédent. □

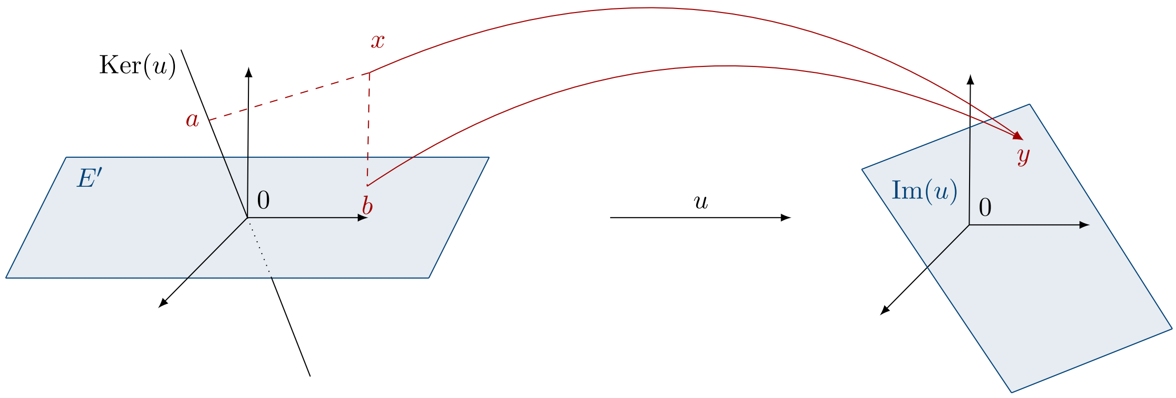
29.3.3 Théorème du rang

Lemme 29.56 - Théorème du rang, forme géométrique.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit u une application linéaire de E dans F. Si E' est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, alors $g : \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration.

Illustration de la démonstration.



Théorème 29.57 - Théorème du rang, forme usuelle.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E).$$

Autrement dit,

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E).$$

Démonstration.

Exercice d'application 29.58. Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y, x + 2y + 3z, z, 3z) \end{array}$. Déterminer, sans résoudre de système linéaire, une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.

➥

29.3.4 Détermination d'une application linéaire sur une base ou une somme directe

Proposition 29.59 - Application i-ème coordonnée.

On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $e_i^\star$ l'application qui associe à tout vecteur de E sa i-ème coordonnée dans $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Cette application, appelée **i-ème forme coordonnée de E dans $\mathcal{B}$**, est une forme linéaire.

Démonstration.
Soit $x, y \in E$ de coordonnées respectives $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) e_i$$

donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^\star(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda e_i^\star(x) + e_i^\star(y)$, ce qui montre que $e_i^\star$ est linéaire. □

Pour connaître une application en général, on n'a pas trop d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques. On connaît par exemple parfaitement l'application $u : (x, y, z) \longmapsto (2x+y+z, 3x-z)$ de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ **si on sait qu'elle est linéaire** et si on sait que : $u(1, 0, 0) = (2, 3)$, $u(0, 1, 0) = (1, 0)$ et $u(0, 0, 1) = (1, -1)$. En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u\big(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\big) \\ &= xu(1, 0, 0) + yu(0, 1, 0) + zu(0, 0, 1) && \text{par linéarité de } u \\ &= x(2, 3) + y(1, 0) + z(1, -1) \\ &= (2x + y + z, 3x-z). \end{aligned}$$

Le théorème qui suit, fondamental, généralise ce principe.

Théorème 29.60 - Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

On suppose que E possède une base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout famille $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire u de E dans F pour laquelle, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Démonstration.

Moralement, le théorème précédent assure que pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

Corollaire 29.61 - Deux applications qui coïncident sur une base sont égales.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = v(e_i),$$

alors les applications u et v sont égales

Démonstration.

Théorème 29.62 - Détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ pour laquelle $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

Démonstration.

- *Analyse.* On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$. Soit $x \in E$. Puisque $E = E_1 \oplus E_2$, il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Par linéarité de u :

$$u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$$

  Donc u est uniquement déterminée à partir de u_1 et u_2 (fixés).
- *Synthèse.* Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, posons $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. On définit ainsi une application de E dans F.
  - Pour tout $x_1 \in E_1$,

$$u_(x_1) = u(x_1 + 0_E) = u_1(x_1) + u_2(0_E) = u_1(x_1)$$

    donc $u|_{E_1} = u_1$.
  - De même, $u|_{E_2} = u_2$.
  - Il reste à démontrer que u est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2 \in E$ avec $x_1, x_2 \in E_1$, $y_1, y_2 \in E_2$. On a

$$\lambda x + y = \underbrace{(\lambda x_1 + y_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(\lambda x_2 + y_2)}_{\in E_2}.$$

    Donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) &= u_1(\lambda x_1 + y_1) + u_2(\lambda x_2 + y_2) \\ &= (\lambda u_1(x_1) + u_1(y_1)) + (\lambda u_2(x_2) + u_2(y_2)) && \text{par linéarité de } u_1 \text{ et de } u_2 \\ &= \lambda(u_1(x_1) + u_2(x_2)) + (u_1(y_1) + u_2(y_2)) \\ &= \lambda u(x) + u(y) \end{aligned}$$

    ce qui montre la linéarité de u. □

29.4 Projecteurs et symétries

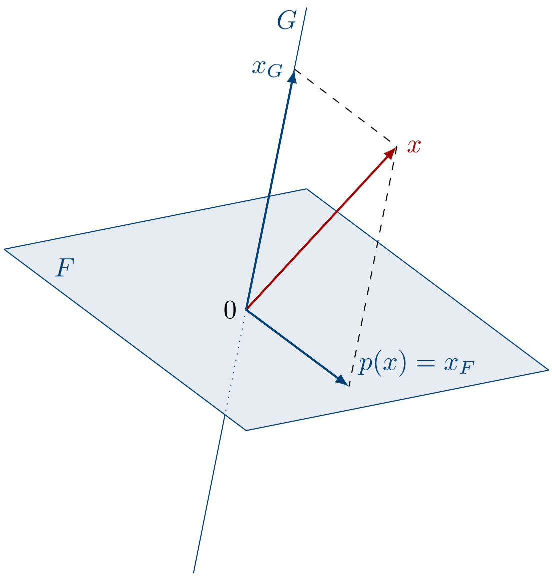
Définition 29.63 - Projection, symétrie.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On définit alors deux applications.

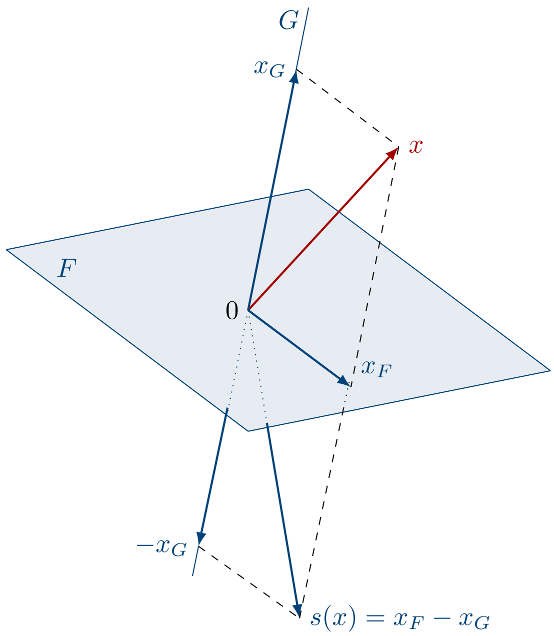
1. La **projection sur** F **parallèlement à** G (ou encore le **projecteur sur** F **de direction** G est l'application p de E dans E définie pour tout $x \in E$ par $p(x) = x_F$.
2. La **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G est l'application s de E dans E définie pour tout $x \in E$ par $s(x) = x_F - x_G$.

Dans les deux cas, F est appelé la **base** et G la **direction** de la projection ou de la symétrie.

Projection p sur F parallèlement à G

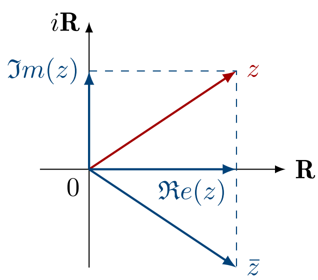


Symétrie s par rapport à F parallèlement à G



Exemple 29.64. En considérant le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$:

- $z \longmapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à $\mathbf{R}$ parallèlement à $i\mathbf{R}$.
- $z \longmapsto \mathfrak{Re}(z)$ est le projecteur sur $\mathbf{R}$ parallèlement à $i\mathbf{R}$.
- $z \longmapsto \mathfrak{Im}(z)$ est le projecteur sur $i\mathbf{R}$ parallèlement à $\mathbf{R}$.



Exercice d'application 29.65. Déterminer l'expression de la projection de $\mathbf{R}^3$ par rapport à

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$$

parallèlement à $G = \text{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$.

➥

Proposition 29.66 - Espaces caractéristiques pour les projecteurs et les symétries.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie sur F parallèlement à G.

1. **Espaces caractéristiques des projecteurs**.

$$F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(p).$$

2. **Espaces caractéristiques des symétries**.

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

Démonstration.

Remarque 29.67. On reprend les notations de la proposition précédente.

1. $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$, ce qui signifie que l'espace sur lequel on projette est l'ensemble des vecteurs qui sont invariants par la projection.
   $G = \mathrm{Ker}(p)$, ce qui signifie que la direction de la projection est l'ensemble des vecteurs qui sont projetés sur 0.

2. $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$, ce qui signifie que l'espace par rapport auquel on fait la symétrie est l'ensemble des vecteurs qui sont invariants par la symétrie.
$G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$, ce qui signifie que la direction de la symétrie est l'ensemble des vecteurs qui sont envoyés sur leur opposé.

Théorème 29.68 - Caractérisation algébrique des projecteurs.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
Le cas échéant, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Démonstration.

Remarque 29.69. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Le théorème précédent assure que p est un projecteur, donc ses espaces caractéristiques sont supplémentaires dans E : $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$. La démonstration donne une décomposition concrète de chaque vecteur de E :

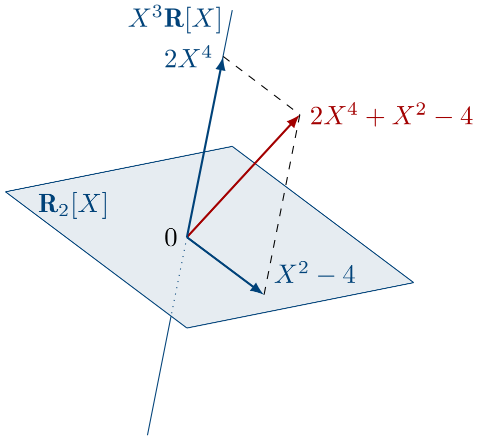
$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)}.$$

On aurait d'ailleurs pu utiliser le théorème du rang pour aller un peu plus vite dans la démonstration précédente et combiné avec $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$ pour directement obtenir $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, mais on serait passé à côté de cette jolie égalité !

Exemple 29.70. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ (avec cette notation, les éléments de la famille $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux), on note $\tau(P) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. L'application τ ainsi définie est le projecteur de $\mathbf{R}[X]$ sur $\mathbf{R}_2[X]$ de direction $X^3\mathbf{R}[X] = \left\{X^3 P \;:\; P \in \mathbf{R}[X]\right\}$. Par exemple,

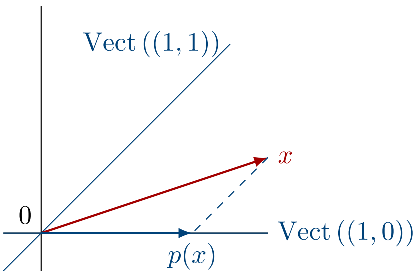
$$\tau(2X^4 + X^2 - 4) = X^2 - 4.$$

D'après le théorème de la division euclidienne par X^3 : $\mathbf{R}[X] = X^3\mathbf{R}[X] \oplus \mathbf{R}^2[X]$, donc τ est l'unique endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ pour lequel $\tau\big|_{\mathbf{R}_2[X]} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}_2[X]}$ et $\tau\big|_{X^3\mathbf{R}[X]} = 0_{\mathcal{L}(X^3\mathbf{R}[X],\mathbf{R}[X])}$. À ce titre, c'est un projecteur. Les points fixes de τ sont exactement les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, donc $\mathrm{Im}(\tau) = \mathbf{R}_2[X]$. Quant aux polynômes dont l'image par τ est nulle, ce sont ceux dont les trois premiers coefficients sont nuls, ce qui signifie qu'on peut factoriser par X^3, donc $\mathrm{Ker}(\tau) = X^3\mathbf{R}[X]$.



Exercice d'application 29.71. Montrer que $p : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,0) \end{array}$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

➥



Théorème 29.72 - Caractérisation algébrique des symétries.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
Le cas échéant, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration. • Montrons que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Notons $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$, $x_G \in G$. On a $s^2(x) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G = x$, donc $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

- Réciproquement, supposons que $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
  - Pour tout $x \in E$, on a $x = \dfrac{x+s(x)}{2} + \dfrac{x-s(x)}{2}$. Or

$$s\left(\frac{x+s(x)}{2}\right) = \frac{s(x)+s^2(x)}{2} = \frac{x+s(x)}{2}$$

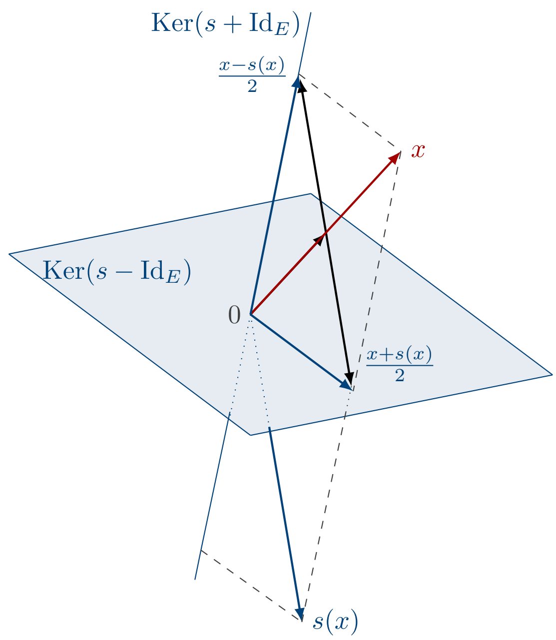
donc $\dfrac{x+s(x)}{2} \in \operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)$. De même,

$$s\left(\frac{x-s(x)}{2}\right) = \frac{s(x)-s^2(x)}{2} = -\frac{x-s(x)}{2}$$

donc $\dfrac{x+s(x)}{2} \in \operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)$.
On vient d'obtenir $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)+\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_E)=E$.

- ○ Soit $x \in \operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)\cap\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_E)$. Alors $s(x)-x=0=s(x)+x$ d'où $x=0$ puis $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)\cap\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_E)=\{0_E\}$.
- ○ On a donc $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)\oplus\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_E)=E$.

En particulier, $\dfrac{x+s(x)}{2}-\dfrac{x-s(x)}{2}=s(x)$ est la symétrie de x par rapport à $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_E)$. □



Remarque 29.73. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2=\operatorname{Id}_E$. Le théorème précédent assure que s est une symétrie, donc ses espaces caractéristiques sont supplémentaires dans E : $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)\oplus\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_E)=E$. La démonstration donne une décomposition concrète de chaque vecteur de E :

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{\frac{x+s(x)}{2}}_{\in\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_E)} + \underbrace{\frac{x-s(x)}{2}}_{\in\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_E)}.$$

Exemple 29.74 (). Notons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ paires (resp. impaires). Considérons l'application σ qui associe à toute fonction $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ associe la fonction $x\longmapsto f(-x)$.

- σ est clairement linéaire et vérifie $\sigma^2=\operatorname{Id}_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}$, donc σ est une symétrie.
- Déterminons $\operatorname{Ker}(\sigma-\operatorname{Id}_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}})$. Soit $f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

$$f\in\operatorname{Ker}(\sigma-\operatorname{Id}_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}) \iff \forall x\in\mathbf{R},\ f(-x)=x \iff f\in\mathcal{P}$$

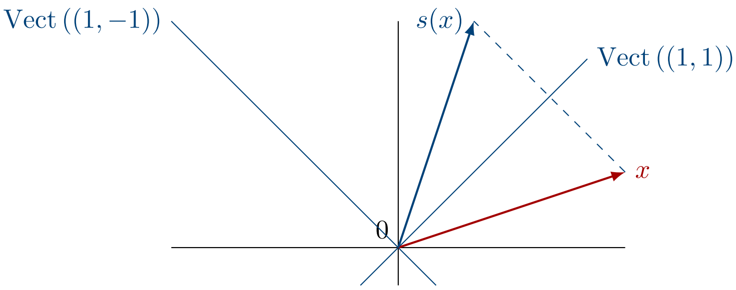
  donc $\operatorname{Ker}(\sigma-\operatorname{Id}_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}})=\mathcal{P}$.
- De même, $\operatorname{Ker}(\sigma+\operatorname{Id}_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}})=\mathcal{I}$.

Finalement, σ est la symétrie de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ par rapport à l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paire parallèlement à l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires. En particulier,

$$\mathbf{R}^{\mathbf{R}}=\mathcal{P}\oplus\mathcal{I}.$$

Exercice d'application 29.75. Montrer que $s : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$ est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

➥



Exercice d'application 29.76. Montrer que $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$ est une symétrie. Donner ses éléments caractéristiques.

➥

Théorème 29.77 - Lien projecteur/symétrie.

Soit F et G deux sous-espace supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G, p' la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Dans ces conditions :

$$p = \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}.$$

Démonstration.
Soit $x \in E$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

On a $\dfrac{s(x)+x}{2} = \dfrac{x_F - x_G + x_F + x_G}{2} = \dfrac{2x_F}{2} = x_F = p(x)$, donc $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. □

Remarque 29.78. On reprend les notations du théorème. On a aussi :

$$p + p' = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad p \circ p' = p' \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Démonstration.
Soit $x \in E$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

1. $p(x) + p'(x) = x_F + x_G = x$, donc $p + p' = \mathrm{Id}_E$.
2. $p(p'(x)) = p(x_G) = p(0 + x_G) = 0$, donc $p \circ p' = 0_{\mathcal{L}(E)}$. De même, $p' \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. □

Remarque 29.79. Comme tous les résultats de ce paragraphe, les relations précédentes (du théorème et de la remarque) se retrouvent très rapidement avec un dessin.

29.5 Formes linéaires et hyperplans

On rappelle qu'une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers $\mathbf{K}$.

Proposition 29.80 - Image et noyau d'une forme linéaire.

Soit u est une forme linéaire sur E.

1. Si u est l'application nulle, alors $\mathrm{Ker}(u) = E$ et $\mathrm{Im}(u) = \{0_{\mathbf{K}}\}$.
2. Si u n'est pas l'application nulle, alors $\mathrm{Ker}(u) \neq E$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathbf{K}$, ce qui assure que u est surjective.

Démonstration.

Définition 29.81 - Hyperplan.

On appelle **hyperplan** de E le noyau H d'une forme linéaire non nulle u sur E.

Remarque 29.82 (♥). Dans la définition précédente, H est un sous-espace vectoriel de E (en tant que noyau d'une application linéaire) et $H = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$ (par définition du noyau).

Exemple 29.83.

1. L'ensemble $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x - y + 2z = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$ car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - y + 2z \end{array}$.
2. L'ensemble $H = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid (X - 1) \text{ divise } P\}$ est un hyperplan de E car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P}(1) \end{array}$
3. L'ensemble $H = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0\,;1]) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^0([0\,;1])$ car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0\,;1]) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

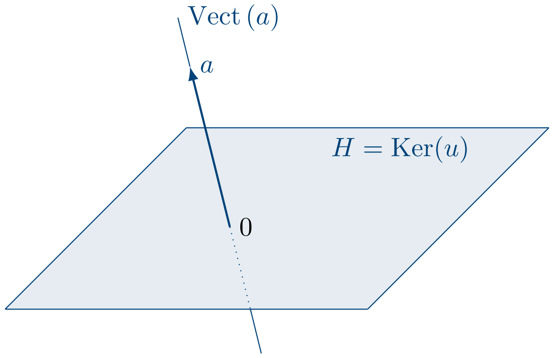
Théorème 29.84 - Caractérisation géométrique des hyperplans.

Soit H une partie de E. Les assertions suviantes sont équivalentes.

(i) H est un hyperplan de E.

(ii) H est supplémentaire d'une droite de E.

Démonstration.



Corollaire 29.85 - Dimension des hyperplans.

On suppose que E est de dimension finie égale à n.

1. Tout hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$,
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ est un hyperplan, c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Ceci signifie que les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$.

Démonstration.

Exemple 29.86 (♥). Les hyperplans des espaces vectoriels de dimension 2 sont les droites, et les hyperplans des espaces vectoriels de dimension 3 sont les plans.

Exemple 29.87. L'ensemble $\left\{P \in \mathbf{R}_4[X] \,\middle|\, \widetilde{P'}(1) = \widetilde{P}(2)\right\}$ est de dimension 4 car c'est un hyperplan : c'est le noyau de la forme linéaire $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P'}(1) - \widetilde{P}(2) \end{array}$.

Proposition 29.88 - Équation d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

On suppose que E est de dimension finie et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ non tous nuls.
L'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

est un hyperplan de E. Tout hyperplan a une équation de ce type.

Démonstration.

- Notons H l'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

On a

$$H = \{x \in E \,|\, a_1e_1^\star(x) + \cdots + a_ne_n^\star(x) = 0\}$$

donc H est le noyau de la forme linéaire non nulle $u = a_1e_1^\star + \cdots + a_ne_n^\star$, ce qui montre que H est un hyperplan de E.

- Soit H un hyperplan. Notons u une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(u)$. Soit $x \in E$ dont on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$x \in H \iff u(x) = 0 \iff u(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = 0 \iff x_1u(e_1) + \cdots + x_nu(e_n) = 0$$

donc les éléments de H vérifient bien une équation du type annoncé. □

Exercice d'application 29.89. ♨ On considère $H = \left\{P \in \mathbf{R}_3[X] \,\middle|\, \widetilde{P}(2) = 0\right\}$.

1. Justifier que H est un hyperplan de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Déterminer une équation de H dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.

➥

29.6 Équations linéaires

Nous avons déjà rencontré beaucoup d'équations linéaires, mais nous n'avions pas jusqu'ici un concept clair de linéarité. On approfondit dans ce paragraphe en les généralisant quelques-unes de vos connaissances antérieures, dont le fameux principe « solution générale de l'équation complète = solution particulière + solution générale de l'équation homogène ».

Définition 29.90 - Équation linéaire.

On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $u(x) = y$ où u est une application linéaire de E dans F, y un vecteur fixé de F et où x, l'inconnue, est un vecteur de E.

Exemple 29.91. **1.** Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

d'inconnues les réels $x_1, \ldots, x_p$, est une équation linéaire : elle s'écrit $u\left((x_1, \ldots, x_p)\right) = (b_1, \ldots, b_n)$ où u est l'application linéaire

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^p & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p, \ \ldots, \ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p) \end{array}$$

2. Soit a, b deux réels et f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. L'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f$$

d'inconnue la fonction y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ est une équation linéaire. En effet, elle s'écrit $\varphi(y) = f$ où φ est l'application linéaire définie par

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ y & \longmapsto & y'' + ay' + by \end{array}$$

3. Soit a, b deux réels et $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. La relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = w_n$$

d'inconnue la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une équation linéaire. En effet, elle s'écrit $\psi(u) = w$ où ψ est l'application linéaire définie par

$$\psi : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{array}$$

Définition 29.92 - Ensemble des solutions, équation homogène associée.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.

1. **Résoudre** l'équation linéaire $u(x) = y$, c'est trouver tous les $x \in E$ tels que $u(x) = y$.
2. L'**ensemble des solutions** de l'équation linéaire $u(x) = y$ est par définition $\{x \in E \mid u(x) = y\}$.
3. L'équation linéaire $u(x) = 0_F$ est dite **homogène**.
4. L'**équation linéaire homogène associée** à l'équation linéaire $u(x) = y$ est l'équation $u(x) = 0_F$.

Remarque 29.93 (♥). L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $u(x) = 0_F$ est le noyau de u. Comme $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène est un espace vectoriel.

Théorème 29.94 - Structure de l'ensemble des solutions.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.

- Si $y \notin \mathrm{Im}(u)$, alors l'équation linéaire $u(x) = y$ n'a aucune solution.
- Si $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe au moins une solution à l'équation linéaire $u(x) = y$. En notant x_p l'une de ces solutions (une solution « particulière »), l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S} = \{x_p + x_h \ : \ x_h \in \mathrm{Ker}(u)\}.$$

  Cet ensemble $\mathcal{S}$ est donc formé des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme la somme de x_p et d'une solution x_h de l'équation homogène associée $u(x) = 0_F$.

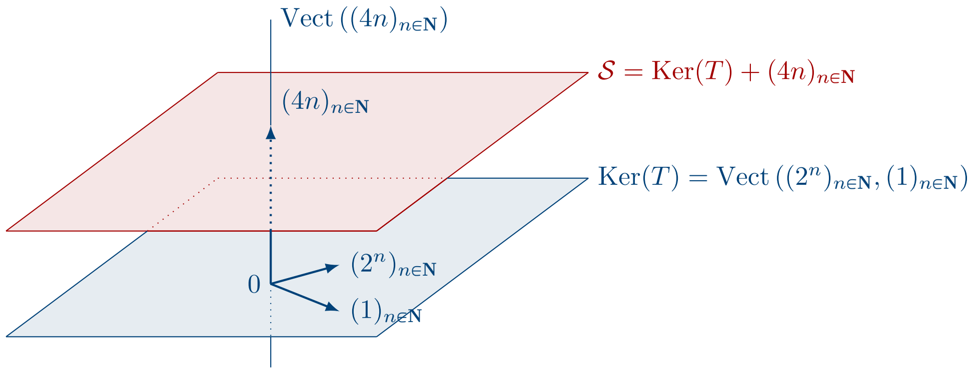
Démonstration.

Notation 29.95. En reprenant les notations du théorème, on notera $\mathcal{S} = x_p + \mathrm{Ker}(u)$ l'ensemble des solution de $u(x) = y$ (dans le cas où $y \in \mathrm{Im}(u)$).

Exercice d'application 29.96. Déterminer la suite u qui vérifie $u_0 = 0$, $u_1 = 5$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 4.$$

➥



29.7 Questions de cours

1. Donner la définition d'application linéaire (ou une caractérisation).
2. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, que vaut $u(0_E)$?
3. Donner la définition d'endomorphisme (resp. homothétie, isomorphisme, automorphisme).
4. Que peut-on dire de l'image directe (resp. réciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire ?
5. Définir la notion de noyau d'une application linéaire.
6. Définir la notion d'image d'une application linéaire.
7. Opérations usuelles sur les isomorphismes (réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.
8. Donner le lien entre surjectivité et image.
9. Donner le lien entre injectivité et noyau.
10. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.
11. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une condition sur suffisante sur u pour que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit libre.
12. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une condition sur suffisante sur u pour que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit génératrice de F.
13. Définir le rang d'une application linéaire.
14. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un isomorphisme à l'aide du rang.
15. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$. Donner deux conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit un isomorphisme.
16. Énoncer le théorème du rang.
17. Que peut-on dire de deux applications linéaires qui coïncident sur une base ?
18. Définir la notion de projection (resp. de symétrie).
19. Donner les espaces caractéristiques d'un projecteur (resp. d'une symétrie).
20. Donner la caractérisation algébrique des projecteurs (resp. symétries).
21. Donner le lien entre projecteur et symétrie.
22. Donner la définition d'hyperplan.
23. Donner la caractérisation géométrique des hyperplan.
24. Quelle est la dimension d'un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n ?
25. Donner la définition d'équation linéaire.
26. Donner la structure des solutions d'une équation linéaire.