

CHAPITRE 28

DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Dans tout le chapitre la lettre $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

28.1 Familles libres, génératrices et bases

Rappel : dans une famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ de p vecteurs de E , les v_i peuvent être distincts ou non et l'ordre des éléments compte.

28.1.1 Familles libres et familles liées

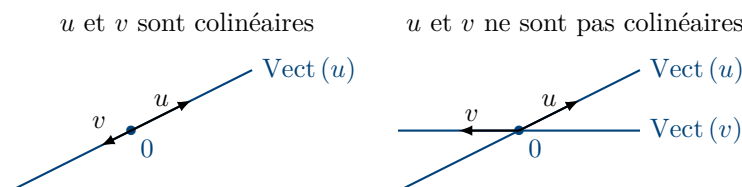
Définition 28.1 - Vecteurs colinéaires.

Soit v_1 et v_2 deux vecteurs de E . On dit que v_1 et v_2 sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.

Remarque 28.2. Si v_1 et v_2 sont colinéaires, alors on peut écrire $v_1 - \lambda v_2 = 0_E$ ou $\lambda v_1 - v_2 = 0_E$ donc il existe une combinaison linéaire de v_1 et v_2 qui donne 0_E où l'un au moins des coefficients de la combinaison linéaire n'est pas nul.

Remarque 28.3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si ils appartiennent à la même droite vectorielle.



Définition 28.4 - Famille libre, famille liée.

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E .

- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **liée** si et seulement s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ qui ne sont pas tous nuls tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E.$$

- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **libre** si et seulement si elle n'est pas liée, autrement dit si, et seulement si, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs de la famille sont **linéairement indépendants**.

On convient que la famille vide est libre.

Remarque 28.5. Le caractère libre ou liée d'une famille ne dépend pas de l'ordre des éléments dans cette famille.

Remarque 28.6. Une famille de plus de deux vecteurs est libre si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition 28.7 - Quelques critères simples pour montrer qu'une famille est libre ou liée.

1. Une famille à un élément (x) est libre si, et seulement si, x est non nul.
2. Une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
3. Une famille qui contient le vecteur nul 0_E est liée : par exemple, en considérant la famille $(x_1, x_2, x_3, 0_E)$ de vecteurs de E , on a $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot 0_E = 0_E$ donc cette famille est liée.
4. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires n'est pas libre : si $(v_1, \dots, v_n)$ est une telle famille et que par exemple $v_1 = \lambda v_2$, alors on a $v_1 - \lambda v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_p = 0_E$.

Exercice d'application 28.8. Préciser, sans calculs, si les familles suivantes sont libres dans $\mathbf{R}^3$.

- | | |
|---|---|
| 1. $\mathcal{F}_1 = ((1, 2, 3), (0, 0, 0), (1, 1, 1)).$ | 2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 1), (2, 4, 2)).$ |
| 3. $\mathcal{F}_3 = ((1, 0, 0)).$ | 4. $\mathcal{F}_4 = ((1, 2, 3), (1, 1, 1)).$ |
| 5. $\mathcal{F}_5 = ((1, 2, 1), (2, 4, 2), (1, 0, 0)).$ | 6. $\mathcal{F}_6 = ((1, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 1, 1)).$ |

➡

Exercice d'application 28.9. On note $u = (1, 0, 0, 0)$, $v = (0, 1, 1, 0)$ et $w = (2, -3, -2, 2)$. La famille (u, v, w) est-elle libre dans $\mathbf{R}^4$?

➡

Exercice d'application 28.10. ☕ La famille $\mathcal{F} = (X^4 + iX^2 - \pi, 1, X - j, (X - j)^2, (X - j)^3, (X - j)^4)$ est-elle libre dans $\mathbf{C}[X]$?

➡

Exercice d'application 28.11. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (A, B, C, D) est-elle libre ou liée ?

➡

Exercice d'application 28.12. Montrer que la famille $(\cos, \sin, \text{Id})$ est une famille libre de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

➡

Exercice d'application 28.13. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, on considère $\mathcal{F} = (f, g, h)$, avec $f = \cos$, $g : x \mapsto xe^x$ et $h : x \mapsto (x-1)^3$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

➡

Proposition 28.14 - Ajouter/enlever un vecteur à une famille liée/libre.

1. Toute famille contenant une famille liée est liée. En particulier, si on ajoute un vecteur à une famille liée, celle-ci reste liée.
2. Toute famille extraite d'une famille libre est libre. En particulier, si on enlève un vecteur d'une famille libre, celle-ci reste libre.

Démonstration.

Soit p et n deux entiers tels que $1 \leq p < n$. Soit $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

1. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E.$$

Alors on a aussi

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + 0x_{p+1} + \dots + 0x_n = 0_E,$$

donc la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

2. Par contraposition, si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

L'ordre des vecteurs n'influe pas sur le caractère libre ou lié d'une famille, la proposition est démontrée. $\square$

Proposition 28.15 - CNS pour qu'une famille avec un vecteur en plus reste libre.

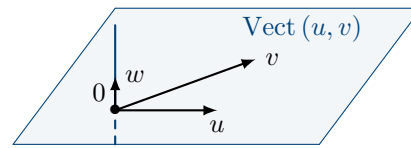
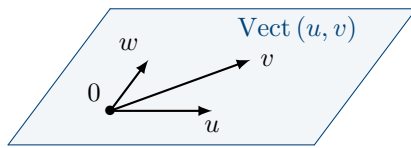
Soit $p \in \mathbf{N}$, $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Soit $x \in E$.

La famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est libre si et seulement si $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Démonstration.

Exemple 28.16. Considérons une famille libre (u, v) dans l'ensemble des vecteurs de l'espace et un vecteur w . La famille (u, v, w) est libre si et seulement si $w \notin \text{Vect}(u, v)$, c'est-à-dire si w n'est pas dans le plan vectoriel $\text{Vect}(u, v)$.

(u, v) est libre mais pas (u, v, w) car $w \in \text{Vect}(u, v)$ (u, v) est libre et (u, v, w) l'est aussi car $w \notin \text{Vect}(u, v)$



Définition 28.17 - Famille de polynômes échelonnés en degré.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On dit que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une **famille de polynômes échelonnés en degré** lorsque

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n).$$

Proposition 28.18 - Une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes échelonnés en degré et que $P_0 \neq 0$. Alors la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Démonstration.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons H_k : « la famille $(P_0, \dots, P_k)$ est libre ».

L'assertion H_0 est vraie car (P_0) est une famille constituée d'un seul vecteur et ce vecteur est non nul.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons que H_k soit vraie. Posons $p = \deg(P_k)$. Puisque

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_k) = p,$$

alors $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}_p[X]$, ce qui prouve que $\text{Vect}(P_0, \dots, P_k) \subset \mathbb{K}_p[X]$ car $\mathbb{K}_p[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel contenant $P_0, \dots, P_k$. Or $\deg(P_{k+1}) > p$, donc $P_{k+1} \notin \mathbb{K}_p[X]$. Ainsi $P_{k+1} \notin \text{Vect}(P_0, \dots, P_k)$.

On sait que $(P_0, \dots, P_k)$ est libre d'après H_k et $P_{k+1} \notin \text{Vect}(P_0, \dots, P_k)$, donc la proposition précédente assure que $(P_0, \dots, P_{k+1})$ est libre et ainsi H_{k+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie. □

Exemple 28.19. Soit $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une famille libre de polynômes de degrés échelonnés ne contenant pas 0, donc c'est une famille libre.

Théorème 28.20 - Unicité de la décomposition dans une famille libre.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille libre. Pour tout vecteur $u \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$, il existe un unique p -uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Démonstration.

Si $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^p \mu_i v_i$, alors $\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0_E$ et comme la famille est libre on obtient $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. □

Remarque 28.21. Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille libre. Le théorème précédente entraîne que pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^p \mu_i v_i \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = \mu_i.$$

On peut donc **identifier** les coefficients dans deux décompositions dans des familles libres.

Exemple 28.22. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est échelonnée en degré, donc on peut identifier les coefficients de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ égaux.

28.1.2 Familles génératrices

Définition 28.23 - Famille génératrice finie.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E est dite **génératrice** si, et seulement si,

$$E = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice, on dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ **engendrent** E .

Remarque 28.24. Le caractère générateur ou non d'une famille ne dépend pas de l'ordre de ses vecteurs.

Remarque 28.25. Avec les notations de la définition, on a que $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est génératrice si, et seulement si, tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ou encore si, et seulement si :

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Remarque 28.26. La définition donnée ci-avant n'est pas la plus précise, puisqu'on ne considère que des familles génératrices finies. En réalité, on peut avoir une famille génératrice avec un nombre infini d'éléments. Par exemple, la famille $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est génératrice de $\mathbf{K}[X]$. Il faut être vigilant quant à la définition de sous-espace engendré : $P \in \text{Vect}((X^k))$ signifie que P est une combinaison linéaire finie des vecteurs de $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$. En particulier, on ne donnera pas de sens à $\sum_{k=0}^{+\infty} X^k$ par exemple.

En pratique, il arrive très peu qu'on rencontre de telles familles infinies, car nous sommes à la limite du programme...

Remarque 28.27. On convient que la famille vide est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\{0_E\}$.

Dans les énoncés suivants, si $n = 0$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs de E , alors on convient que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est la famille vide.

Exemple 28.28. 1. $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$ -espace vectoriel car tout nombre complexe z s'écrit $z = a \cdot 1 + b \cdot i$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

2. (1) est une famille génératrice de $\mathbf{C}$ considéré comme un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, puis tout nombre complexe z s'écrit $z = z \cdot 1$.

3. Dans $\mathbf{R}^2$ les vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^2$ car pour tout vecteur $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on a $(a, b) = ae_1 + be_2$.

De même, la famille $((1, 1), (1, -1), (1, 0))$ est génératrice car pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a = a(1, 1) + 0(1, -1) + (a - b)(1, 0)$ (d'autres coefficients pourraient convenir).

Remarque 28.29. Les deux points de l'exemple précédent montrent que le choix du corps des scalaires $\mathbf{K}$ joue un rôle important pour savoir si une famille est génératrice ou non.

Exercice d'application 28.30. Déterminer une famille génératrice de $E = \{y \in D^2(\mathbf{R}) \mid y'' + y = 0\}$.



Exercice d'application 28.31. Déterminer une famille génératrice de $E = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \tilde{P}(2) = 0\}$.



Exercice d'application 28.32. ☞ Les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 4)$ et $(3, 1, -1)$ engendrent-ils $\mathbf{R}^3$?

↳

Exercice d'application 28.33. ☞ Les vecteurs $(2, 1, 4)$ et $(3, 1, -1)$ engendrent-ils $\mathbf{R}^3$?

↳

Proposition 28.34 - Ajouter un vecteur à une famille génératrice.

Tout famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E . En particulier, si on ajoute un vecteur de E à une famille génératrice, celle-ci reste génératrice.

Démonstration.

Proposition 28.35 - CNS pour qu'une famille avec un vecteur en moins reste génératrice.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E . La famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ reste génératrice de E si et seulement si $e_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Démonstration. • Supposons $(e_1, \dots, e_{n-1})$ génératrice de E . Le vecteur e_n appartient à $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc e_n est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$.

- Réciproquement, supposons que e_n sont combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$. Alors $e_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Ainsi $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $e_1, \dots, e_n$, donc

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

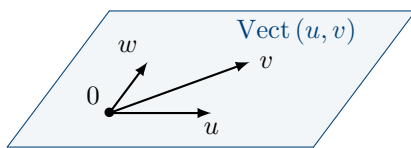
Or $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. Ainsi

$$E \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

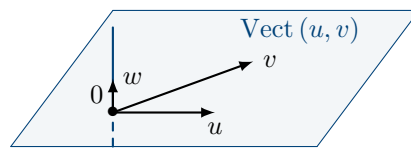
puis $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = E$. Par conséquent, la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille génératrice de E . $\square$

Exemple 28.36. Considérons trois vecteurs de l'espace u, v et w . On a $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, v, w)$ si et seulement si $w \in \text{Vect}(u, v)$, c'est-à-dire si et seulement si w est dans le plan vectoriel $\text{Vect}(u, v)$.

$\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, v, w)$ car $w \in \text{Vect}(u, v)$
(les familles engendrent le même plan vectoriel)



$\text{Vect}(u, v) \neq \text{Vect}(u, v, w)$ car $w \notin \text{Vect}(u, v)$
(les familles n'engendrent pas le même espace vectoriel)



28.1.3 Bases

Définition 28.37 - Base.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $e_1, \dots, e_n \in E$. On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si, seulement si, cette famille est à la fois libre et génératrice de E .

Remarque 28.38 (♥). Si la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, c'est une base de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple 28.39 (♥). Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. En géométrie vectorielle plane, une base est formée de deux vecteurs non colinéaires.
2. **Base de $\mathbf{C}$ vu comme un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.** (1) est une base du $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}$.
3. **Base de $\mathbf{C}$ vu comme un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.** $(1, i)$ est une base du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}$.
4. **Base canonique de $\mathbf{K}^n$.** Dans $\mathbf{K}^n$, les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

forment une base de $\mathbf{K}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{K}^n$.

Par exemple, la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

5. **Base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.** La famille $(1, X, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbf{K}_n[X]$. Cette base est appelé **base canonique** de $\mathbf{K}_n[X]$.

Par exemple, la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$.

6. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices de format $n \times p$, si l'on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la i -ème ligne et j -ième colonne qui vaut 1, alors la famille

$$(E_{1,1}, \dots, E_{1,p}, E_{2,1}, \dots, E_{2,p}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,p})$$

est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ appelée la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Par exemple, la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exemple 28.40. Notons $E = \{y \in D^2(\mathbf{R}) \mid y'' + y = 0\}$.

On a vu dans l'Exercice d'application 28.12 que $(\cos, \sin, \text{Id})$ est une famille libre dans $D^2(\mathbf{R})$, donc c'est aussi le cas de $(\cos, \sin)$. De plus, on a vu que $(\cos, \sin)$ était une famille génératrice de E dans l'Exercice d'application 28.30. Finalement, $(\cos, \sin)$ est une base de E .

Exercice d'application 28.41. Soit $(n, a) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{K}$. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

→

Théorème 28.42 - Existence et unicité de la décomposition dans une base.

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

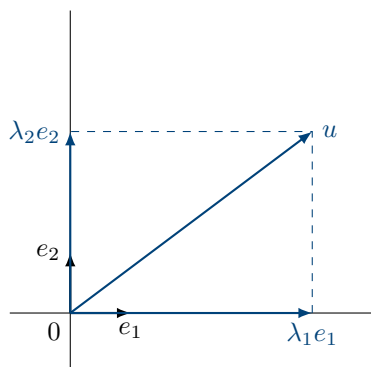
Le n -uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est le n -uplet de **composantes** (ou de **coordonnées**) de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration.

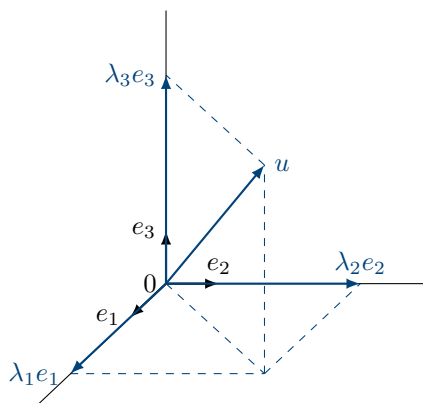
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base, alors l'existence d'une telle décomposition vient du caractère générateur de $\mathcal{B}$, et l'unicité de la liberté de $\mathcal{B}$.

Réciproquement, si une telle décomposition existe, alors la famille est libre (il suffit de prendre le vecteur nul pour u et d'identifier les coefficients via l'unicité de la décomposition) et génératrice. $\square$

Décomposition d'un vecteur u dans une base (e_1, e_2) des vecteurs du plan



Décomposition d'un vecteur u dans une base (e_1, e_2, e_3) des vecteurs de l'espace



Exercice d'application 28.43. Donner les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$.

➡

28.2 Dimension finie

On suppose désormais $E \neq \{0\}$.

28.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 28.44 - Dimension finie.

On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** si, et seulement si, il existe une famille finie de vecteurs de E qui soit génératrice de E . Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemple 28.45. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. $\mathbf{K}^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ où e_i est le n -uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf à la i -ième, égale à 1. Donc $\mathbf{K}^n$ est de dimension finie.
2. $\mathbf{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ est de dimension finie.
3. $\mathcal{M}_2(\mathbf{K}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension finie.
Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension finie.
4. $\{y \in D^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid y'' + y = 0\} = \text{Vect}(\cos, \sin)$ est de dimension finie.

Exercice d'application 28.46. ☞ Montrer que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie.

➡

Théorème 28.47 - Base via une famille génératrice finie qui contient une famille libre.

On suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L}$ une famille libre telles que tous les vecteurs de $\mathcal{L}$ sont contenus dans ceux de $\mathcal{G}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration.

Théorème 28.48 - Théorème de la base incomplète.

On suppose que E est de dimension finie.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Démonstration.

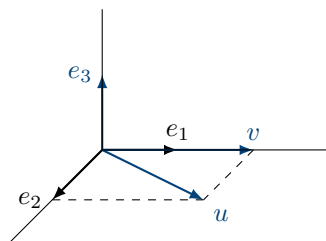
**Méthode 28.49.** Construire une base à partir d'une famille libre

La démonstration du Théorème 28.47 est constructive : elle donne une méthode pour compléter une famille libre en une base, dans un espace vectoriel de dimension finie. L'idée consiste à ajouter à la famille libre les vecteurs d'une famille génératrice connue (souvent la base canonique de l'espace dans lequel on travaille) qui ne sont pas déjà liés aux vecteurs de la famille libre.

Exercice d'application 28.50. Notons $u = (1, 2, 0)$ et $v = (0, 2, 0)$. Vérifier que la famille (u, v) est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ et la compléter en une base de $\mathbf{R}^3$.



On peut illustrer le résultat de l'exercice d'application précédent (en identifiant $\mathbf{R}^3$ à l'ensemble des vecteurs de l'espace) : (u, v, e_1) et (u, v, e_2) ne sont pas des familles libres, tandis que (u, v, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.


Théorème 28.51 - Théorème de la base extraite.

On suppose que E est de dimension finie.
Toute famille génératrice de E contient une base de E .

Démonstration.

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice (éventuellement infinie) de E . Puisque E est de dimension finie, elle possède une famille génératrice finie $\mathcal{F}$. Tout vecteur de $\mathcal{F}$ étant combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{G}$, E est engendré par une certaine sous-famille finie $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$. Comme E est non nul, $\mathcal{G}'$ possède un élément non nul, donc une famille libre est incluse dans $\mathcal{G}'$. On conclut alors avec le Théorème 28.47. $\square$

Corollaire 28.52 - Existence d'une base en dimension finie.

Tout espace vectoriel de dimension finie différent de $\{0\}$ contient au moins une base.

Démonstration.

Par définition, un espace vectoriel de dimension finie possède une famille génératrice finie. Le théorème de la base extraite assure alors qu'on peut en extraire une base. $\square$

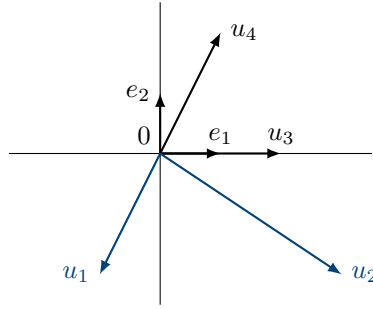

Méthode 28.53. Construire une base à partir d'une famille génératrice

Pour déterminer une base à partir d'une famille génératrice, on peut enlever des vecteurs successivement (en prenant soin à ce que chaque vecteur qu'on ôte soit combinaison linéaire des vecteurs qui restent) jusqu'à avoir une famille libre.

Exercice d'application 28.54. On note $u_1 = (-1, -2)$, $u_2 = (3, 2)$, $u_3 = (2, 0)$, $u_4 = (1, 2)$. On admet que la famille $\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est génératrice de $\mathbf{R}^2$. Trouver une base de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs de $\mathcal{G}$.



On peut illustrer le résultat de l'exercice d'application précédent (en identifiant $\mathbf{R}^2$ à l'ensemble des vecteurs du plan, où on a noté (e_1, e_2) la base canonique) : (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$. On aurait pu faire d'autres choix, par exemple, (u_1, u_3) convient aussi.



28.2.2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 28.55 - Cardinal d'une famille de vecteurs.

Le **cardinal** d'une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est le nombre de vecteurs (distincts ou non) qui la composent. On notera $\text{Card}(\mathcal{F})$ le cardinal de $\mathcal{F}$.

Exemple 28.56. Le cardinal de $((1, 1), (2, 1), (1, 1))$ est 3.

Théorème 28.57 - Lien entre le cardinal d'une famille libre et d'une famille génératrice.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre possède moins d'éléments qu'une famille génératrice.

Démonstration.

Notons $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E qui contient n éléments et $\mathcal{L}$ une famille libre. Supposons par l'absurde que $\mathcal{L}$ possède au moins $n + 1$ éléments.

- Nous allons d'abord montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'assertion suivante est vraie :

H_k : « E est engendré par une famille de n vecteurs dont les $n - k$ premiers sont dans $\mathcal{G}$ et les k suivant dans $\mathcal{L}$ »

La famille des n vecteurs de $\mathcal{G}$ engendre E , donc H_0 est vraie.

Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tel que H_k est vraie : E est engendré par $(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$ pour certains $x_1, \dots, x_{n-k} \in \mathcal{G}$ et $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ possède au moins $n + 1$ éléments, il existe y_{k+1} dans $\mathcal{L}$ autre que $y_1, \dots, y_k$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbf{K}$ tels que

$$y_{k+1} = (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-k} x_{n-k}) + (\mu_1 y_1 + \dots + \mu_k y_k).$$

Il existe un $\lambda_i \neq 0$ (si ça n'était pas le cas, y_{k+1} serait combinaison linéaire de $y_1, \dots, y_k$, ce qui est impossible puisque $\mathcal{L}$ est libre). Quitte à modifier l'ordre de x_i , nous pouvons donc supposer $\lambda_{n-k} \neq 0$. Ainsi,

$$x_{n-k} = \frac{1}{\lambda_{n-k}} (y_{k+1} - (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-k-1} x_{n-k-1}) - (\mu_1 y_1 + \dots + \mu_k y_k))$$

ce qui montre que

$$x_{n-k} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-k-1}, y_1, \dots, y_{k+1})$$

donc E est engendré par la famille

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_{n-k-1})}_{\in \mathcal{G}}, \underbrace{(y_1, \dots, y_{k+1})}_{\in \mathcal{L}},$$

ce qui prouve que H_{k+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \llbracket 1, k \rrbracket$, H_k est vraie.

- En particulier, H_n signifie que E est engendré par une famille de n vecteurs de $\mathcal{L}$. Donc tout vecteur de $\mathcal{L}$ est combinaison linéaire de ces n vecteurs. Comme $\mathcal{L}$ possède au moins $n + 1$ éléments, $\mathcal{L}$ est liée ce qui est contradictoire. $\square$

Théorème 28.58 - Les bases d'un même espace ont toutes le même cardinal.

On suppose que E est de dimension finie.
Les bases de E sont toutes finies et de même cardinal.

Démonstration.

Définition 28.59 - Dimension d'un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie.
Toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments. Cet entier n est appelé la **dimension** de E sur $\mathbf{K}$ et est noté $\dim(E)$ (ou $\dim_{\mathbf{K}}(E)$ lorsqu'il est important de préciser l'ensemble $\mathbf{K}$).

Exemple 28.60 (♥). En se rappelant des bases canoniques déjà présentées, on a immédiatement les résultats suivants.

1. Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.
2. Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.
3. $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}) = 1$.
4. $\dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = 1$, $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$.
5. $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n) = n$, $\dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n) = n$, $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n) = 2n$.
6. $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}_n[X]) = n + 1$ (et SURTOUT PAS n !!!).
7. $\dim_{\mathbf{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = n \times p$.

**ATTENTION**

| Pour un espace vectoriel de dimension infinie, **on ne peut pas écrire** $\dim(E) = +\infty$.

Proposition 28.61 - Nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice.

On suppose que E est de dimension finie égale à n .

1. Toute famille libre de E possède au plus n éléments.
2. Toute famille libre de E qui possède n éléments est une base de E .
3. Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.
4. Toute famille génératrice de E qui possède n éléments est une base de E .

Démonstration.

1. Une famille libre possède moins d'éléments qu'une famille génératrice, donc en particulier qu'une base.
2. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. On peut la compléter en une base d'après le théorème de la base incomplète. Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a rien ajouté à $\mathcal{L}$. Ainsi $\mathcal{L}$ était une base dès le départ !
3. Une famille génératrice possède plus d'éléments qu'une famille libre, donc en particulier qu'une base.
4. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice. On peut en extraire une base d'après le théorème de la base extraite. Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a rien enlevé à $\mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{G}$ était une base dès le départ ! □

Exercice d'application 28.62. Justifier que $\mathcal{B} = (1, 2X - 3, X^2 + 7X + 8)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.



28.2.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 28.63 - Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Démonstration.



Méthode 28.64. Montrer une égalité de sous-espaces vectoriels à l'aide de la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. F et G des sous-espaces vectoriels de E . Pour prouver que $F = G$, il suffit de prouver que

$$F \subset G \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(G).$$

Exercice d'application 28.65. Notons $F = \text{Vect}((3, 5, 11), (2, 4, 8))$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 4), (2, 3, 7))$. Montrer que $F = G$.



28.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels et dimension

28.3.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème 28.66 - Famille génératrice d'une somme de sous-espaces vectoriels.

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E engendrés respectivement par deux familles finies $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. Alors

$$\text{Vect}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) = \text{Vect}(\mathcal{G}_1) + \text{Vect}(\mathcal{G}_2)$$

ce qui signifie que $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ est une famille génératrice de $F + G$.

Démonstration. • On a $\mathcal{G}_1 \subset \text{Vect}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$, donc $\text{Vect}(\mathcal{G}_1) \subset \text{Vect}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$. De même, $\text{Vect}(\mathcal{G}_2) \subset \text{Vect}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$. Ainsi, $\text{Vect}(\mathcal{G}_1) + \text{Vect}(\mathcal{G}_2) \subset \text{Vect}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$.
 • Réciproquement, $\text{Vect}(\mathcal{G}_1) + \text{Vect}(\mathcal{G}_2)$ est un sous-espace vectoriel contenant $\text{Vect}(\mathcal{G}_1)$, donc en particulier $\mathcal{G}_1$. De même, $\mathcal{G}_2 \subset \text{Vect}(\mathcal{G}_1) + \text{Vect}(\mathcal{G}_2)$.
 On en déduit $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \subset \text{Vect}(\mathcal{G}_1) + \text{Vect}(\mathcal{G}_2)$, puis finalement $\text{Vect}(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) \subset \text{Vect}(\mathcal{G}_1) + \text{Vect}(\mathcal{G}_2)$. $\square$

Théorème 28.67 - Formule de Grassmann.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Alors la somme $F + G$ est de dimension finie et plus précisément :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration.

28.3.2 Somme directe

Théorème 28.68 - Construction d'une somme directe à partir d'une famille libre.

Soit n, k deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leq k < n$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

1. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.
2. Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E .

Démonstration.

Théorème 28.69 - Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . On note $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G . Si F et G sont en somme directe, alors la concaténation des familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ forme une base de $F \oplus G$. Une telle base dont les premiers vecteurs forment une base de F et les suivants une base de G est dite **adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

Démonstration.

28.3.3 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Théorème 28.70 - Existence de supplémentaires en dimension finie.

On suppose que E est de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F possède un supplémentaire dans E .

En outre, les supplémentaires de F dans E ont tous pour dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration.



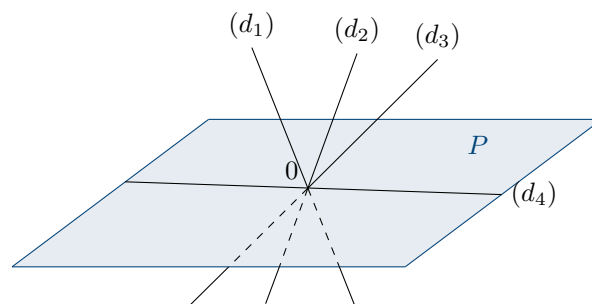
ATTENTION



Il est interdit de parler « du » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en général, faute d'unicité.

Par exemple, dans l'espace, un plan vectoriel admet une infinité de supplémentaires (n'importe quelle droite vectorielle non contenue dans le plan convient).

Sur l'exemple ci-contre, (d_1) est un supplémentaire de P , de même que (d_2) ou (d_3) . Par contre, (d_4) étant incluse dans P , (d_4) et P ne sont pas supplémentaires.



Méthode 28.71. Construire un supplémentaire

La démonstration précédente est constructive. Pour déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F , il suffit de compléter une base de F en une base de E : les vecteurs ainsi ajoutés engendrent un supplémentaire de F .

Exercice d'application 28.72. Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^3$.



Exemple 28.73. Déterminons un supplémentaire de $F = \{ P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X) \}$ dans $\mathbf{R}_3[X]$.

- On cherche d'abord une base de F . Notons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$. On a $P \in F$ qui équivaut à :

$$a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d$$

$$\iff \begin{cases} a &= -a \\ 3a + b &= 3a + b \\ 3a + 2b + c &= -3a - 2b - c \\ a + b + c + d &= a + b + c + d \end{cases} \quad \text{après identification}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 0 \\ 2b + c &= 0 \end{cases} \quad \text{après résolution}$$

Ce calcul montre que $(1, X^2 - 2X)$ engendre F . Cette famille étant libre (vecteurs non colinéaires ou famille échelonnée en degré), c'est une base de F .

- Complétons-la en une base de $\mathbf{R}_3[X]$ avec certains vecteurs de la base canonique. Échelonnée en degré, la famille $(1, X^2 - 2X, X, X^3)$ est libre et composée de quatre vecteurs. Comme $\dim(\mathbf{R}_3[X]) = 4$, c'est même une base de $\mathbf{R}_3[X]$.
- Finalement, $\text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}_3[X]$.

Théorème 28.74 - Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) F et G sont supplémentaires.
- (ii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- (iii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$.

Démonstration.

Exercice d'application 28.75. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

➡

28.4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 28.76 - Rang d'une famille de vecteurs.

Soit $r \in \mathbf{N}$. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_r)$ une famille de vecteurs de E (famille vide si $r = 0$).

On appelle **rang** de la famille $(u_1, \dots, u_r)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille et on le note $\text{rg}(u_1, \dots, u_r)$. Autrement dit

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_r) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)).$$

Exercice d'application 28.77. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}[X]$ suivants :

$$P = X + 2, \quad Q = X^2 + 2X, \quad R = X^3 + 2X^2, \quad S = X^3 + 3X^2 + 3X + 2.$$

Déterminer le rang de la famille (P, Q, R, S) .

➡

Exercice d'application 28.78. Calculer le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$, où u, v et w désignent respectivement les suites de terme général

$$u_n = 3, \quad v_n = e^n - n, \quad w_n = 3 + n^2.$$

➡

Proposition 28.79 - Lien entre le rang et le nombre de vecteurs.

Soit $(u_1, \dots, u_r)$ une famille de vecteurs de E .

1. $\text{rg}(u_1, \dots, u_r) \leq r$.
2. $\text{rg}(u_1, \dots, u_r) = r$ si et seulement si $(u_1, \dots, u_r)$ est libre.

Démonstration.

Corollaire 28.80 - Caractérisation des bases avec le rang.

On suppose que E est de dimension finie et on note n sa dimension. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$.

Démonstration.

Un Q.C.M.

Dans tout le q.c.m., on se place dans $\mathbf{R}^4$. Une question peut avoir plusieurs réponses. Entourer la lettre lorsque la réponse est possible.

1. (v_1, v_2, v_3) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

2. (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

3. $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

4. $(v_1, 2v_1, v_2)$ peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

5. $(v_1, 2v_1, v_2, v_3, v_4)$ peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

6. Si $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est une famille génératrice alors (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

7. Si $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est une famille génératrice alors $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

8. Si (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base alors (v_1, v_2, v_3) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

9. Si (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base alors $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

10. Si (v_1, v_2, v_3) est une famille libre alors (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

11. Si (v_1, v_2, v_3) est une famille libre alors (v_1, v_2) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

12. Si $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ n'est pas une famille génératrice alors (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

13. Si (v_1, v_2, v_3) n'est pas une famille libre alors (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être une

- a. famille libre b. famille génératrice c. base d. aucun des trois

Questions de cours

1. Définir la notion de vecteurs colinéaires.
2. Donner la définition de famille libre.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille constituée d'un seul vecteur soit libre.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille constituée de deux vecteurs soit libre.
5. Si on enlève un vecteur à une famille libre, peut-on affirmer que cette famille reste libre? Et si on ajoute un vecteur?
6. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre et $x \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1, \dots, e_n, x)$ soit libre.
7. Donner une condition suffisante simple pour qu'une famille de polynômes soit libre.
8. Donner la définition de famille génératrice.
9. Si on enlève un vecteur à une famille génératrice, peut-on affirmer que cette famille reste génératrice? Et si on ajoute un vecteur?
10. Soit $(e_1, \dots, e_n, x)$ une famille génératrice de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1, \dots, e_n)$ soit encore génératrice de E .
11. Donner la définition de base.
12. Donner la définition de coordonnées d'un vecteur dans une base.
13. Énoncer le théorème de la base incomplète.
14. Énoncer le théorème de la base extraite.
15. Définir la notion de dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
16. Donner la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et sa dimension.
17. Donner la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ et sa dimension.
18. Donner la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et sa dimension.
19. Notons n la dimension de E . Une famille libre possède-t-elle plus ou moins de n éléments? Et une famille génératrice?
20. Notons n la dimension de E . Que peut-on dire d'une famille libre qui possède n éléments?
21. Notons n la dimension de E . Que peut-on dire d'une famille génératrice qui possède n éléments?
22. Notons n la dimension de E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p . Que peut-on dire de n et p ?
23. Énoncer la formule de Grassmann.
24. Donner la définition de base adaptée à une somme directe.
25. Énoncer le théorème de caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
26. Définir la notion de rang d'une famille de vecteurs.