CHAPITRE 27 ESPACES VECTORIELS

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ représente $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n et p sont deux entiers naturels non nuls.

L'objet de ce chapitre est l'étude des espaces vectoriels, dont la théorie est appelée l'**algèbre linéaire**.

27.1 Structure d'espace vectoriel

27.1.1 Définition

Définition 27.1 - Espace vectoriel.

On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbf{K}$ (ou $\mathbf{K}$-espace vectoriel) tout triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble non vide, $+ : E \times E \longrightarrow E$ est une **loi interne** et $\cdot : \mathbf{K} \times E \longrightarrow E$ est une **loi externe** qui vérifient les propriétés suivantes.

EV1. $\forall\, u, v \in E,\ u + v = v + u$ (commutativité)
EV2. $\forall\, u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$ (associativité)
EV3. $\exists\, 0_E \in E,\ \forall\, u \in E,\ 0_E + u = u + 0_E = u$.
0_E est l'élément neutre de l'addition, il est appelé **vecteur nul**.
EV4. $\forall\, u \in E,\ \exists\, v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$.
Tout élément possède un opposé pour la loi $+$. L'opposé de u est noté $-u$. On peut montrer en combinant les quatre propriétés précédentes que cet opposé est unique.
EV5. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K},\ \forall\, u \in E,\ (\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$ (distributivité par rapport à la somme de scalaires)
EV6. $\forall\, \alpha \in \mathbf{K},\ \forall\, u, v \in E,\ \alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$ (distributivité par rapport à la somme de vecteurs)
EV7. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K},\ \forall\, u \in E,\ (\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$ (associativité mixte)
EV8. $\forall\, u \in E,\ 1 \cdot u = u$. L'élément unité de $\mathbf{K}$ est un élément neutre pour la multiplication externe.

Les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés des **scalaires**, ceux de E des **vecteurs**.

Notation 27.2. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Lorsque λ est un scalaire et u un vecteur, on écrira λu pour $\lambda \cdot u$, mais pas $u\lambda$.

On notera également $u - v$ pour désigner $u + (-v)$.

Les règles de calcul de cette définition sont exactement celles auxquelles les vecteurs du plan et de l'espace obéissent. Par analogie, le mot vecteur sera désormais employé pour désigner de nombreux objets mathématiques que nous n'avions pas l'habitude d'appeler des vecteurs jusqu'ici, mais que nous gagnerons à visualiser comme tels. Il est très important de se représenter les espaces vectoriels, même les plus abstraits, comme des mondes géométriques semblables au plan ou à l'espace. La pertinence d'une telle représentation sera plus claire quand nous aurons un peu avancé dans la théorie.

La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs en algèbre linéaire.

Proposition 27.3 - Règles de calcul dans un espace vectoriel.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. Pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$,
$$\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } u = 0_E.$$
2. Pour tout $u \in E$, $-u = (-1) \cdot u$, où $-u$ est l'opposé de u dans E (et -1 l'opposé de 1 dans $\mathbf{K}$).

Démonstration. **1.**
- Soit $u \in E$. Montrons que si $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$, alors $\lambda \cdot u = 0_E$.
$$\begin{aligned} 0_{\mathbf{K}} \cdot u &= (0_{\mathbf{K}} + 0_{\mathbf{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot u + 0_{\mathbf{K}} \cdot u && \text{d'après } \mathbf{EV5} \end{aligned}$$
En ajoutant l'opposé de $0_{\mathbf{K}} \cdot u$ dans l'égalité précédente (d'après **EV4**), on obtient $0_E = 0_{\mathbf{K}} \cdot u$.
- Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Montrons que si $u = 0_E$, alors $\lambda \cdot u = 0_E$.
$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) && \text{d'après } \mathbf{EV3} \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E && \text{d'après } \mathbf{EV6} \end{aligned}$$
En ajoutant l'opposé de $\lambda \cdot 0_E$ dans l'égalité précédente (d'après **EV4**), on obtient $0_E = \lambda \cdot 0_E$.
- Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in E$ tels que $\lambda \cdot u = 0_E$. Supposons $\lambda \neq 0_{\mathbf{K}}$.
$$\begin{aligned} u &= 1 \cdot u \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot u \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot u) && \text{d'après } \mathbf{EV7} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E && \text{d'après le point précédent} \\ &= 0_E. \end{aligned}$$

2. Soit $u \in E$.
$$\begin{aligned} u + (-1) \cdot u &= 1 \cdot u + (-1) \cdot u && \text{d'après } \mathbf{EV8} \\ &= (1-1) \cdot u && \text{d'après } \mathbf{EV5} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot u \\ &= 0_E && \text{d'après } \mathbf{1.} \end{aligned}$$

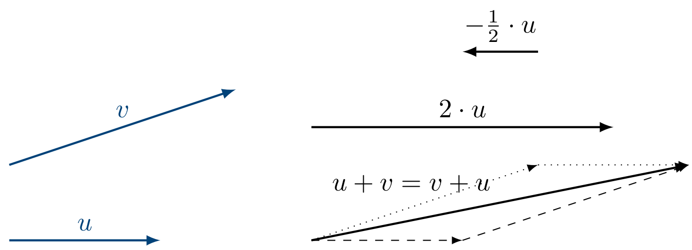
□

Remarque 27.4. Au programme, on ne considère des espaces vectoriels que sur les ensembles **R** ou **C**. On pourrait travailler sur d'autres ensembles (ça n'est pas au programme !) mais pas sur n'importe lesquels. Par exemple, on ne peut pas considérer d'espace vectoriel sur **Z** ou sur **N**...

27.1.2 Exemples fondamentaux

Les exemples suivants sont très (très) importants, il faut les connaître.

- **L'ensemble des réels**. L'ensemble $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ des réels muni de l'addition et de la multiplication est un **R**-espace vectoriel. Le vecteur nul est 0.
- **L'ensemble des complexes**. L'ensemble $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ des complexes muni de l'addition et de la multiplication peut être vu comme un **R**-espace vectoriel ou un **C**-espace vectoriel. En effet, si on considère comme multiplication externe la fonction $\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda \cdot z \end{array}$, alors $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ est un **R**-espace vectoriel. Si on considère plutôt comme multiplication externe la fonction $\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda \cdot z \end{array}$, alors $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ est un **C**-espace vectoriel. Dans tous les cas, le vecteur nul est 0.
- **L'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace)**. Si on dispose de deux vecteurs du plan (resp. de l'espace), on peut les ajouter et les multiplier par une constante réelle.



Si on note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace), alors $(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ est un **R**-espace vectoriel.
Le vecteur nul est $\overrightarrow{0}$.

- **L'ensemble des n-uplets**. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbf{K}^n$, on rappelle qu'on peut les ajouter et les multiplier par un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{K}^n$$

et

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in \mathbf{K}^n.$$

L'ensemble $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ est un **K**-espace vectoriel.
Le vecteur nul est $(0, 0, \dots, 0)$.

- *Plus difficile.* **Espace vectoriel produit**. Soit $(E_1, +_{E_1}, \cdot_{E_1}), \dots, (E_n, +_{E_n}, \cdot_{E_n})$ des **K**-espaces vectoriels. L'ensemble $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est muni d'une loi d'addition interne $+$ et d'un produit λ externe, définis par

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E, \quad (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_{E_1} y_1, \dots, x_n +_{E_n} y_n)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot_{E_1} x_1, \dots, \lambda \cdot_{E_n} x_n).$$

L'ensemble $(E_1 \times \cdots \times E_n, +, \cdot)$ est un **K**-espace vectoriel. Le vecteur nul est $0_E = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.
Par exemple, on peut choisir $E_1 = \mathbf{R}$ et $E_2 = \mathbf{C}$. Alors $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ est un **R**-espace vectoriel.

- **L'ensemble des polynômes**. $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$ est un **K**-espace vectoriel. Le vecteur nul est le polynôme nul.
- **L'ensemble des matrices**. L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un **K**-espace vectoriel. Le vecteur nul est $0_{n,p}$.
- **L'ensemble des applications de Ω dans K**, où Ω est un ensemble quelconque non vide. Si $f, g \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on peut définir une somme et un produit externe :

$$f + g : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \text{et} \quad \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

L'ensemble $(\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K}), +, \cdot)$ est un **K**-espace vectoriel. On retiendra en particulier les résultats suivants.

  - Si $\Omega = \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, alors on obtient que l'**ensemble des suites à valeurs dans K** est un **K**-espace vectoriel. Le vecteur nul est la suite nulle.
  - Si $\Omega \subset \mathbf{R}$, alors on obtient que l'**ensemble des fonctions définies sur Ω une partie de R** est un **K**-espace vectoriel. Le vecteur nul est alors la fonction constante égale à 0.

- *Plus difficile*. On peut encore généraliser l'exemple précédent. Soit $(E, \star, \bullet)$ un **K**-espace vectoriel et Ω un ensemble quelconque. On munit alors l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, E)$ des applications de Ω vers E des opérations $\boxplus$ et $\boxdot$ par :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\Omega, E), \quad f \boxplus g : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \star g(x) \end{array}$$

et

$$\forall f \in \mathcal{F}(\Omega, E),\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \boxdot f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \bullet f(x) \end{array}$$

$(\mathcal{F}(\Omega, E), \boxplus, \boxdot)$ est un **K**-espace vectoriel et le vecteur nul est la fonction nulle définie sur Ω.
Par exemple, on peut choisir $\Omega = [0\,;\,1]$ et $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$, qui est bien un **R**-espace vectoriel. Si on choisit

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t & 2 & 4 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

deux vecteurs de $\mathcal{F}([0\,;\,1], \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}))$, alors on peut les ajouter :

$$f \boxplus g : \begin{array}{ccc} [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t & 3 & 4+t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 27.5. On peut toujours considérer des **C**-espaces vectoriels E comme des **R**-espaces vectoriels : il suffit de restreindre la loi externe aux réels. Par exemple, $\mathbf{C}[X]$ est un **C**-espace vectoriel, mais c'est également un **R**-espace vectoriel. De même, $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est un **C**-espace vectoriel et également un **R**-espace vectoriel.

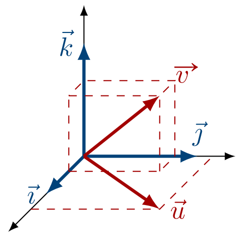
27.1.3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 27.6 - Combinaison linéaire de vecteurs.

Soit E un **K**-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$
On dit qu'un vecteur u de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans **K** tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

La notion de combinaison linéaire est géométriquement très simple à représenter dans le plan (ou dans l'espace). Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, mais ça n'est pas le cas de $\vec{v}$.



Remarque 27.7. Le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quelle famille non vide de vecteurs.

Méthode 27.8. *Tester si un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs*

Pour tester si un vecteur x est combinaison linéaire d'autres vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$, on peut procéder de deux manières :

- on trouve de tête une combinaison linéaire qui fonctionne (voir l'Exemple 27.9) ;
- on résout le système linéaire $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = x$ d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ (si le système n'admet pas de solution, cela signifie que x n'est pas combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_p$, voir l'Exemple 27.10).

Exemple 27.9.

1. On se place dans un **K**-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Soit u et v deux vecteurs de E. Alors, u, $-v$, $2u - 4v$ sont des combinaisons linéaires de u et v.

2. Dans le **R**-espace vectoriel $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$, le vecteur $(3, -2, 4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ car

$$(3, -2, 4) = 3 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3.$$

3. On se place dans le **R**-espace vectoriel $(\mathbf{R}[X], +, \cdot)$. Alors le polynôme $2X^3 - X$ est combinaison linéaire de X^3, X^2, X et 1 car :

$$2X^3 - X = 2 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + (-1) \cdot X + 0 \cdot 1.$$

Exemple 27.10. Dans $\mathbf{R}^3$, $x = (2, 3, 5)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$?

c'est l'EXISTENCE de solutions qui compte

$$\begin{aligned}
(2,3,5) \text{ est combinaison linéaire de } e_1,\ e_2 \text{ et } e_3 &\iff \boxed{\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R},} \quad \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (2,3,5) \\
&\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R},\ (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3) = (2,3,5) \\
&\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R},\ \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 5 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Nous sommes ramené à la résolution d'un système linéaire.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{1}\,\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 3 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \boxed{1}\,\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2 & \\ & & \boxed{1}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 3 & \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 3 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{1}\,\lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & -1 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & & \boxed{1}\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 3 & \\ & & & & \boxed{2}\,\lambda_3 & = & 6 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} \boxed{2}\,\lambda_1 & & & = & 4 & \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ & \boxed{2}\,\lambda_2 & & = & 0 & \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ & & \boxed{2}\,\lambda_3 & = & 6 & \end{array}\right.$$

Puisque le système linéaire admet une solution, on peut conclure que $(2,3,5)$ est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3. On a au passage l'unique décomposition possible : $(2,3,5) = 2e_1 + 3e_3$.

Exercice d'application 27.11. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de A et I_2 ?
2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de A et I_2 ?

➥

Exercice d'application 27.12. Dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $u = (n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle combinaison linéaire de $v = (1)_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (n)_{n\in\mathbf{N}}$?

➥

ATTENTION

S'il y a ambiguïté sur le corps de base (E est-il considéré comme un **C**-espace vectoriel ou comme un **R**-espace vectoriel ?), il est important de le préciser.

Par exemple, $1+i$ est combinaison linéaire de 1 et 2 dans le **C**-espace vectoriel $(\mathbf{C},+,\times)$ (puisque $1+i = (1+i)\cdot 1 + 0\cdot 2$ par exemple), mais $1+i$ n'est pas combinaison linéaire de 1 et 2 dans le **R**-espace vectoriel $(\mathbf{C},+,\times)$ (car $\mathfrak{Im}(1+i) = 1 \neq 0 = \mathfrak{Im}(a\cdot 1 + b\cdot 2)$ pour tous $a, b \in \mathbf{R}$).

ATTENTION

En général, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k$ **n'implique pas** $\lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Autrement dit, on ne peut pas faire d'identification quand on a deux décompositions linéaires avec les mêmes vecteurs, car une telle décomposition n'est *a priori* pas unique. Par exemple,

$$1\cdot(1,1) + 2\cdot(0,1) + 2\cdot(1,0) = (3,3) = 2\cdot(1,1) + 1\cdot(0,1) + 1\cdot(1,0).$$

27.2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, $(E,+,\cdot)$ désigne un **K**-espace vectoriel.

27.2.1 Définition et exemples à connaître

Définition 27.13 - Sous-espace vectoriel (sev).

Soit F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si

SEV1 : $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$ (F est stable par addition)

SEV2 : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot u \in F$ (F est stable par multiplication externe)

SEV3 : $0_E \in F$.

Proposition 27.14 - Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F muni de l'addition et de la multiplication externe définies sur E (ou plutôt des restrictions de ces lois à F, dites **lois induites**) est un **K**-espace vectoriel.

Démonstration.

- F est bien non vide car $0_E \in F$.
- $+$ est bien une loi interne à F d'après **SEV1**.
- **EV1** et **EV2** sont vérifiées car les éléments de F sont aussi des éléments de E.
- $0_E \in F$ par **SEV3** donc **EV3** est vérifiée. Et $0_F = 0_E$.
- Montrons que les opposés des éléments de F sont aussi dans F.
  Soit $x \in F$. Alors, par **SEV2**, $(-1)\cdot x \in F$. Or, dans E, on sait que $(-1)\cdot x = -x$ est l'opposé de x. Donc $-x \in F$. **EV4** est bien vérifiée.
- Les propriétés **EV5**, **EV6**, **EV7**, **EV8** sont vérifiées car les éléments de F sont aussi des éléments de E. □

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on utilise plutôt la proposition suivante.

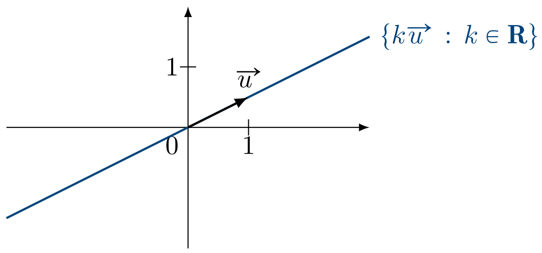
Proposition 27.15 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

Soit F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $F \subset E$.
2. $0_E \in F$.
3. $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

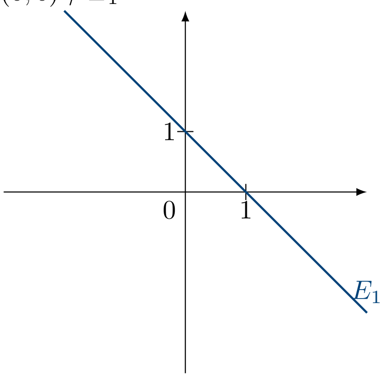
Démonstration.

Exemple 27.16.
- Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits **sous-espaces vectoriels triviaux**).
- Si $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ désigne l'ensemble des vecteurs du plan et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, alors $\{k\overrightarrow{u} \ : \ k \in \mathbf{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (c'est une droite vectorielle si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$).

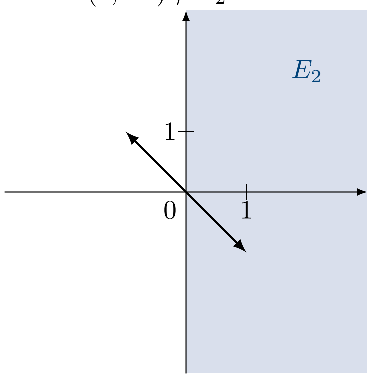


- Quelques exemples d'ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

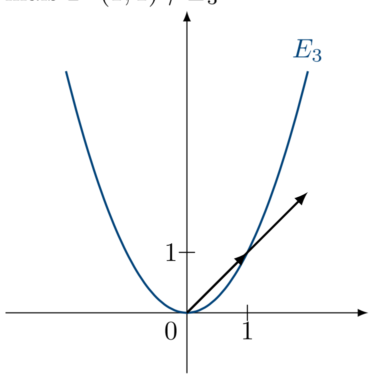
$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x+y=1\right\}$ n'est un pas sev de $\mathbf{R}^2$ car $(0,0) \notin E_1$



$E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, y \geqslant 0\right\}$ n'est pas un sev de $\mathbf{R}^2$ car $(1,-1) \in E_2$ mais $-(1,-1) \notin E_2$



$E_3 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, y = x^2\right\}$ n'est pas un sev de $\mathbf{R}^2$ car $(1,1) \in E_3$ mais $2 \cdot (1,1) \notin E_3$



Exemple 27.17 (♥). Les exemples suivants sont à retenir, ils sont tous utiles.

1. $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$.
2. Soit E une partie de $\mathbf{R}$.
   - $D^n(E,\mathbf{K})$ (ensemble des fonctions n fois dérivables de E vers $\mathbf{K}$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E,\mathbf{K}), +, \cdot)$.
   - $\mathscr{C}^n(E,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E,\mathbf{K}), +, \cdot)$.
   - $\mathscr{C}^\infty(E,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E,\mathbf{K}), +, \cdot)$.
3. - L'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$.

- L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$.

4.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures, resp. diagonales) est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.
- L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.

Démonstration.

ATTENTION

L'ensemble des polynômes de degré égal à n muni des opérations usuelles n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$. En effet, $P = X^2 + X$ et $Q = -X^2$ sont deux polynômes de degré 2, alors que $P + Q = X$ est un polynôme de degré 1. L'opération somme n'est donc pas interne.

Exercice d'application 27.18. Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Montrer que

$$F = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

➥

Exercice d'application 27.19. On rappelle que si $P \in \mathbf{R}[X]$, on note dans ce cours $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale associée à P.
Montrer que $F = \left\{ P \in \mathbf{R}[X] \mid \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}(1) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

➥

Méthode 27.20. *Montrer qu'un ensemble est un* **K***-espace vectoriel*

Pour démontrer qu'un ensemble E est un **K**-espace vectoriel, on n'utilise jamais la Définition 27.1 (c'est bien trop long de vérifier les 8 points !). On montre plutôt que E est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu (d'où l'intérêt de connaître par cœur les espaces vectoriels de référence).

Exercice d'application 27.21. Soit $F = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} + u_n = u_0 \right\}$. Montrer que F est un **R**-espace vectoriel.

➥

Exercice d'application 27.22. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Montrer que $F = \{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \mid AX = 0_{n,1} \}$ est un **K**-espace vectoriel.

➥

Exercice d'application 27.23. Soit $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \,\middle|\, f'' + 3f' + 4f = 0 \right\}$. Montrer que F est un **R**-espace vectoriel.

➥

Proposition 27.24 - Combinaison linéaire de vecteurs d'un sev.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Alors F est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \forall x_1, \ldots, x_n \in F,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \quad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in F.$$

Démonstration.

27.2.2 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 27.25 - Sous-espace engendré.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $x_1, \ldots, x_n$ et se note $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$.

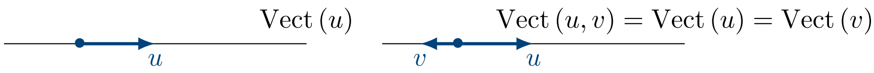
$$\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}.$$

Ainsi, pour tout vecteur u de E, on a l'équivalence

$$u \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \text{ tels que } u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Définition 27.26 - Droite vectorielle.

On appelle **droite vectorielle** de E un sous-espace vectoriel D de E qui s'écrit sous la forme $D = \operatorname{Vect}(u)$ avec $u \in E \setminus \{0\}$. On dit que u est un **vecteur directeur** de D.
Par définition, $D = \{\lambda \cdot u \,:\, \lambda \in \mathbf{K}\}$.



Définition 27.27 - Vecteurs colinéaires.

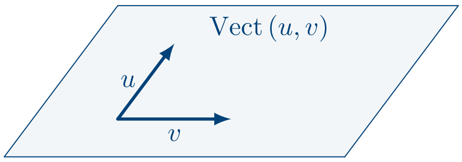
Soit u et v deux vecteurs de E. On dit que u et v sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Exemple 27.28.
- Dans $\mathbf{R}[X]$, X^2 et $3X^2$ sont colinéaires.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Définition 27.29 - Plan vectoriel.

On appelle **plan vectoriel** de E un sous espace vectoriel P de E qu'on peut écrire $P = \operatorname{Vect}(u, v)$ où u et v sont deux vecteurs non colinéaires de E. On a alors, par définition,

$$P = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \,:\, \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}.$$



Exemple 27.30.
- Dans $\mathbf{R}^2$, posons $e_1 = (2, 1)$. Alors

$$\operatorname{Vect}(e_1) = \{\lambda \cdot e_1 \,:\, \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(2\lambda, \lambda) \,:\, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\operatorname{Vect}(I_2, A) = \{\lambda_1 I_2 + \lambda_2 A \,:\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \,:\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

ATTENTION

À nouveau, lorsqu'il y a ambiguïté, il est important de préciser si l'on travaille dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ou dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, ce qui l'on peut éventuellement indiquer en précisant $\operatorname{Vect}_{\mathbf{C}}$ ou $\operatorname{Vect}_{\mathbf{R}}$.

Par exemple, $\operatorname{Vect}(1) = \{\lambda \cdot 1 \,:\, \lambda \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C}$ dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$. Par contre, $\operatorname{Vect}(1) = \{\lambda \cdot 1 \,:\, \lambda \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$. On pourra ainsi écrire $\operatorname{Vect}_{\mathbf{C}}(1) = \mathbf{C}$ et $\operatorname{Vect}_{\mathbf{R}}(1) = \mathbf{R}$.

Proposition 27.31 - Un sous-espace engendré est un sous-espace vectoriel.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Cette proposition est très utile pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, car certains ensembles s'écrivent rapidement sous forme d'espace engendré. Avant de voir quelques exemples, on précise le résultat précédent.

Théorème 27.32 - Le sev engendré par des vecteurs est le plus petit sev qui les contient.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
$\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient à la fois $x_1, x_2, \dots, x_n$
Cela signifie que pour tout sous-espace vectoriel G de E contenant $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_n) \subset G$.

Démonstration.

Enfin on termine par une proposition qui peut être utile en pratique.

Proposition 27.33 - Simplifier un sous-espace engendré.

Soit $e_1, \dots, e_p, x$ des vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Soit $\lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbf{K}^\star$ des scalaires non nuls.

1. $\mathrm{Vect}\,(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_p e_p) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p)$.
2. $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p, x) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p)$ si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Démonstration.

Exemple 27.34. Avec la proposition précédente, on peut écrire $\mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 2\right)\right) = \mathrm{Vect}\left((2,7,8)\right)$ et

$$\mathrm{Vect}\left((0,0),(1,1),(1,2),(2,3)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1),(1,2)\right).$$

Méthode 27.35. *Passer de l'écriture paramétrique à l'écriture sous forme d'équations et vice-versa*

On a vu dans le cours sur les ensembles qu'un ensemble E peut être décrit de deux manières :

Écriture paramétrique	Écriture avec équations
Exemple $\{(x,y,2x+y) \,:\, x,y \in \mathbf{R}\}$ $\{x(1,0,2)+y(0,1,1) \,:\, x,y \in \mathbf{R}\}$ $\mathrm{Vect}\left((1,0,2),(0,1,1)\right)$	Exemple $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 2x+y-z=0\right\}$

Suivant les problèmes, l'une ou l'autre de ces formes peut-être utile. Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, l'écriture paramétrique est par exemple adaptée, car on a immédiatement qu'un sous-espace engendré est un sous-espace vectoriel.

- **Passage de l'écriture paramétrique à l'écriture avec équations**. Il faut chercher des conditions d'existence d'une solution. Par exemple, considérons $F = \mathrm{Vect}\left((1,2,1),(3,4,1),(4,6,2)\right)$. On a, pour $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$,

  c'est l'EXISTENCE de solutions qui compte

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\iff \exists \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbf{R}, \quad \lambda_1(1,2,1)+\lambda_2(3,4,1)+\lambda_3(4,6,2) = (x,y,z)\\ &\iff \exists \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbf{R}, \quad (\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3, 2\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3) = (x,y,z)\end{aligned}$$

  On est ramené à chercher les valeurs de x,y,z pour lesquelles le système suivant est compatible :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boxed{1}\,\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 &=& x\\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 &=& y\\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &=& z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} \boxed{1}\,\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 &=& x &\\ \boxed{-2}\,\lambda_2 - 2\lambda_3 &=& -2x+y & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 &=& -x+z & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} \boxed{2}\,\lambda_1 + 2\lambda_3 &=& -4x+3y & L_1 \leftarrow 2L_1 + 3L_2\\ \boxed{-2}\,\lambda_2 - 2\lambda_3 &=& -2x+y &\\ 0 &=& 2x-2y+2z & L_3 \leftarrow 2L_3 - 2L_2 \end{array}\right.$$

  Ainsi le système admet une solution si et seulement si $x-y+z=0$, donc :

$$(x,y,z) \in F \iff x-y+z=0$$

  donc $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x-y+z=0\right\}$.

- **Passage de l'écriture avec équations à l'écriture paramétrique**. Il suffit de résoudre les équations proposées. Par exemple, considérons $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x+y=0 \text{ et } x+z=0 \right\}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + \boxed{1}\, y \phantom{+ \boxed{1}\, z} = 0 \\ x \phantom{+ \boxed{1}\, y} + \boxed{1}\, z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $F = \{(x,-x,-x) \,:\, x \in \mathbf{R}\} = \{x(1,-1,-1) \,:\, x \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,-1,-1))$.

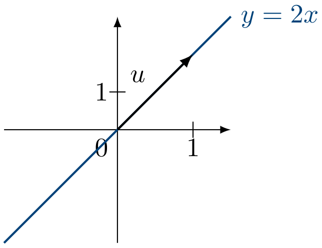
Exercice d'application 27.36. Montrer que $F = \left\{3aX^2 + (a+b)X - b \,:\, (a,b) \in \mathbf{C}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$.

➥

Exercice d'application 27.37. Montrer que $F = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 2x - y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

➥

On peut illustrer ce résultat, où $u = (1,2)$.



Exercice d'application 27.38. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x+2y+3z+4t=0\}$. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

➥

Exercice d'application 27.39. Montrer que

$$F = \left\{ f \in D^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \;\middle|\; \forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) + \frac{1}{1+x^2} f(x) = 0 \right\}.$$

est un **R**-espace vectoriel.

➥

Exercice d'application 27.40. Montrer que $F = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}$ est un **R**-espace vectoriel.

➥

Exercice d'application 27.41. Soit $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \widetilde{P}(1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

➥

Remarque 27.42. Il n'y a donc PAS unicité des vecteurs engendrant un sous-espace vectoriel.

Exercice d'application 27.43. Soit $H = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Montrer que H est un plan vectoriel.

➥

27.2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 27.44 - L'intersection de sev est un sev.

Soit I un ensemble. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors,

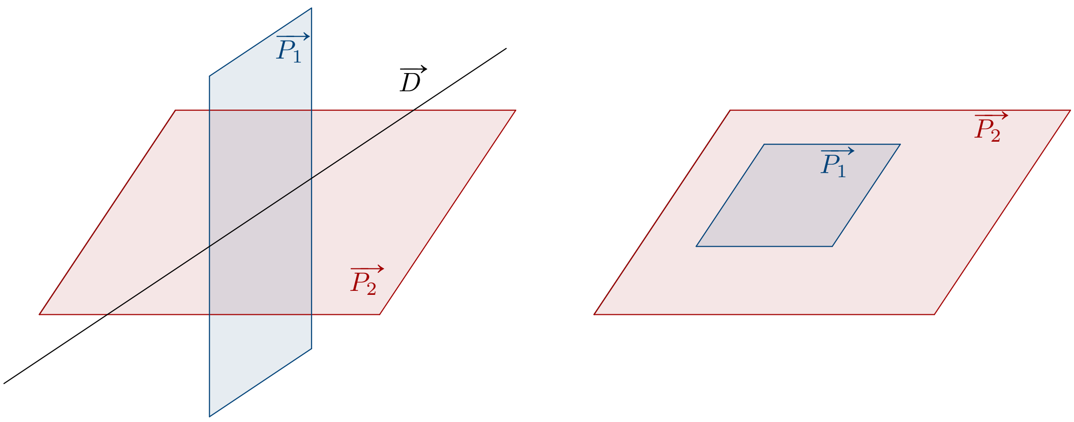
$$G = \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in F_i\},$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Remarque 27.45. Notons que dans la proposition, I est un ensemble quelconque, non nécessairement fini, ni même dénombrable.

Exemple 27.46. **1.** On se place dans l'espace vectoriel $(\overrightarrow{\mathcal{E}},+,\cdot)$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace. Soit deux plans vectoriels $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.



Alors $\overrightarrow{P_1} \cap \overrightarrow{P_2}$ est soit une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ (qui est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$), soit le plan $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_2}$ (si les deux plans sont confondus).

2. On se place dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}[X]$. On considère :
   - $F = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \widetilde{P} \text{ est paire}\}$ (vérifier que c'est un bien un sous-espace vectoriel) ;
   - $G = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \widetilde{P}(42) = 0\}$ (vérifier également que c'est un sous-espace vectoriel).

   Alors leur intersection $F \cap G = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \widetilde{P} \text{ est paire et } \widetilde{P}(42) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$.

Exercice d'application 27.47. Considérons

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 3x + 2y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ (2a, b, a+b) \,:\, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Prouver qu'il existe $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $E \cap F = \mathrm{Vect}\,(u)$.

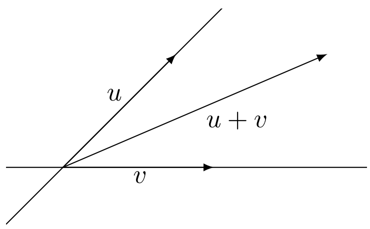
➥

27.3 Somme de sous-espaces vectoriels

On se place dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

ATTENTION

La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est en général PAS un sous-espace vectoriel. Dans l'exemple représenté ci-contre, on a $u + v \notin \mathrm{Vect}\,(u) \cup \mathrm{Vect}\,(v)$, donc $\mathrm{Vect}\,(u) \cup \mathrm{Vect}\,(v)$ n'est pas stable par somme.



Il est alors naturel de se demander quel est le « plus petit » sous-espace vectoriel de E contenant la réunion de F et G ?

Définition 27.48 - Somme de sous-espaces vectoriels.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $F + G$ et on appelle **somme** des sous-espaces vectoriels F et G l'ensemble

$$F + G = \{f + g \,:\, f \in F, g \in G\}.$$

Proposition 27.49 - La somme de deux sev est un sev.

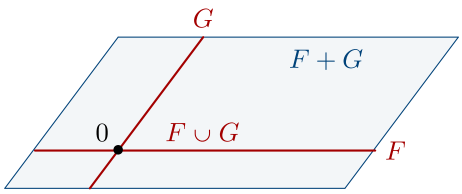
$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Proposition 27.50 - La somme de deux sev est le plus petit sev qui les contient tous les deux.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$. C'est-à-dire que pour tout sous-espace vectoriel H de E contenant $F \cup G$, on a :

$$F+G \subset H.$$



Démonstration.

Exemple 27.51. Dans le **R**-espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),+,\cdot)$, on considère le sous-espace vectoriel F des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $G = \mathrm{Vect}\,(\exp)$. On pose

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x^4 - 2x + 7\exp(x) \end{array}, \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x^4 - 2x \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 7\exp(x) \end{array}$$

Alors, $h \in F+G$ car h est la somme de la fonction f qui appartient à F et de la fonction g qui appartient à G.

Exercice d'application 27.52. Posons

$$E = \left\{ P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(0) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}\,(X+1)\,.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}[X]$.
2. Montrer que $E+F = \mathbf{R}[X]$.

➥

Proposition 27.53 - Écrire une somme de sev comme un sous-espace engendré.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E. On note $F = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_p)$. Alors,

$$F + G = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)\,.$$

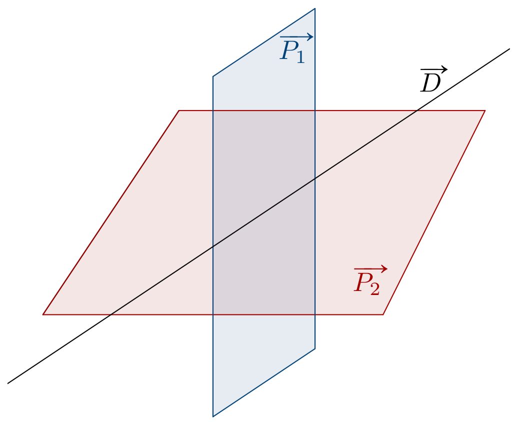
Démonstration.

27.3.1 Sous-espaces vectoriels en somme directe

La somme de sous-espaces vectoriels est un outil intéressant, mais elle souffre d'un défaut important : le manque d'unicité des décompositions. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors un vecteur de $F+G$ peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'un vecteur de F et d'un de G.

Exemple 27.54. Dans l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace, on considère deux plans non confondus $\overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}_2}$. Alors leur intersection est une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$, qui appartient aux deux plans.
$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1} + \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$ car $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$.
Mais $\overrightarrow{u}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$.
On peut également écrire $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{u}$ avec $\frac{1}{3}\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$.
Ainsi, il n'y a pas unicité de la décomposition de $\overrightarrow{u}$. On a trouvé deux couples différents (et même trois !) $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ et $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}, \overrightarrow{v_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2} \\ \overrightarrow{w_1} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}, \overrightarrow{w_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2} \\ \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \end{cases}$$



Se pose donc la question : quelle condition doit-on rajouter pour que les décompositions dans $F + G$ soient uniques ?

Définition 27.55 - Somme directe.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe** lorsque tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière **unique** en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\forall x, x' \in F, \forall y, y' \in G, \quad x+y = x'+y' \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x' \\ y & = & y' \end{array} \right. .$$

Lorsque la somme de F et G est directe, on la note $F \oplus G$.

Exercice d'application 27.56. Posons $F = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,1),(1,-1)\right)$. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ?

➥

Proposition 27.57 - Première caractérisation de la somme directe.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad x+y = 0_E \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0_E \\ y & = & 0_E \end{array} \right.$$

Démonstration.

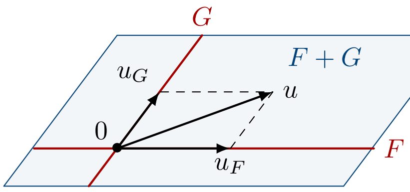
Proposition 27.58 - Seconde caractérisation de la somme directe.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

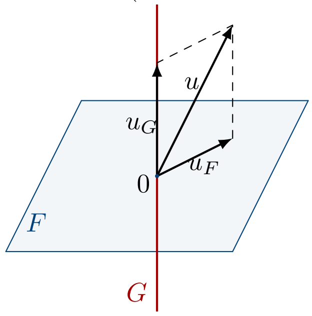
Démonstration.

Exemple 27.59. On se place dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace des vecteurs de la géométrie dans l'espace.

Deux droites non confondues sont en somme directe



Une droite et un plan ne contenant pas cette droite sont en somme directe (ici $F+G=\overrightarrow{\mathcal{E}}$ tout entier)



Dans chaque cas, tout vecteur $u \in F+G$ se décompose de manière unique comme $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

Exercice d'application 27.60. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbf{R})$, on pose F l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}) \,\middle|\, g(0) = g'(0) = g''(0) = 0 \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.

➥

27.3.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

On cherche maintenant à rajouter une nouvelle condition aux sommes directes : pouvoir décomposer de manière unique TOUS les vecteurs de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour cela, on a besoin de la notion de supplémentaire.

Définition 27.61 - Sous-espaces supplémentaires.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout élément x de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\forall x \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

Exemple 27.62. Dans l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace, un plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et une droite $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ qui n'est pas incluse dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Proposition 27.63 - Une première caractérisation des espaces supplémentaires.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si $F+G=E$ et F et G sont en somme directe.

Démonstration.

Remarque 27.64. En particulier, si F et G sont supplémentaires, on note $E = F \oplus G$.

En combinant ce résultat avec la seconde caractérisation des sommes directes (cf. Proposition 27.58), on obtient :

Proposition 27.65 - Seconde caractérisation des espaces supplémentaires.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$F+G=E \quad \text{et} \quad F\cap G = \{0_E\}.$$

Exemple 27.66 (♥).

1. Pour $n \in \mathbf{N}$, on déjà vu que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$, les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. En effet, nous avons démontré que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut s'écrire de manière unique comme $M = A+S$ avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$.
2. On a aussi déjà vu que toute fonction de $\mathbf{R}$ dan $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donc

   $$\{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ paire}\} \oplus \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ impaire}\} = \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}).$$

   Par exemple, la décomposition de exp est $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$.

Méthode 27.67. *Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires*

En pratique, pour montrer que F et G sont supplémentaires, on peut faire un raisonnement par analyse-synthèse, en rédigeant soigneusement la phase d'analyse (qui montre l'unicité de la décomposition) ET la phase de synthèse (qui montre l'existence de la décomposition).

Exercice d'application 27.68. Dans l'espace vectoriel $(\mathscr{C}^0([0\,;\,1]),+,\cdot)$ qu'on note E, on considère :

$$F=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0\,;\,1])\;\middle|\;\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}\quad\text{et}\quad G=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0\,;\,1])\;\middle|\;f\text{ est constante sur }[0\,;\,1]\right\}.$$

1. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^0([0\,;\,1])$.

2. Montrer que $F\oplus G=E$.

➥

Exercice d'application 27.69. Posons $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x - y + 2z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

2. Montrer que $F \oplus G = \mathbf{R}^3$.

➥

Questions de cours

1. Soit $x_1, \dots, x_n, x \in E$. Définir « x est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ »
2. Définir la notion de sous-espace vectoriel.
3. Donner la définition de sous-espace engendré.
4. Donner la définition de vecteurs colinéaires.
5. Donner la définition de droite vectoriel et de plan vectoriel.
6. Soit $e_1, \dots, e_n, x \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Vect}\left(e_1, \dots, e_n, x\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1, \dots, e_n\right)$.
7. L'intersection de sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ? L'union de sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ?
8. Définir la notion de somme de sous-espaces vectoriels.
9. Donner la définition de somme directe de sous-espaces vectoriels.
10. Donner la caractérisation avec l'intersection pour qu'une somme de sous-espaces vectoriels soit directe.
11. Donner la définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires.
12. Donner la caractérisation des supplémentaires avec l'intersection.