Chapitre 26 Séries numériques

« Numérique » signifie « réelle ou complexe » : on étudiera donc dans ce chapitre des séries à valeurs réelles ou complexes.
On fixe $n_0 \in \mathbf{N}$ pour le reste du chapitre.

26.1 Généralités et premiers exemples

26.1.1 Présentation

Définition 26.1 - Série.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ définie par

$$\forall N \geqslant n_0, \quad S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N.$$

Cette série se note $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur la valeur de n_0.
Pour tout $N \geqslant n_0$, le nombre S_N est appelé la **somme partielle** de rang N de la série de terme général u_n.

Définition 26.2 - Série convergente.

La série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ est convergente. Sa limite finie est alors appelée **somme de la série** $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ et notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
Autrement dit, si $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ est convergente,

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{N} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Si la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est **divergente**.

Remarque 26.3.
- Comme pour les suites, il faut faire la différence entre la série, le terme général de la série et la somme de la série.
- Une série est une suite.
- Le terme général et une somme partielle d'une série sont des nombres.
- La somme d'une série est sa limite, lorsqu'elle existe.
- Étudier la nature d'une série c'est déterminer si elle converge ou non. Deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exercice d'application 26.4. Exprimer les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n$. En déduire la nature (convergente ou divergente) de cette série.

➥

Exercice d'application 26.5. Donner les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. En déduire que la série converge et préciser sa somme.

➥

Exercice d'application 26.6. ♨ Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

➥

Exercice d'application 26.7. ♨ Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$, appelée **série harmonique**, est divergente.

➥

Définition 26.8 - Reste d'une série convergente.

Soit $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ une série numérique **convergente**. Pour tout $N \geqslant n_0$, le nombre

$$R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

est appelé le **reste d'ordre** N de cette série.

En particulier, si $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge, on a pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N.$$

26.1.2 Premières propriétés de convergence

Proposition 26.9 - L'indice de départ n'influe pas sur la nature de la série.

Soit n_0 et n_1 deux entiers naturels avec $n_0 \leqslant n_1$. Les séries associées aux suites $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_1}$ sont de même nature. Autrement dit les premiers termes de la suite n'interviennent pas sur la convergence ou la divergence de la série de terme général u_n. Par contre, dans le cas où la série converge, les sommes $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $S' = \sum\limits_{n=n_1}^{+\infty} u_n$ sont *a priori* différentes et on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration.
Les suites des sommes partielles sont de même nature puisque le rang de départ d'une suite n'influe pas sur sa nature. Par ailleurs, si $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{N} u_n$$

d'où l'égalité de la proposition en cas de convergence en faisant tendre N vers $+\infty$. □

Remarque 26.10. Cette proposition implique une convention d'écriture dans les exercices. Lorsqu'on demande la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ sans avoir auparavant défini à partir de quel entier n_0 les termes u_n sont considérés, c'est parce que cette valeur n_0 n'a aucune influence sur la nature de cette série. En pratique, on choisit n_0 le plus petit possible de sorte que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ soit correctement définie. Si l'énoncé demande la somme d'une série convergente, alors la valeur de n_0 est précisée.

Par exemple, quand on s'intéresse à la nature de la série $\sum \frac{1}{n}$, on s'intéresse à $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Proposition 26.11 - Le terme général et le reste d'une série convergente tend vers 0.

Si la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente, **alors :**

1. la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0 ;
2. la suite $(R_N)_{N \geqslant n_0}$ des restes de la série converge vers 0.

Démonstration.

La contraposée du premier point est souvent utilisée pour repérer « facilement » des séries divergentes.

Corollaire 26.12 - Divergence grossière.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ une série numérique. Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge.
On dit que cette série **diverge grossièrement**.

Exercice d'application 26.13. Étudier la nature des séries $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n+1}{n+2}$.

➥

ATTENTION

Le fait que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0 ne permet pas de prouver que la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente.

Par exemple, la série harmonique diverge (voir l'Exercice d'application 26.7) alors que $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. L'exercice d'application ci-après fournit un autre exemple de série divergente avec un terme général qui tend vers 0. Si on doit résumer :

Une somme infinie de quantités qui tendent vers 0 peut ne pas converger

Exercice d'application 26.14. Montrer que la suite de terme général $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 mais la série $\sum_{n \geqslant 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge.

➥

Théorème 26.15 - Linéarité des séries convergentes.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ deux séries numériques et λ et μ deux scalaires.
Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ sont convergentes, alors $\sum_{n \geqslant n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

En particulier, la somme de deux séries convergentes est convergente.

Démonstration.
Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ sont convergentes alors on a, pour tout $N \geqslant n_0$,

$$\sum_{n=n_0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{N} v_n.$$

$\sum_{n=n_0}^{N} u_n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{N} v_n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ donc $\sum_{n=n_0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$. $\square$

Remarque 26.16. Dans le théorème, l'égalité $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ n'a de sens que si les trois séries convergent.

Théorème 26.17 - Somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ deux séries numériques.
Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ divergente, alors $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + v_n)$ est divergente.

Démonstration.

ATTENTION

1. Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum_{n\geqslant n_0}(u_n+v_n)$ (voir l'exemple ci-après).
2. Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ convergent, on ne peut rien dire en général de $\sum_{n\geqslant n_0} u_n v_n$. Nous verrons que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et pourtant la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\times\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 26.18. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} n$ et $\sum_{n\geqslant 0} -n$ sont divergentes. Leur somme $\sum_{n\geqslant 0} 0$ est convergente. Par contre, la série $\sum_{n\geqslant 0} n+\sum_{n\geqslant 0} n=\sum_{n\geqslant 0} 2n$ est divergente.

Proposition 26.19 - Critère de convergence d'une série à valeurs complexes.

Soit $u\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant n_0}\mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum_{n\geqslant n_0}\mathfrak{Im}(u_n)$ convergent. Le cas échéant,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n=\sum_{n=n_0}^{+\infty}\mathfrak{Re}(u_n)+i\sum_{n=n_0}^{+\infty}\mathfrak{Im}(u_n).$$

Démonstration.
Immédiat en utilisant les résultats sur les suites complexes. □

26.1.3 Séries géométriques

Définition 26.20 - Série géométrique.

On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ où q est un nombre complexe.

Proposition 26.21 - Nature des séries géométriques.

Soit $q\in\mathbf{C}$. La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$. Le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n=\frac{1}{1-q}.$$

Démonstration.

Exercice d'application 26.22. Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 5^n$; **2.** $\sum\limits_{n\geqslant 0} i^n$; **3.** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$; **4.** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n}$.

➥

26.1.4 Séries exponentielles

Théorème 26.23 - Série exponentielle.

Soit $x \in \mathbf{R}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est appelée **série exponentielle**. C'est une série convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Démonstration.
La démonstration sera donnée plus tard dans l'année, dans le chapitre *Intégration sur un segment.* □

Exercice d'application 26.24. Déterminer la nature et la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{3^{n-1}}{n!}$.

➥

26.1.5 Comparaison série-intégrale

Lemme 26.25 - Comparaison série-intégrale.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0\,;+\infty[$.

Pour tout $N \geqslant n_0$, on note $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$.

1. Si f est croissante, alors pour tout $N \geqslant n_0$

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0) \leqslant S_N \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N).$$

2. Si f est décroissante, alors pour tout $N \geqslant n_0$,

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N) \leqslant S_N \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0).$$

Démonstration.

Théorème 26.26 - Comparaison série-intégrale.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue, **décroissante** et positive ou nulle sur $[n_0\,;+\infty[$. Alors il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{=} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + \mathrm{o}(1)\,.$$

En particulier :

- $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ et $\left(\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant n_0}$ sont de même nature.
- En cas de divergence,

$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Exercice d'application 26.27. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}(1)\,.$$

Le réel γ est appelé la **constante gamma d'Euler**.

➥

26.1.6 Les séries de Riemann

Définition 26.28 - Série de Riemann.

On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

Théorème 26.29 - Nature des séries de Riemann.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

Remarque 26.30. Dans le théorème précédent, on peut préciser un peu les cas de divergence.

- Si $\alpha \leqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Si $0 < \alpha \leqslant 1$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (mais pas grossièrement). Dans ce cas, on a aussi obtenu dans la démonstration :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Exercice d'application 26.31. Déterminer la limite de $\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{N \in \mathbf{N}}$.

➥

26.2 Séries à termes positifs

On s'intéresse à présent aux séries dont le terme général est positif ou nul (donc pas de séries à termes complexes ici !), mais les résultats que nous allons démontrer s'adaptent aisément au cas négatif. L'essentiel est donc, dans ce paragraphe, que le terme général soit **de signe constant** (même si ça n'est vrai qu'**à partir d'un certain rang**, les résultats présentés restent valables).

Lemme 26.32 - Sens de variation d'une série à termes positifs.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ une série dont le terme général est positif ou nul. Alors la suite des sommes partielles de la série est croissante.

Démonstration.

Théorème 26.33 - Adaptation du théorème de la limite monotone aux séries.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ une série dont le terme général u_n est réel positif ou nul. La série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration.

Théorème 26.34 - Critère de comparaison par des inégalités.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}, (v_n)_{n \geqslant n_0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

1. Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge aussi.
2. Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ diverge aussi.

Démonstration.

Exercice d'application 26.35. Donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$. Vous pourrez remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, $\sqrt{n^4+n+1} \geqslant n^2$.

➥

Exercice d'application 26.36. Donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n} \right)$. Vous pourrez remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}$.

➥

Théorème 26.37 - Règle de l'équivalent.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites à termes réels positifs ou nuls.
Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration.

Exercice d'application 26.38. Donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{2^n} \right)$.

➥

Exercice d'application 26.39. Donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right)$.

➥

Exercice d'application 26.40. ♨ Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arccos}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

➥

26.3 Convergence absolue et suites sommables

Définition 26.41 - Série absolument convergente.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série $\sum_{n\geqslant n_0} |u_n|$ converge.

Notation 26.42. Pour traduire qu'une suite est absolument convergente, on pourra noter $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ (attention, cette notation ne se généralise pas aux séries convergentes tout court).

Définition 26.43 - Suite sommable.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **sommable** lorsque la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Définition 26.44 - Somme d'une suite sommable.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est sommable, on appelle **somme de la suite** $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ la somme de la série qui lui associée, à savoir le nombre $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Exemple 26.45. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente puisque $\sum_{n \geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.
On peut donc aussi dire que la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable.

Théorème 26.46 - La convergence absolue entraîne la convergence.

Si une série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Démonstration.
- Cas où u est réel. La série $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ converge et pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2\,|u_n|$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + |u_n|)$ converge. Par différence, la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge à son tour.
- Cas où u est complexe. La série $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ converge et pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant |\mathfrak{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\mathfrak{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum_{n \geqslant n_0} |\mathfrak{Re}(u_n)|$ et $\sum_{n \geqslant n_0} |\mathfrak{Im}(u_n)|$ convergent toutes les deux. Avec le premier point, on en déduit que $\sum_{n \geqslant n_0} \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geqslant n_0} \mathfrak{Im}(u_n)$ convergent. Finalement, par linéarité, la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n = \sum_{n \geqslant n_0} (\mathfrak{Re}(u_n) + i\,\mathfrak{Im}(u_n))$ converge à son tour. □

Proposition 26.47 - Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes.

Si une série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration.

Exercice d'application 26.48. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n^2}$.

➥

Exercice d'application 26.49. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{in}}{n^2}$ converge.

➥

ATTENTION

> Une série peut être convergente sans être absolument convergente (cf. exercice d'application suivant). On dit alors que la série est **semi-convergente**.

Exercice d'application 26.50. ♨ On considère la **série harmonique alternée** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Cette série est-elle absolument convergente ? convergente ?

➥

Remarque 26.51 (♨). Dans le cas où $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas sommable, il est toujours possible que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ soit convergente et donc que la somme $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ existe. Cependant, si la suite est sommable, on peut prouver que quelle que soit la façon de regrouper les termes de la suite (même en changeant l'ordre), la somme existe et vaut toujours la même valeur (hors-programme).

Proposition 26.52 - Règle du grand O pour la convergence absolue.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels **positifs**. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration.

Exercice d'application 26.53. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{n\cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3-5n+2}$?

➥

Corollaire 26.54 - Règle du petit o pour la convergence absolue.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels **positifs**. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la proposition précédente, car si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. □

Exercice d'application 26.55. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n \ln n}{\mathrm{e}^n}$.

➥

26.4 Lien entre suite et série

Proposition 26.56 - Lien entre suite et série.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0}(u_{n+1}-u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature.

Démonstration.

Remarque 26.57. Dans la proposition précédente, la condition porte uniquement sur la convergence de la suite (u_n) et pas sur la valeur de sa limite. En particulier, il n'est pas nécessaire que la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ soit nulle pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

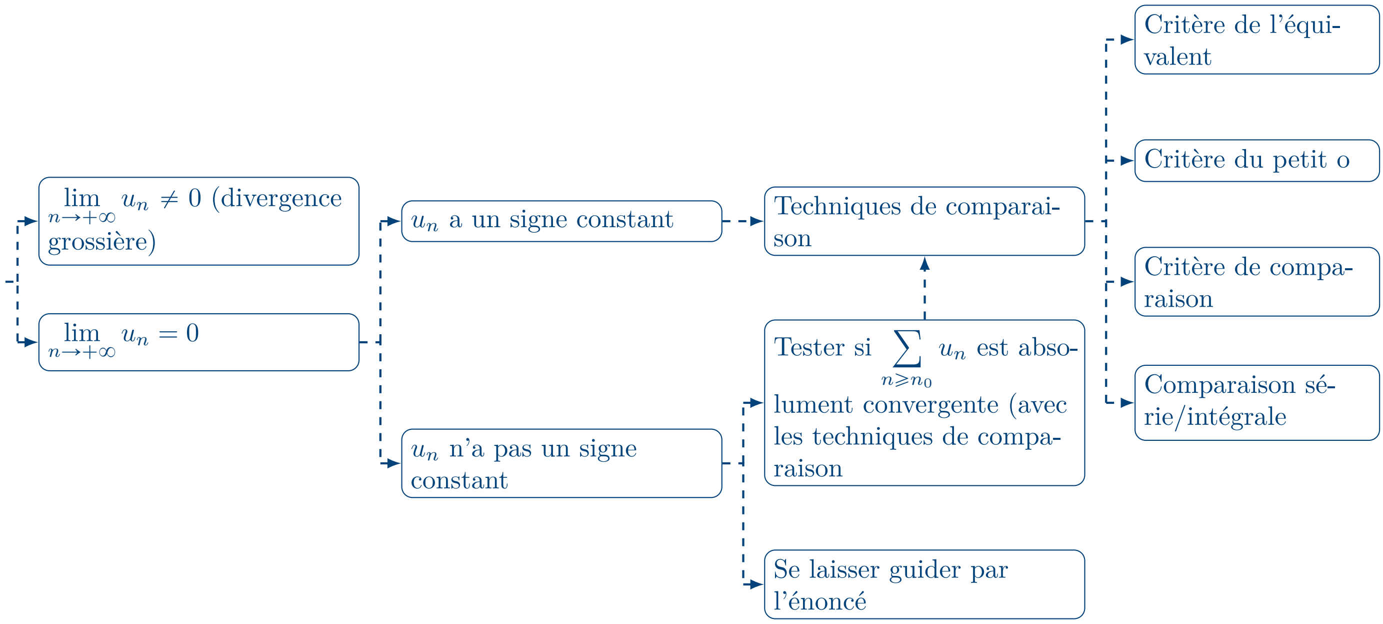
On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Exercice d'application 26.58. On veut montrer le résultat de l'Exercice d'application 26.27 d'une nouvelle manière. Pour tout $n\geqslant 1$, on pose $a_n=\ln(n)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

➥

26.5 Plan d'étude d'une série numérique

Considérons une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ à termes quelconques.



Questions de cours

1. Quelle notation utilise-t-on pour une série ?
2. Quelle est la définition de série convergente ? Divergente ?
3. Quelle est la définition de somme d'une série ? Quelle notation utilise-t-on pour désigner la somme d'une série ?
4. Quelle est la définition de N-ième somme partielle d'une série, où $N \in \mathbf{N}$? Quelle notation utilise-t-on pour désigner la N-ième somme partielle d'une série ?
5. Quelle est la définition de N-ième reste d'une série convergente ?
6. Définir la notion de divergence grossière.
7. Que peut-on dire de la somme de deux séries convergentes ? D'une série convergente et d'une série divergente ?
8. Définir la notion de série géométrique. Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une telle série converge. En cas de convergence, vous préciserez la valeur de la somme.
9. Définir la notion de série exponentielle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle série converge et, le cas échéant, préciser sa somme.
10. Énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.
11. Définir la notion de série Riemann. Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une telle série converge.
12. Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que $0 \leqslant u \leqslant v$. Donner une condition suffisante pour que $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge. Énoncer un résultat similaire qui donne plutôt la divergence d'une série.
13. Énoncer la règle de l'équivalent.
14. Définir la notion de série absolument convergente.
15. Quel est le lien entre l'absolue convergence et la convergence « simple » ?
16. Énoncer la règle du grand O.
17. Énoncer la règle du petit o.