Chapitre 25 Convexité de fonctions

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point.

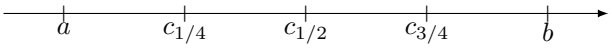
25.1 Coordonnées des points d'un segment

Proposition 25.1 - Paramétrage d'un segment.

Soit a et b deux réels. Alors

$$[a\,;\,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b \,:\, \lambda \in [0\,;\,1]\}\,.$$

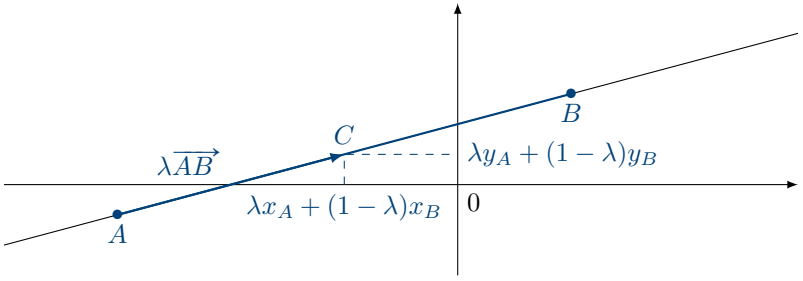
pour tout $\lambda \in [0\,;\,1]$, $c_\lambda = (1-\lambda)a + \lambda b$



Démonstration.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \leqslant b$. Si on assimile les réels à des points sur la droite des réels, alors la proposition précédente se traduit par :

$$[a, b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b \,:\, \lambda \in [0\,;\,1]\}\,.$$



25.2 Présentation des fonctions concaves et convexes

Définition 25.2 - Fonction convexe, concave.

Soit f une fonction définie sur I et à valeur dans $\mathbf{R}$.

1. On dit que f est **convexe** sur I si, seulement si,
$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0\,;\,1],\quad f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$
2. On dit que f est **concave** sur I si, et seulement si, $-f$ est convexe autrement dit si, et seulement si,
$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0\,;\,1],\quad f((1-\lambda)x+\lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

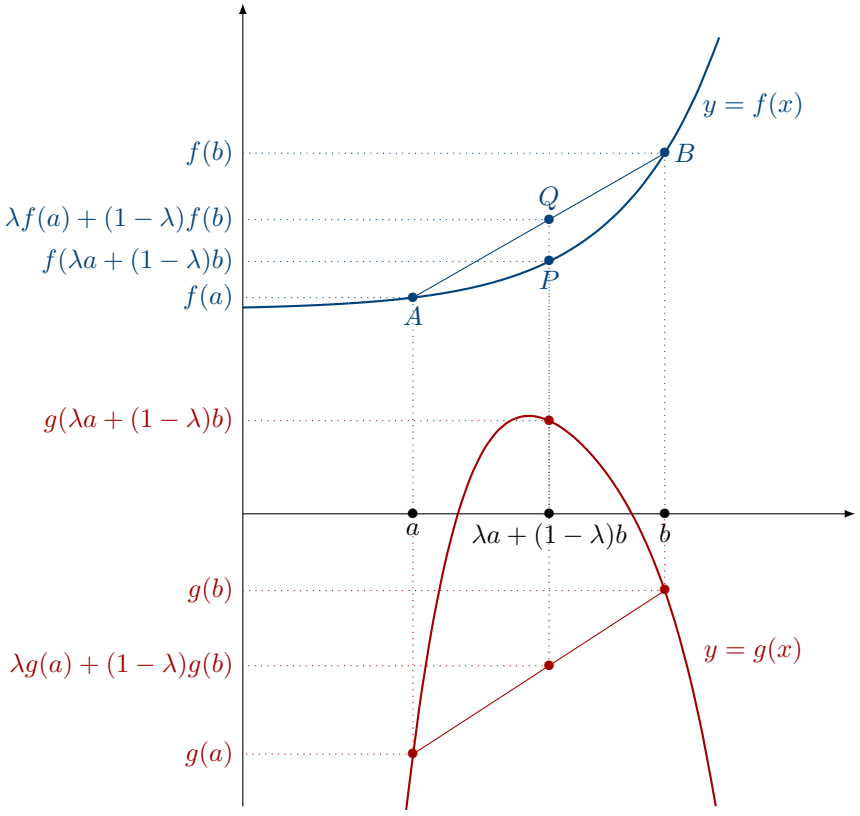
Exemple 25.3. La fonction valeur absolue est convexe. En effet, soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, soit $t \in [0\,;\,1]$.

$$\begin{aligned} |ta+(1-t)b| &\leqslant |ta|+|(1-t)b| && \text{d'après l'inégalité triangulaire}\\ &\leqslant t\,|a|+(1-t)\,|b| && \text{car } t \geqslant 0,\ 1-t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Proposition 25.4 - Caractérisation graphique avec les cordes.

1. Une fonction est convexe si, et seulement si, tout arc de sa courbe représentative est situé en dessous de la corde correspondante.
2. Une fonction est concave si, et seulement si, tout arc de sa courbe représentative est situé au dessus de la corde correspondante.

f est une fonction convexe, g est une fonction concave



Démonstration. **1.** Supposons f convexe. Soit A et B les points de la courbe représentative de f de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Soit t un réel compris entre a et b. On note P le point de la courbe représentative de f de

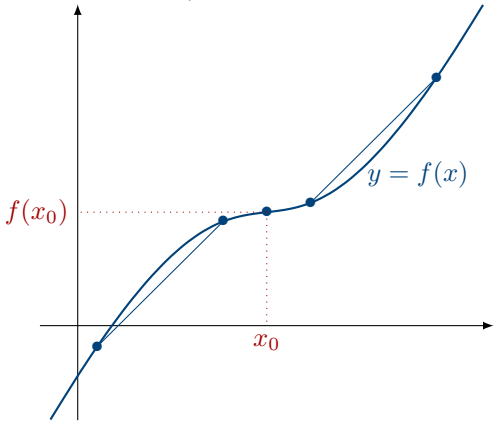
coordonnées $(t, f(t))$, qui se trouve donc sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe représentative de f et Q le point du segment $[MN]$ d'abscisse t. Puisque t est entre a et b, il existe $\lambda \in [0\,;1]$ tel que $t = (1-\lambda)a + \lambda b$. Les coordonnées de P sont donc $((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b))$, et celles de Q sont $(\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))$ d'après la première section de ce chapitre. Ainsi, la fonction f est convexe si, et seulement si, P est en dessous de Q.

2. Si f est concave, alors $-f$ est convexe par définition d'où le résultat. □

Définition 25.5 - Point d'inflexion.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que a est un **point d'inflexion** si f est concave (resp. convexe) localement avant a puis convexe (resp. concave) localement après a.

f admet un point d'inflexion en x_0 (la fonction est d'abord concave, puis convexe)



Exemple 25.6. La fonction cube présente un point d'inflexion en 0 (elle est concave puis convexe).

25.3 Caractérisations des fonctions convexes

Théorème 25.7 - Caractérisation avec le sens de variation du taux d'accroissement.

Soit f une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

1. La fonction f est convexe si, et seulement si, pour tout $x_0 \in I$, la fonction

$$\tau_{x_0} : x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

2. La fonction f est concave si, et seulement si, pour tout $x_0 \in I$ la fonction τ_{x_0} est décroissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

Démonstration.

Graphiquement, cela signifie que les coefficients directeurs des cordes reliant le point $M(x, f(x))$ au point $M(x_0, f(x_0))$ forment une fonction croissante de x.

Exercice d'application 25.8. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$.

➥

Théorème 25.9 - Caractérisation des fonctions convexes/concaves dérivables.

1. Une fonction f dérivable sur I est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est croissante sur I.
2. Une fonction f dérivable sur I est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est décroissante sur I.

Démonstration.

Corollaire 25.10 - Caractérisation des fonctions convexes/concaves deux fois dérivables.

1. Une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ deux fois dérivable sur I est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.
2. Une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ deux fois dérivable sur I est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est négative ou nulle sur I.

Exercice d'application 25.11. ♥ Montrer que la fonction exponentielle est convexe et que la fonction logarithme népérien est concave.

➥

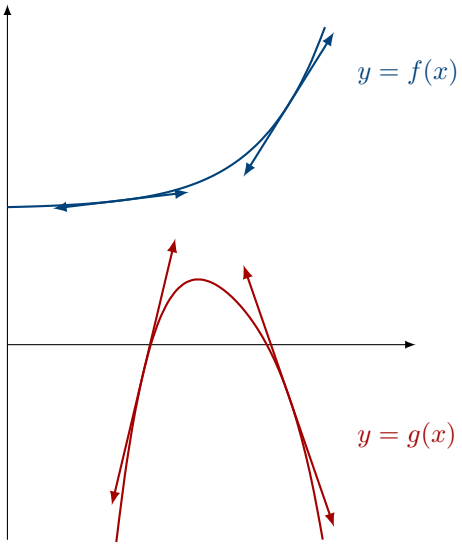
25.4 Application : inégalités de convexité

Théorème 25.12 - Position de la courbe par rapport aux tangentes.

La courbe représentative d'une fonction convexe (resp. concave) dérivable sur un intervalle I est au-dessus (resp. en dessous) de chacune de ses tangentes sur I.

Démonstration.

f est une fonction convexe, g est une fonction concave

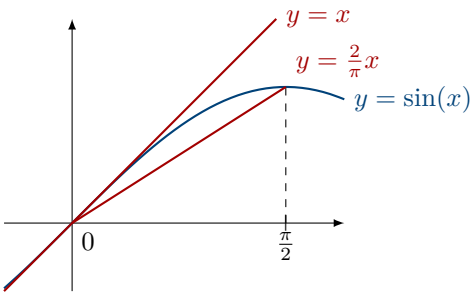


Exercice d'application 25.13. ♥ Justifier que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a $\ln(x) \leqslant x-1$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\exp(x) \geqslant x+1$.

➥

Exercice d'application 25.14. ♥ Démontrer que pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

➥


$y = x$
$y = \frac{2}{\pi}x$
$y = \sin(x)$
0
$\frac{\pi}{2}$

Questions de cours

1. Quelle est la définition de fonction convexe ?
2. Quelle est la définition de fonction concave ?
3. Que peut-on dire du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes ?
4. Que peut-on dire du graphe d'une fonction concave par rapport à ses cordes ?
5. Qu'est-ce qu'un point d'inflexion ?
6. Quelle est la caractérisation des fonctions convexes dérivables (avec la dérivée première ?)
7. Quelle est la caractérisation des fonctions concaves dérivables (avec la dérivée première ?)
8. Quelle est la caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables (avec la dérivée seconde ?)
9. Quelle est la caractérisation des fonctions concaves deux vois dérivables (avec la dérivée seconde ?)
10. Que peut-on dire du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes ?
11. Que peut-on dire du graphe d'une fonction concave dérivable par rapport à ses tangentes ?