CHAPITRE 24 PROBLÈMES D'ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Dans ce chapitre, on donne des exemples de développements asymptotiques dans le cadre discret et continu.

24.1 Solutions d'équations à paramètres

Exercice d'application 24.1.

1. **(a)** Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x + x \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $[1\,; +\infty[$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'équation $\mathrm{e}^x + x - n = 0$ a une unique solution dans $\mathbf{R}_+$, que l'on notera u_n.

   On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

2. **(a)** Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   (b) En déduire que $\mathrm{e}^{u_n} + u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{u_n}$ puis que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $v_n = u_n - \ln(n)$. Le but est de trouver un équivalent de $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$.

   (a) Pourquoi peut-on affirmer que $v_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}(\ln(n))$?

   (b) En utilisant la définition de u_n montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{n}\right)$.

   (c) En déduire que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n}$.

   (d) Justifier qu'on peut écrire $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

On dit qu'on a trouvé un **développement asymptotique** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$: l'erreur commise en approchant u_n par $\ln(n)$ est négligeable par rapport à $\ln(n)$ et même équivalente à $-\dfrac{\ln(n)}{n}$, et l'erreur commise en approchant u_n par $\ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n}$ est elle-même négligeable par rapport à $\dfrac{\ln(n)}{n}$.

➥

24.2 Suites récurrentes

Dans l'exercice qui suit, les termes du développement asymptotique de la suite sont obtenus les uns après les autres, du plus grand au plus petit selon un principe de « boucle ». À chaque fois que l'on vient d'obtenir un terme à une certaine précision, on le réinjecte dans la relation de récurrence et on obtient ainsi un nouveau terme.

Exercice d'application 24.2. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}.$$

On souhaite obtenir un développement asymptotique de la suite u.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le terme u_n de la suite est correctement défini et vérifie $0 \leqslant u_n \leqslant n$. Ceci prouve en particulier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est correctement définie.

2. **(a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant n - 1$.

(b) Déduire des questions précédentes que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

3. Première itération.

(a) En remplaçant u_n par $n + \mathrm{o}(n)$ dans la relation de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n, déterminer des réels a et b tels que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} an + b + \mathrm{o}(1)$.

(b) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$.

4. Deuxième itération.

(a) En remplaçant u_n par $n - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$ dans la relation de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n, déterminer un réel c tel que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} an + b + \dfrac{c}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet pour développement asymptotique :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

➥

24.3 Suites d'intégrales

Exercice d'application 24.3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

4. Justifier rapidement que pour tout $t > 0$, on a $\ln(1+t) \leqslant t$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1},$$

puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$.

5. En déduire le développement asymptotique : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

➥

24.4 Bijection réciproque

Exercice d'application 24.4. On considère la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}$

1. Montrer que g est une bijection.
2. Que vaut $\lim\limits_{y \to +\infty} g^{-1}(y)$?
3. On s'intéresse au développement limité de g^{-1} en 0.
   (a) Justifier que g^{-1} possède un développement limité à tout ordre en 0.
   (b) Quel est le développement limité à l'ordre 0 en 0 de g^{-1} ?
   (c) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.
   (d) Déterminer les coefficients a, b, c du développement limité de g^{-1} à l'ordre 3 en 0 :
   $$g^{-1}(y) \underset{y \to 0}{=} ay + by^2 + cy^3 + \mathrm{o}\big(y^3\big)$$
   en injectant ce développement dans l'identité $g^{-1}(g(x)) = x$, valable pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.
4. On voudrait maintenant un développement asymptotique de g^{-1} en $+\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}_+^\star$, on a $\ln(g^{-1}(y)) + g^{-1}(y) = \ln(y)$.
   (b) En déduire que $g^{-1}(y) \underset{y \to +\infty}{\sim} \ln(y)$.
   (c) On pose $\varphi(y) = g^{-1}(y) - \ln(y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}_+^\star$.
      i. Justifier que $\varphi(y) \underset{y \to +\infty}{=} \mathrm{o}(\ln(y))$.
      ii. Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}_+^\star$, on a $\mathrm{e}^{\varphi(y)} = \dfrac{1}{\varphi(y) + \ln(y)}$.
      iii. En déduire que $\mathrm{e}^{\varphi(y)} \underset{y \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(y)}$ puis en déduire un équivalent de φ en $+\infty$.
      iv. En déduire que $g^{-1}(y) \underset{y \to +\infty}{=} \ln(y) - \ln(\ln(y)) + \mathrm{o}(\ln(\ln(y)))$.

➥