CHAPITRE 23 — ÉTUDE DE SUITES RÉCURRENTES

Dans ce chapitre, nous allons étudier les suites définies par la relation de récurrence suivante

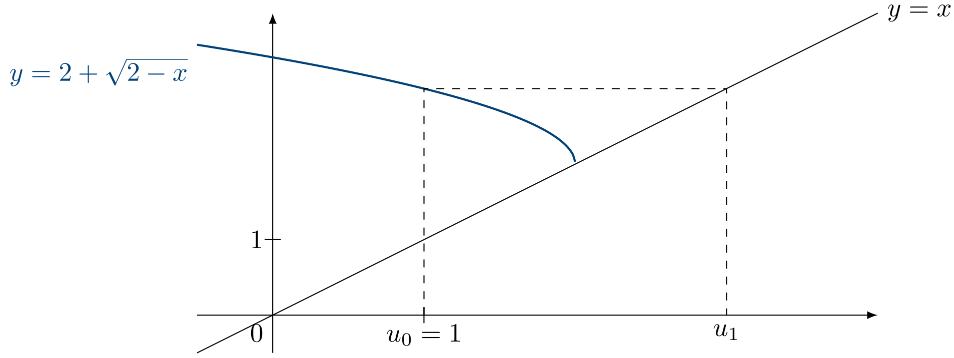
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \tag{23.1}$$

où f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles. Ce cours comporte peu de résultats théoriques, il présente plutôt des méthodes pour étudier de telles suites.

23.1 Stabilité

ATTENTION

Il n'est pas du tout automatique que la suite définie par (23.1) existe. La définition par récurrence nécessite qu'à chaque étape le terme u_n soit dans le domaine de définition de f. Par exemple, on ne peut pas définir de suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{2 - u_n}$. En effet, on aurait $u_1 = f(u_0) = 3$ et la relation ne permet pas de définir u_2 puisque $f : x \longmapsto 2 + \sqrt{2-x}$ n'est pas définie en 3.



Définition 23.1 - Intervalle stable par une fonction.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}$. Un intervalle I contenu dans D est dit **stable** par f lorsque $f(I) \subset I$ c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

Exemple 23.2.

- L'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$ est stable par la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ car pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$.
- L'intervalle $[0\,;\,1]$ est stable par la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ car pour tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1.$$

Proposition 23.3 - Condition suffisante pour que la suite donnée par (23.1) soit bien définie.

Si I est un intervalle stable par f et si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par (23.1) est bien définie et tous ses termes appartiennent à I.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note H_n la propriété « u_n existe **et** $u_n \in I$ ».

u_0 existe et $u_0 \in I$ donc H_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n est vraie. On a $u_n \in I \subset D$ donc $f(u_n)$ est bien défini et u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n \in I$, $u_{n+1} \in f(I)$ donc $u_{n+1} \in I$ et donc H_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n \in I$. □

Remarque 23.4. Il est évident que si f est définie sur $\mathbf{R}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

Exercice d'application 23.5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbf{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.
Montrer que u est bien définie et que tous ses termes sont positifs ou nuls.

➥

Pour la suite de ce cours, on suppose que I est un intervalle stable par f et que $u_0 \in I$ (et donc que tous les termes de la suite (u_n) sont dans I).

23.2 Convergence

23.2.1 Principe général

On rappelle le résultat suivant, déjà obtenu dans le chapitre *Continuité de fonctions*.

Théorème 23.6 - Limites finies possibles pour u définie par (23.1) quand f est continue.

On suppose que I est un intervalle fermé stable par f. Si f est continue, alors les limites finies possibles de u (définie par la relation (23.1)) sont les points fixes de f, à savoir les réels ℓ qui vérifient $f(\ell) = \ell$.

ATTENTION

Le théorème précédente ne dit pas que u converge nécessairement vers un point fixe, mais plutôt que **si** u converge, alors c'est nécessairement vers un point fixe.

Méthode 23.7. *Montrer qu'une suite définie par récurrence converge et trouver sa limite*

Pour déterminer la limite d'une suite définie par (23.1) (une fois qu'on a démontré que cette suite est bien définie, avec un argument de stabilité !), on pourra essayer d'adopter la stratégie suivante :

1. déterminer le sens de variation de u ;
2. si u est monotone (ça sera souvent le cas), appliquer le théorème de la limite monotone pour obtenir que

la suite admet une limite ;

3. chercher les points fixes de f et conclure.

ATTENTION

Le sens de variation de u n'est pas nécessairement celui de f !!

Exercice d'application 23.8. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n}$, diverge vers $+\infty$.

➥

Exercice d'application 23.9.

1. Montrer que l'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$ est stable par $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.

➥

Méthode 23.10. *Lien entre monotonie de la suite et signe de $f(x) - x$*

Le signe de $x \longmapsto f(x) - x$ sur I peut permettre d'obtenir le sens de variation de la suite.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \geqslant 0$, alors u est croissante (car si $u_n \in I$, alors $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ puis $u_{n+1} \geqslant u_n$; cette justification est à écrire à chaque fois).
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \leqslant 0$, alors u est décroissante (car si $u_n \in I$, alors $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ puis $u_{n+1} \leqslant u_n$; cette justification est à écrire à chaque fois).

Il faut être vigilant, ces résultats ne sont vrais que sur des intervalles stables (la stabilité de I permet d'obtenir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$).

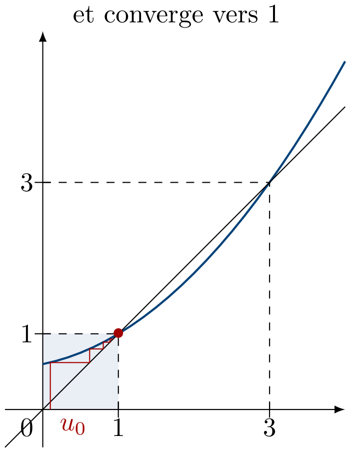
Exercice d'application 23.11. Soit u une suite pour laquelle, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n + 3}{5}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
2. Déterminer la nature de u et sa limite éventuelle.

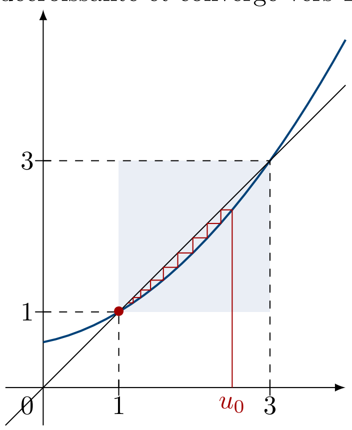
➥

Remarque 23.12. Les résultats de l'exercice d'application précédent peuvent tous être conjecturés sur un graphique (c'est d'ailleurs une bonne idée de tracer des graphiques pour mieux comprendre le comportement d'une suite récurrente avant de se lancer dans des calculs).

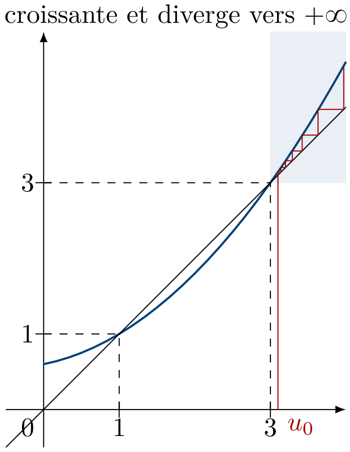
Si $u_0 \in [0\,;\,1]$, la suite u est croissante et converge vers 1



Si $u_0 \in [1\,;\,3[$, la suite u est décroissante et converge vers 1



Si $u_0 \in]3\,;\,+\infty[$, la suite u est croissante et diverge vers $+\infty$



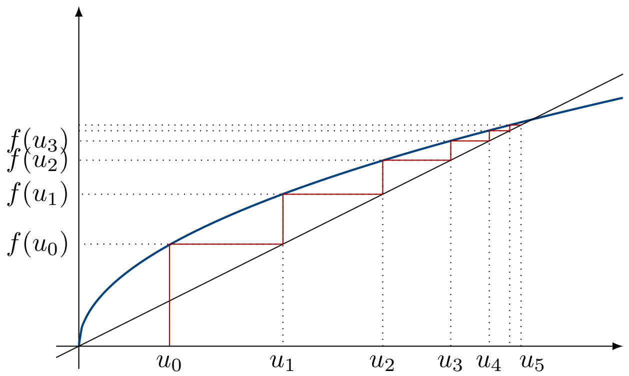
23.2.2 Cas où la fonction f est croissante

Méthode 23.13. *Sens de variation de la suite si f est croissante*

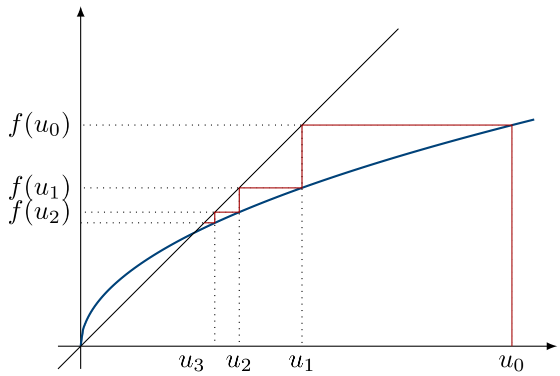
Si f est croissante, alors la suite u est monotone (pas nécessairement croissante !). Comparer u_1 et u_0 permet alors de déterminer la monotonie de u. Si $u_1 \geqslant u_0$ on peut montrer que u est croissante, si $u_1 \leqslant u_0$ alors on peut montrer que u est décroissante.
Il faut systématiquement faire une récurrence pour démontrer ce résultat.

Démonstration.

Fonction f croissante, suite u croissante



Fonction f croissante, suite u décroissante



Remarque 23.14. La méthode précédente n'est utile que si on connaît la valeur de u_0. En effet, si la seule information dont on dispose est $u_0 \in I$, alors comparer u_1 et u_0 ne peut se faire qu'en étudiant le signe de $x \longmapsto f(x) - x$. Dans ce cas, autant appliquer directement la Méthode 23.10.

Exercice d'application 23.15. On considère $f : x \longmapsto 1 - \cos(x)$.

1. Montrer que $[0\,;\,1]$ est stable par f.
2. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrer que la suite u converge (on ne demande pas sa limite).

➥

23.2.3 Cas où la fonction f est décroissante

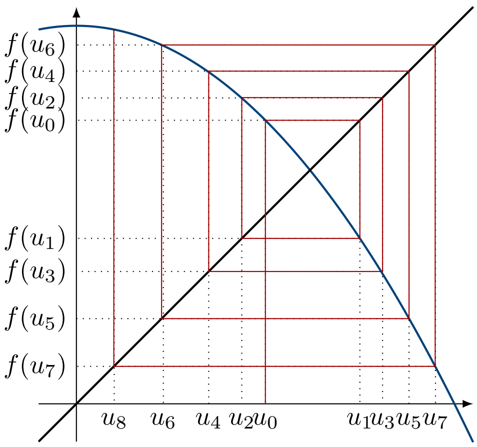
Méthode 23.16. *Cas où la fonction f est décroissante*

Si f est décroissante sur un intervalle stable, la suite u définie par (23.1) n'est pas monotone (elle n'admet donc pas toujours une limite). On sait tout de même que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Ce résultat est hors-programme et il faut le redémontrer à chaque fois.

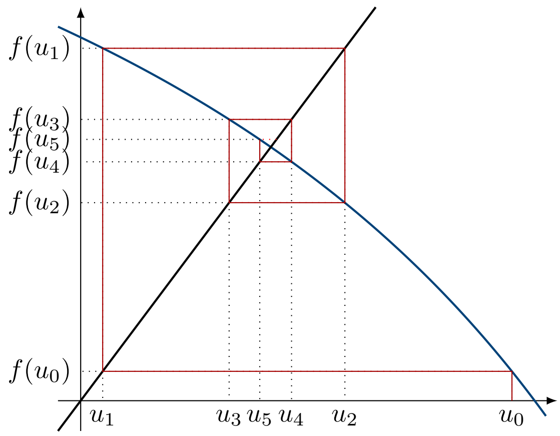
- Si ces suites convergent vers une même limite alors u converge vers cette limite commune (d'après le théorème de convergence des suites extraites).
- Sinon u n'a pas de limite.

Démonstration.

Cas où les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas vers une même limite : la suite u n'a pas de limite



Cas où les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite : la suite u converge



Exercice d'application 23.17. On pose $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que $[1\,;\,2]$ est stable par f.
2. On définit la suite u par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la nature de u et préciser sa limite éventuelle.

➥

23.2.4 Cas où f est contractante

Définition 23.18 - Fonction contractante.

Un fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ est dite **contractante** lorsque f est k-lipschitzienne avec $k \in]0\,;\,1[$.

Méthode 23.19. *Plan d'étude lorsque f est contractante*

1. On montre que f est contractante sur un intervalle I (stable par f, évidemment !) en utilisant l'inégalité des accroissements finis.
2. On résout l'équation $f(x) = x$ pour chercher les points fixes de f (il en existe toujours un unique α, mais cette propriété n'est pas au programme).
3. Puisque f est contractante et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ (car I est stable par f), on obtient
$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k\,|u_n - \alpha|\,,$$
ce qui s'écrit aussi $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\,|u_n - \alpha|$. On peut en déduire, avec un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant k^n\,|u_0 - \alpha|$.
4. Puisque $k \in]0\,;\,1[$, $k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc avec l'inégalité de **3.** et le théorème d'encadrement, $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Exercice d'application 23.20. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc}]0\,;\,\mathrm{e}^2[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2 - \ln(x)} \end{array}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que tous ses termes appartiennent à $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
2. Montrer que f possède un unique point fixe dans $[1\,;\,\mathrm{e}]$ que l'on note α.
3. Montrer que f est contractante sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
5. Donner une valeur de $n \in \mathbf{N}$ pour laquelle on est sûr que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

➥

Questions de cours

1. Définir la notion d'intervalle stable par une fonction.
2. Donner une condition suffisante pour que la suite définie par (23.1) soit bien définie.
3. Quelles sont les limites finies possibles pour une suite u définie par (23.1) quand la fonction f est continue ?
4. Donner la définition de fonction contractante.