CHAPITRE 22 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Dans ce chapitre, nous allons voir comment approcher localement une fonction par des fonctions polynomiales. Cette approximation locale permet l'étude locale du graphe d'une fonction (tangentes et asymptotes en particulier). C'est aussi un outil pratique pour obtenir des équivalents et calculer des limites.

Dans ce chapitre D désigne une partie de $\mathbf{R}$ de la forme $D = I$ ou bien $D = I\backslash\{\alpha\}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point et α est un point de I. De plus, n désignera un entier naturel.

22.1 Quelques rappels sur les petits o

- Dire que $f \underset{x\to 0}{=} a + \mathrm{o}(1)$ (où $a \in \mathbf{R}$) équivaut à dire que f admet a pour limite en 0.
- Si $m, n \in \mathbf{N}$ avec $m < n$, alors pour tout $a \in \mathbf{R}$, $ax^n \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^m)$.

  Exemple 22.1. $3x^5 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^2\right)$.

- Si $n \in \mathbf{N}$ et f, g sont deux fonctions définies au voisinages de 0 telles que $f(x) - g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$, alors on peut noter $f(x) \underset{x\to 0}{=} g(x) + \mathrm{o}(x^n)$.
- Si $m, n \in \mathbf{N}$ avec $m \leqslant n$ et si $f(x) \underset{x\to 0}{=} g(x) + \mathrm{o}(x^n)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} g(x) + \mathrm{o}(x^m)$.

  Exemple 22.2. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2x^4 + x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2x^4 + x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$.

- Pour tous $n, k \in \mathbf{N}$ et tout $a \in \mathbf{R}$, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} g(x) + ax^k.\mathrm{o}(x^n)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(x^{n+k}\right)$.

  Exemple 22.3. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + 3x^2\mathrm{o}(x)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

- Pour tous $n, p \in \mathbf{N}$ tels que $n \leqslant p$, $\mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(x^p) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$. En particulier, $\mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$.

22.2 Définition et premières propriétés

Définition 22.4 - Développement limité.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a, ou plus simplement que f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ pour lesquels

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)\,.$$

La fonction $x \longmapsto a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ est appelée **partie régulière** du développement limité.

Remarque 22.5. On peut toujours se ramener à un développement limité au voisinage de 0. Avec les notations de la définition,

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n)\,.$$

Dans la suite du cours, on s'intéressera donc surtout à des développements limités au voisinage de 0.

Remarque 22.6.

1. Dans ces formules, il ne faut surtout pas développer les puissances de $x - a$, car elles sont intéressantes à considérer lorsque l'on se situe au voisinage de a.
2. Désormais, lorsqu'on parlera du développement limité en 0 (respectivement en a) d'une fonction f définie sur D, cela signifiera implicitement que 0 (respectivement a) est un point ou une extrémité de D.

3. Quand on écrit un développement limité, le degré maximal des monômes qui apparaît avant $\mathrm{o}((x-a)^n)$ est inférieur ou égal n. Un écriture comme

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^3+x^4+\mathrm{o}\big(x^3\big)$$

n'est pas un développement limité. Puisque $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^3\big)$, on peut écrire

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^3+\mathrm{o}\big(x^3\big)$$

et l'on a maintenant un développement limité à l'ordre 3.

4. L'**ordre** d'un développement limité est l'exposant qui apparaît dans $\mathrm{o}((x-a)^n)$. Par exemple, le développement limité

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^4+\mathrm{o}\big(x^6\big)$$

est un développement limité à l'ordre 6 et pas à l'ordre 4. On a aussi $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^4+\mathrm{o}\big(x^4\big)$, mais ce développement limité est à l'ordre 4 donc moins précis.

Exercice d'application 22.7. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ et le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $f : x \longmapsto (1+x)^4$.

➥

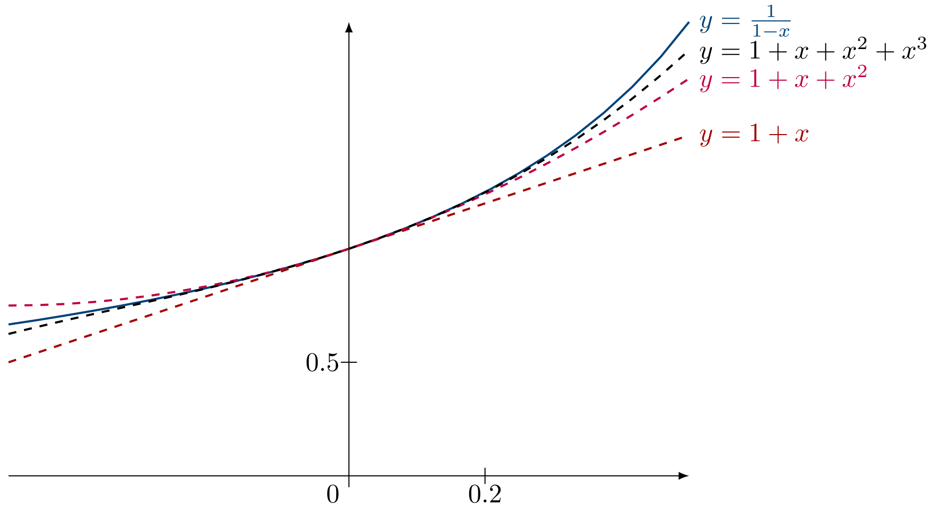
Exercice d'application 22.8. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x-x^2+2x^3+x^3\ln(1+x) \end{array}$.

➥

Exercice d'application 22.9. ♥ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$. Montrer que f a un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$ et l'expliciter.

➥

Remarque 22.10. L'approximation au voisinage de 0 est d'autant meilleure que l'ordre du développement limité est élevé.



Remarque 22.11. Notons qu'en remplaçant x par $-x$ dans la formule de l'exercice d'application précédent, on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)\,.$$

ATTENTION

Deux fonctions admettant les mêmes développements limités à tous les ordres en un point peuvent être différentes au voisinage de ce point.

Par exemple, considérons la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$.

$$\frac{f(x)}{x^n} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{n}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)\,.$$

La fonction f admet les mêmes développements limités que la fonction nulle (en effet pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$) et bien sûr f n'est pas la fonction nulle.

Un développement limité n'est donc qu'une propriété *locale* : une fonction possède un unique développement limité à l'ordre n en un point mais les développements limités à tous les ordres en un point d'une fonction ne suffisent pas pour la caractériser entièrement.

Remarque 22.12 (*Troncature d'un DL*). Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$. Alors f admet aussi un $\mathrm{DL}_p(a)$ pour tout entier naturel $p \leqslant n$. De plus, la partie régulière est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à p de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$ (on parle de **troncature** à l'ordre p).

Démonstration.
Immédiat en observant que pour tout $j \in [\![p+1, n]\!]$, $(x-a)^j = \mathrm{o}((x-a)^p)$. □

Exercice d'application 22.13. Soit f telle que $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + 3x^3 - x^5 + \mathrm{o}\big(x^6\big)$. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f.

➥

22.3 Unicité et existence d'un développement limité

Proposition 22.14 - Unicité des coefficients d'un développement limité.

En cas d'existence, la liste des coefficients d'un développement limité est unique.

Démonstration.

Théorème 22.15 - Formule de Taylor-Young.

Soit I un intervalle, $n \in \mathbf{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ et :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)\,.$$

Démonstration.

Remarque 22.16. On peut toujours se ramener à une formule en 0. Sous les mêmes hypothèses que la définition, on a :

$$f(a+h) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \mathrm{o}(h^n)\,.$$

Exemple 22.17 (♥). Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

La formule de Taylor-Young assure que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et :

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)\,,$$

où on a noté $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$.

Exercice d'application 22.18. ♥ Montrer que la fonction exponentielle a un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et l'expliciter.

➥

22.4 Propriétés des développements limités

Théorème 22.19 - Lien développement limité, continuité, dérivabilité.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$.

- **Continuité**. f est continue en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_0(a)$. Le cas échéant, $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$.
- **Dérivabilité**. f est dérivable en a si et seulement si f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$. Le cas échéant, $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$.

Démonstration.
Ces résultats ont déjà été énoncés dans le chapitre *Comportement locale des fonctions*. Ce sont des conséquences immédiates des définitions de continuité et de dérivabilité. □

Remarque 22.20 (♥). Si f est une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$ admettant un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a)\,,$$

alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$;
- si on note $\widetilde{f}$ ce prolongement, alors f est dérivable en a avec $\widetilde{f}'(a) = a_1$.

On étudiera cela plus en détail à la fin du chapitre.

ATTENTION

Les résultats précédents ne se généralisent pas pour des développements limités d'ordre supérieur. Dans l'exemple ci-après, on montre qu'une fonction peut avoir un $\mathrm{DL}_2(0)$ sans être deux fois dérivable en 0.

Exemple 22.21. Considérons $f : x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbf{R}^\star$.

- f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$. En effet, sin est bornée et donc $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$.
- f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (cf. Remarque 22.20).
- f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et sur $\mathbf{R}_-^\star$, avec pour tout $n \neq 0$,
$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
- f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (cf. Remarque 22.20 ou le théorème de la limite de la dérivée).
- Par contre, f n'est pas deux fois dérivable en 0, car
$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
n'a pas de limite en 0.

Proposition 22.22 - Développement limité d'une fonction paire, impaire.

Supposons que f a un $\mathrm{DL}_n(0)$. Si f est paire (resp. impaire), son développement limité ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration.

Remarque 22.23. Cette proposition n'admet pas de réciproque : une fonction qui admet des développements limités paires en 0 à tout ordre n'est pas nécessairement paire. Un développement limité est une propriété locale et on ne peut pas déduire des développements limités des propriétés globales sur les fonctions.

22.5 Intégration d'un développement limité

Théorème 22.24 - Intégration d'un développement limité.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f possède un développement limité en 0 à l'ordre n,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$
alors toute primitive F de f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 :
$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right).$$

Démonstration.

Remarque 22.25. Le résultat reste valable pour un développement limité en a avec

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathrm{o}(h^n), \qquad F(a+h) \underset{h\to 0}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big(h^{n+1}\big).$$

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une fonction dérivable f admet un développement limité à l'ordre n en a, sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité d'ordre $n-1$ en a. On ne PEUT PAS DÉRIVER des développements limités.

Exercice d'application 22.26. ♥ On rappelle que $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.

1. En déduire un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire un $\mathrm{DL}_6(0)$ de Arctan.

➥

22.6 Développements limites usuels

On donne ici les développements limités usuels en 0. Certains sont déjà démontrés, les autres le seront dans la suite de ce chapitre.

Proposition 22.27 - Développements limités obtenus à partir de exp.

1. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$;
2. $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$;
3. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)$;
4. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$;
5. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)$.

Démonstration.
Voir les Exemples 22.18, 22.33 et l'Exercice d'application 22.32. □

Proposition 22.28 - Développements limités obtenus à partir de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$.

1. $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$;
2. $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$;
3. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$;
4. $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} - \dots - \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$;
5. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$.

Démonstration.
Voir les Exercices d'application 22.9, 22.26 et la Remarque 22.11. □

Proposition 22.29 - Autres développements limités.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On note $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}$.

1. $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)$;
2. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.

Démonstration.
Voir l'Exemple 22.17 et l'Exercice d'application 22.57. □

Exercice d'application 22.30. Donner les $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

➥

22.7 Opérations sur les développements limités

22.7.1 Développement limité d'une combinaison linéaire

Proposition 22.31 - Développement limité d'une combinaison linéaire.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, soit $\lambda \in \mathbf{R}$, alors la fonction $f+\lambda g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f+\lambda g$ est la somme de la partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de f et de celui de g multiplié par λ.

Démonstration.

Exercice d'application 22.32. ♥ Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de ch et de sh.

➥

Exemple 22.33 (♥). En remarquant que $\cos(x) = \text{ch}(ix)$ et $\sin(x) = \dfrac{\text{sh}(ix)}{i}$, on obtient :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \text{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \text{o}\big(x^{2n+1}\big)$$

et

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \text{o}\big(x^{2n+2}\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \text{o}\big(x^{2n+2}\big)\,.$$

Remarque 22.34. Si f admet un DL à l'ordre n et si g admet un DL à l'ordre p, alors en faisant la somme des développement limités de f et g, on ne peut obtenir qu'un DL à l'ordre $\min(n,p)$ de $f+g$ (voir l'exemple qui suit).

Exemple 22.35. Cherchons un développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\text{sh} - \sin$.

On a :

$$\text{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \text{o}\big(x^6\big) \quad \text{et} \quad -\sin(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \text{o}\big(x^6\big)$$

donc

$$\text{sh}(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + \text{o}\big(x^6\big)\,.$$

22.7.2 Développement limité d'un produit

Proposition 22.36 - Développement limité d'un produit.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.
La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f \times g$ est obtenue en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières des DL à l'ordre n en 0 de f et g.

Démonstration.

Exercice d'application 22.37. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto e^x(1+\sin(x))$.

➥

D'après la proposition précédente, il suffit de connaître un DL à l'ordre n en 0 de f et de g pour obtenir un DL à l'ordre n en 0 du produit $f \times g$, mais cela n'est pas une condition nécessaire : il est parfois inutile de « pousser » les DL de f et g jusqu'à l'ordre n pour obtenir un DL à l'ordre n de $f \times g$, on peut parfois développer f et/ou g à un ordre plus petit (voir l'Exemple et les Exercices d'application suivants).

Exemple 22.38. On veut le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto (\cos(x)-1)\ln(1+x)$.

On analyse un peu la situation pour déterminer les ordres des DL utiles :

$$(\cos(x)-1)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \cdots + o(x^{\cdots})\right)(x + \cdots + o(x^{\cdots}))\,.$$

- Dans le facteur de gauche, le petit o sera multiplié par x au minimum, donc si on veut un $o(x^4)$ à la fin, on peut développer jusqu'à l'ordre 3 la fonction $x \longmapsto \cos(x)-1$.
- Dans le facteur de droite, le petit o sera multiplié par $-\frac{1}{2}x^2$ au minimum, donc si on veut un $o(x^4)$ à la fin, on peut développer jusqu'à l'ordre 2 la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}(\cos(x)-1)\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\,.\end{aligned}$$

Exercice d'application 22.39. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto e^x \sin(x)$.

➥

Remarque 22.40. Si on peut factoriser dans un produit, c'est une bonne idée de le faire ☺

Exercice d'application 22.41. Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{sh}^4(x)$.

➥

22.7.3 Développement limité d'une fonction composée

Soit I, J deux intervalles. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(I) \subset J$. Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières P et Q resp., alors $g \circ f$ a un $\mathrm{DL}_n(0)$. Sa partie régulière s'obtient en tronquant $Q \circ P$ à l'ordre n.

Exemple 22.42. Déterminons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}(x)}$.

On a $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{Arctan}(x) = 0$. Posons $u = \mathrm{Arctan}(x)$. On a

$$\mathrm{e}^u \underset{u \to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \mathrm{o}(u^{\cdots}) .$$

- $u = \mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$.
- $u^2 = \mathrm{Arctan}(x)^2 \underset{x \to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}\big(x^3\big)$.
- $u^3 = \mathrm{Arctan}(x)^3 \underset{x \to 0}{=} x^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big)$.

Ainsi,

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2} \times x^2 + \frac{1}{6} \times x^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big) .$$

Exercice d'application 22.43. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f : x \longmapsto \sin(\mathrm{sh}(x))$.

➥

Méthode 22.44. *DL d'une fonction composée par exponentielle*

Pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \longmapsto \exp(C + a_1 x + a_2 x^2 + \dots),$$

on utilise la propriété algébrique de l'exponentielle suivante : $f(x) = \exp(C) \exp(a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 22.45. Calculer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $f : x \longmapsto \exp(\cos(x))$.

➥

Méthode 22.46. *DL d'une fonction composée par logarithme*

Pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \longmapsto \ln(C + a_1 x + a_2 x^2 + \dots),$$

où $C \neq 0$, on utilise la propriété algébrique suivante : $f(x) = \ln(C) + \ln(1 + \frac{a_1}{C}x + \frac{a_2}{C}x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 22.47. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(\cos(x))$.

➥

22.7.4 Se ramener à un développement au voisinage de 0

Méthode 22.48. *Développement limité en $a \neq 0$*

Pour calculer un $\mathrm{DL}_n(a)$, on calcule un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \longmapsto f(a+h)$ et on conclut avec le changement de variable $x = a + h$.

Exemple 22.49. Cherchons le $\mathrm{DL}_3(2)$ de ln.

Posons $x = 2 + h$, avec h au voisinage de 0. On a

$$\ln(2+h) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \underset{h \to 0}{=} \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + \mathrm{o}\big(h^3\big)\,.$$

Ainsi,

$$\ln(x) \underset{x \to 2}{=} \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + \mathrm{o}\big((x-2)^3\big)\,.$$

Exercice d'application 22.50. Déterminer le $\mathrm{DL}_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de cos.

➥

22.7.5 Développement limité d'un quotient

Méthode 22.51. *Développement limité d'un quotient de la forme $\frac{1}{1+f}$, où f tend vers 0*

Quand on veut calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+f}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on peut toujours composer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+u}$ avec un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

Exemple 22.52. Cherchons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$. On a, pour x au voisinage de 0,

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Or $\dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On pose $u = \dfrac{x}{2}$ et on a

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + \mathrm{o}\left(u^3\right).$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Exercice d'application 22.53. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-\sin(x)}$.

➥

Méthode 22.54. *Développement limité d'un quotient de la forme $\frac{1}{f}$, où f tend vers une limite finie non nulle*

Si f tend vers $\ell \in \mathbf{R}^\star$, alors on peut trouver un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{f}$ en remarquant que, pour tout x au voisinage de 0,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1 - \frac{\ell - f(x)}{\ell}}.$$

et que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\ell - f(x)}{\ell}$ tend vers 0 en 0.

Exercice d'application 22.55. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x) + \exp(x)}$.

➥

Méthode 22.56. *DL d'un quotient de la forme $\frac{f}{g}$, où g tend vers une limite finie non nulle*

On a $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ et on sait calculer un développement limité de $\dfrac{1}{g}$ d'après la méthode précédente, donc il ne restera plus qu'à multiplier deux développements limités pour conclure.

Exercice d'application 22.57. ♥ Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.

➥

Méthode 22.58. *DL d'un quotient de la forme $\frac{f}{g}$, où f et g tendent vers 0*

Si on veut un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{f}{g}$ et que f, g tendent toutes deux vers 0 en 0, alors il faut écrire le développement limité du numérateur et du dénominateur, puis simplifier le plus possible les polynômes obtenus, de sorte que le dénominateur ne tende plus vers 0 en 0. L'ordre jusqu'où écrire les développements limités n'est pas évident, il faudra faire une rapide analyse au brouillon avant de se lancer.

Exemple 22.59. Cherchons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.

- *Analyse au brouillon pour trouver les ordres des DL.* On a

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + \cdots + \mathrm{o}(x^{\cdots})}{x + \cdots + \mathrm{o}(x^{\cdots})}$$

En simplifiant par x, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\frac{x}{2} + \cdots + \mathrm{o}\big(x^{\cdots-1}\big))}{1 + \cdots + \mathrm{o}(x^{\cdots-1})} &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \cdots + \mathrm{o}\big(x^{\cdots-1}\big)\right) \times \frac{1}{1 + \cdots + \mathrm{o}(x^{\cdots-1})} \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \cdots + \underbrace{\mathrm{o}\big(x^{\cdots-1}\big)}_{\text{on veut un } \mathrm{o}(x^3)}\right) \times \left(1 + \cdots + \underbrace{\mathrm{o}\big(x^{\cdots-1}\big)}_{\text{on veut un } \mathrm{o}(x^2)}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on constate qu'il faudra un $\mathrm{DL}_4(0)$ au numérateur et un $\mathrm{DL}_3(0)$ au dénominateur (par optimisation de produit).

- *Rédaction au propre.* On a

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)} && \text{on simplifie par } x \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right)\right)\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}.\end{aligned}$$

Cherchons un $\mathrm{DL}_2(0)$ du quotient. On pose $u=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$. On a

$$\frac{1}{1-u}\underset{u\to 0}{=}1+u+u^2+o\left(u^2\right).$$

◦ $u=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$.

◦ $u^2=\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)$.

Donc

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\underset{x\to 0}{=}1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\underset{x\to 0}{=}1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right).$$

On peut conclure avec un produit de développements limités :

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)\right)\underset{x\to 0}{=}\frac{x}{2}+\frac{5x^2}{12}+\frac{x^3}{12}+o\left(x^3\right).$$

Exercice d'application 22.60. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$.

➥

22.8 Applications des développements limités

22.8.1 Régularité de prolongements de fonctions

Proposition 22.61 - DL et prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et a une extrémité de D qui n'appartient pas à D.

1. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_0(a)$ qu'on note $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + \mathrm{o}(1)$. Alors on peut prolonger f par continuité en a. Plus précisément, le prolongement sera la fonction ci-après :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in D \\ a_0 & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

2. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$ qu'on note $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x-a)$. Alors le prolongement $\widetilde{f}$ ci-avant est dérivable en a et $\widetilde{f}'(a) = a_1$.

Exercice d'application 22.62. Soit $f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)} \end{array}$.

Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

➥

22.8.2 Recherche d'équivalents et calcul de limites

Proposition 22.63 - Trouver un équivalent à partir d'un DL.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}$. On note

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f, dans lequel $a_p \neq 0$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Démonstration.

Exercice d'application 22.64. Chercher un équivalent en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1$ et en déduire la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1\right)$.

➥

Exercice d'application 22.65. Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$f : x \longmapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x(x+1)}{1+x^2}.$$

➥

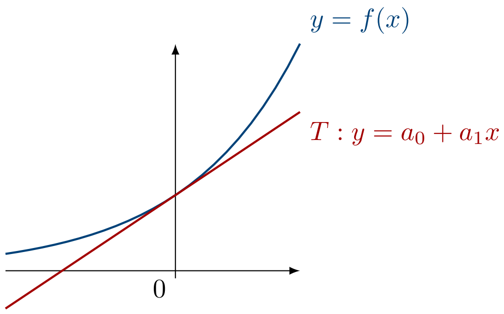
22.8.3 Recherche de tangente et position de la courbe par rapport à sa tangente

Proposition 22.66 - Lien entre DL et la tangente à la courbe.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est définie à gauche et à droite de a et que f admet un développement limité de la forme
$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)\,,$$
avec $n \geqslant 2$ et $a_n \neq 0$. Alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est
$$y = a_0 + a_1(x-a).$$
De plus,
- Si n est impair, la courbe traverse la tangente (on dit alors que a est un **point d'inflexion**).
- Si n est pair et $a_n > 0$, alors f est au dessus de sa tangente.
- Si n est pair et $a_n < 0$, alors f est en dessous de sa tangente.

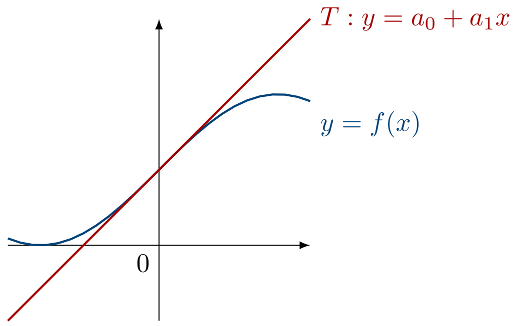
Démonstration.
On a déjà vu que $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$, d'où l'équation de la tangente. De plus,
$$f(x) - a_0 - a_1(x-a) \underset{x\to 0}{=} a_n(x-a)^n$$
donc $f(x) - a_0 - a_1$ est du signe de $a_n(x-a)^n$ pour x au voisinage de a, d'où le résultat (si n est impair, $a_n(x-a)^n$ change de signe ; sinon $a_n(x-a)^n$ est de même signe que a_n). $\square$

Exemple où $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, avec $a_2 > 0$



$a_2x^2 > 0$, la courbe est au dessus

Exemple où $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_3x^3 + \mathrm{o}(x^3)$, avec $a_3 < 0$



a_3x^3 change de signe : la courbe est en dessous puis au dessus

Exercice d'application 22.67. Déterminer la tangente en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ ainsi que le position de la courbe par rapport à cette tangente.

➥

22.8.4 Étude des branches infinies

Définition 22.68 - Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$.

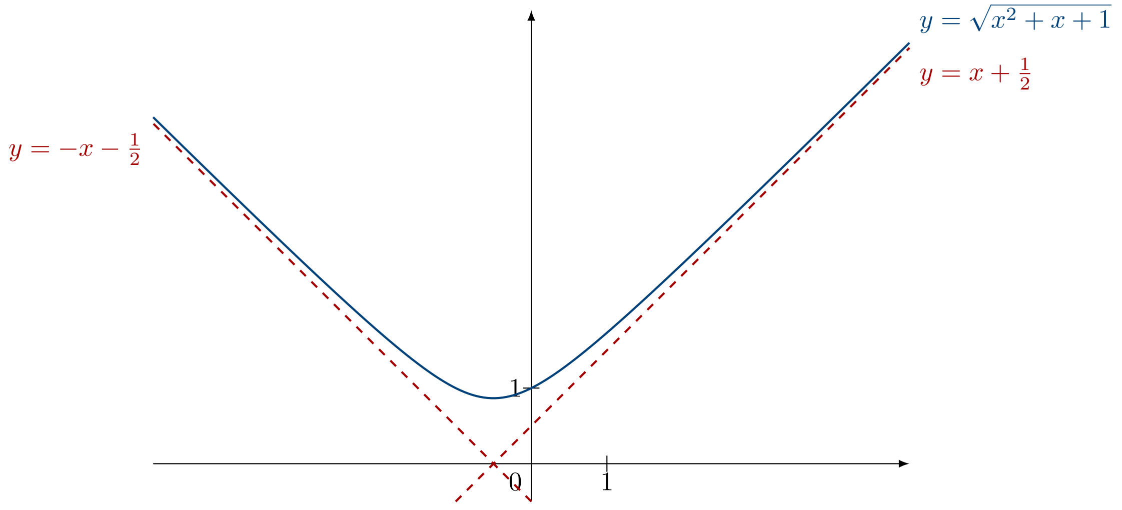
Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $\pm\infty$ et $a, b \in \mathbf{R}$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour **asymptote** au voisinage de $\pm\infty$ si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} ax + b + \mathrm{o}(1)$.

Remarque 22.69. En particulier, en reprenant les notations de la définition pour une asymptote au voisinage de $+\infty$, $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$.

Exercice d'application 22.70. Trouver les asymptotes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et les placer par rapport à cette courbe.

➥

La courbe représentative de la fonction étudiée dans l'exercice d'application précédent est donnée ci-après.



22.8.5 Recherche d'extrema

Proposition 22.71 - Lien entre extrema et équivalents.

Soit f une fonction dérivable définie à gauche et à droite de a qui vérifie

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

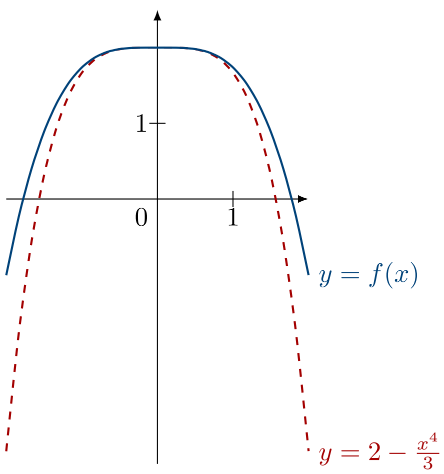
avec $p \geqslant 2$.

- Si p est un nombre pair et $a_p < 0$, alors $f(a)$ est un maximum local de f.
- Si p est un nombre pair et $a_p > 0$, alors $f(a)$ est un minimum local de f.
- Si p est un nombre impair, alors $f(a)$ n'est pas un extremum local de f.

Démonstration.

Exercice d'application 22.72. La fonction $f : x \longmapsto 2 + (\sin(x) - \mathrm{sh}(x)) \operatorname{Arctan}(x)$ admet-elle un extremum en 0 ?

➥



Questions de cours

1. Énoncer la formule de Taylor-Young.
2. Donner le lien entre développement limité et continuité (resp. dérivabilité).
3. Que peut-on dire du développement limité d'une fonction paire (resp. impaire) ?
4. Énoncer le théorème d'intégration d'un développement limité.
5. Développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0 (exp, ch, sh, cos, sin, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \ln(1-x)$, Arctan, tan, $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbf{R}$).
6. Expliquer comment on peut prolonger une fonction par continuité à l'aide d'un développement limité. Sous quelle condition le prolongement est-il dérivable ?
7. Énoncer la proposition permettant d'obtenir un équivalent à partir d'un développement limité.
8. Expliquer comment obtenir l'équation d'un tangente avec un développement limité, ainsi que la position courbe/tangente.
9. Même question avec des asymptotes obliques.
10. Expliquer comment obtenir l'existence d'extrema locaux à l'aide d'un développement limité.