# Chapitre 21 Comparaison locale des fonctions

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies sur $D$, où $D$ est une partie de $\mathbf{R}$ qui est de la forme $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$ avec $I$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points et $a$ un point de $I$. Soit $E$ un ensemble de la même forme.

## 21.1 Fonction dominée ou négligeable devant une autre au voisinage d'un point

### 21.1.1 Définitions et exemples

**Définition 21.1 - Négligeabilité, domination.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$.

1. $f$ **est négligeable** devant $g$ au voisinage de $a$ si il existe une fonction $\varepsilon : D \longrightarrow \mathbf{R}$, vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et telle qu'au voisinage de $a$ on ait $f = g \times \varepsilon$.
   On écrit alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et on lit « $f$ est un petit o de $g$ au voisinage de $a$ ».
2. On dit que $f$ **est dominée** par $g$ au voisinage de $a$ s'il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel qu'au voisinage de $a$ on ait $|f| \leqslant M\,|g|$.
   On écrit alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ et on lit « $f$ est un grand O de $g$ au voisinage de $a$ ».

**Remarque 21.2.** Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $\ell \in \mathbf{R}$.

- $f$ est majorée au voisinage de $a$ si et seulement si $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(1)$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $f \underset{a}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$ (ce qui est une notation pour $f - \ell \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$).

**Exercice d'application 21.3.** Montrer que $2x \sin(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}(x)$.

➥

**Proposition 21.4 - Caractérisation de la négligeabilité.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. On suppose que $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$ sauf éventuellement en $a$. Si $a \in D$ et $g(a) = 0$, on suppose que $f(a) = 0$.
$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$ définie au voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$, tend vers 0 en $a$.

*Démonstration.*
- On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ alors il existe $\varepsilon$ définie sur $D$ qui converge vers 0 en $a$ telle qu'au voisinage de $a$, on ait $f = g\varepsilon$. Donc $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de 0, sauf en $a$, et coïncide avec $\varepsilon$ là où elle est définie. Donc sa limite en $a$ est 0.

- Supposons que la fonction $\dfrac{f}{g}$ définie au voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$, tende vers 0 en $a$. On définit :

$$\varepsilon : \begin{array}{ccl} D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = a \text{ et } g(a) = 0 \text{ (auquel cas } f(a) = 0) \\ f(x)/g(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que, pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. De plus, par hypothèse, $\varepsilon$ tend vers 0 en 0. D'où $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$. □

**Exercice d'application 21.5.** Démontrer que :

**1.** $x\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^2)$ ; **2.** $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$ ; **3.** $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^2)$.

➥

### 21.1.2 Propriétés de o et O

**Proposition 21.6 - Opérations avec les petits o.**

Soit $f$, $g$, $h$, $u$, $v$ des fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^\star$.

1. Les petits o absorbent les constantes multiplicatives. Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$.
2. La somme de deux petits o est un petit o. Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$ et $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$.
3. Un petit o d'un petit o est un petit o (la relation « être négligeable » est transitive). Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$, alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$.
4. Avec le produit, tout va bien.
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $u \underset{a}{=} \mathrm{o}(v)$, alors $fu \underset{a}{=} \mathrm{o}(gv)$.
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, alors $fh \underset{a}{=} \mathrm{o}(gh)$.
5. Quand on inverse, la négligeabilité change. Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et que $f$ et $g$ ne s'annulent pas au voisinage de $a$, alors $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

*Démonstration.*

L'exemple ci-dessous est à bien étudier pour mieux comprendre la proposition précédente. Chaque numéro illustre la propriété correspondant dans la proposition.

**Exemple 21.7.** **1.** Si on admet l'égalité $e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, alors $2e^{1/x} = 2+\dfrac{2}{x}+\underbrace{2o\left(\dfrac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{=} 2+\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

**2.** Si on admet les égalités $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$, alors

$$e^x+\sin(x) \underset{x\to 0}{=} (1+x+o(x))+(x+o(x)) \underset{x\to 0}{=} 1+2x+\underbrace{o(x)+o(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+2x+o(x)\,.$$

**3.** Si on admet l'égalité $e^{1/x^2} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors comme $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$$e^{1/x^2} \underset{x\to+\infty}{=} 1+o\left(\frac{1}{x}\right)+\underbrace{o\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{=} 1+o\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1+o\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

**4.** Si on admet les égalités $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$, alors

$$\begin{aligned} e^x\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} (1+x+o(x))\times(x+o(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x+o(x)+x^2+\underbrace{2xo(x)+o(x)\times o(x)}_{3o(x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{=} x+o(x)+\underbrace{x^2+o\left(x^2\right)}_{o(x)+o(o(x))} \\ &\underset{x\to 0}{=} x+o(x)\,. \end{aligned}$$

**Remarque 21.8.** L'écriture $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o\big(x^2\big)$ signifie, grosso modo, que pour $x$ proche de 0, $e^x \approx 1+x+x^2$. Cette approximation n'a de sens que si on peut mesurer l'erreur commise. En l'occurrence ici, $e^x \approx 1+x+x^2$ à un $o\big(x^2\big)$ près (un peu comme quand on dit $\pi \approx 3,14$ à $10^{-2}$ près).

L'écriture $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o(x)$ est correcte, mais le terme $x^2$ est inutile dans la relation puisque $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$ (imaginez qu'on écrive $\pi \approx 3,14111$ à $10^{-2}$ près ; c'est correct mais pourquoi écrire autant de chiffres ?) : on peut donc simplifier le terme absorbé par $o(x)$ et écrire plutôt $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$. Cette nouvelle écriture n'est ni plus ni moins précise que la précédente, mais elle est plus lisible.

Tout petit o est un niveau de précision, un seuil de visibilité. De vous-même, à chaque instant, faites le ménage et supprimez les termes inutiles !

**Exercice d'application 21.9.** On donne

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\big(x^3\big) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)\,.$$

Déterminer $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que

$$e^x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} a+bx+cx^2+o\big(x^2\big)\,.$$

➥

Les propriétés vues sur les petits o sont toutes vraies pour les grands O.

**Proposition 21.10 - Opérations avec les grands O.**

Soit $f$, $g$, $h$, $u$, $v$ des fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^\star$.

1. Les grands O absorbent les constantes multiplicatives. Si $f \underset{a}{=} O(g)$, alors $f \underset{a}{=} O(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} O(g)$.
2. La somme de deux grands O est un grand O. Si $f \underset{a}{=} O(h)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f+g \underset{a}{=} O(h)$.
3. Un grand O d'un grand O est un grand O (la relation « être dominée par » est transitive). Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} O(h)$.
4. Avec le produit, tout va bien.
   - Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $u \underset{a}{=} O(v)$, alors $fu \underset{a}{=} O(gv)$.
   - Si $f \underset{a}{=} O(g)$, alors $fh \underset{a}{=} O(gh)$.
5. Quand on inverse, la domination change. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et que $f$ et $g$ ne s'annulent pas au voisinage de $a$, alors $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} O\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

*Démonstration.*

**Proposition 21.11 - Changement de variable pour o et O.**

Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $h : E \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $h(E) \subset D$. Soit $a$ un point ou une extrémité de $E$ et $b$ un point ou une extrémité de $D$

1. Si $f(y) \underset{y \to b}{=} \mathrm{o}(g(y))$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, alors $f(h(x)) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(h(x)))$.
2. Si $f(y) \underset{y \to b}{=} \mathrm{O}(g(y))$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, alors $f(h(x)) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}(g(h(x)))$.

*Démonstration.*

**Exemple 21.12.** On a $x^3 \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^5\big)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, donc $(\ln(x))^3 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big((\ln(x))^5\big)$.

**Exercice d'application 21.13.** Montrer que $\sqrt{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\ln(x))$ et $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)^3 = \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)^4\right)$.

➥

**ATTENTION**

Il est interdit d'appliquer une fonction à une relation de négligeabilité ou de dominance (voir l'exemple qui suit).

**Exemple 21.14.** D'après le théorème des croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$. Par contre, si $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, alors $x \longmapsto f(\ln(x))$ n'est pas négligeable devant $x \longmapsto f(x)$, puisque pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(\ln(x))}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

toujours par croissances comparées.

**Proposition 21.15 - Lien entre o et O.**

Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$.

*Démonstration.*

**ATTENTION**

La domination n'entraîne par la négligeabilité ! Considérer $2x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\big(x^2\big)$.

**Exemple 21.16.** On admet que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. De cette inégalité, on obtient $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+O(x^3)$, qu'on peut simplifier en $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)$ (écrire cela est plus précis que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ mais moins précis que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$).

### 21.1.3 Comparaison des fonctions de référence

À l'aide des croissances comparées, on obtient les comparaisons suivantes.

**Théorème 21.17 - Théorème des croissances comparées.**

Soit $a, b > 0$.

**1.** $\ln(x)^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)$ ;

**2.** $|\ln(x)|^a \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^b}\right)$ ;

**3.** $x^b \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{ax})$ ;

**4.** $|x^b| \underset{x\to-\infty}{=} o(e^{-ax})$.

*Démonstration.*
Immédiat avec le théorème des croissances comparées et la caractérisation de la négligeabilité par les limites. □

**Proposition 21.18 - Comparaison de monômes en 0 et en $+\infty$.**

Si $m, n \in \mathbf{N}$ tels que $m < n$, alors :

**1.** $x^m \underset{x\to-\infty}{=} o(x^n)$ ;

**2.** $x^n \underset{x\to 0}{=} o(x^m)$ ;

**3.** $x^m \underset{x\to+\infty}{=} o(x^n)$.

*Démonstration.*

**Exemple 21.19.** On a $3x^5 \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$, $157x^3 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^5)$, $\frac{1}{x^{1/4}} \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$ et $\frac{23}{x^3} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

## 21.2 Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

### 21.2.1 Définitions et exemples

**Définition 21.20 - Équivalence de fonctions.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$.
On dit que $f$ est **équivalente** à $g$ au voisinage de $a$ s'il existe une fonction $u : D \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ et telle qu'au voisinage de $a$ on ait $f = g \times u$.
On écrit alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et on lit « $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$ ».

**Proposition 21.21 - Caractérisation par le quotient.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. On suppose que $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$ sauf éventuellement en $a$. Si $a \in D$ et $g(a) = 0$, on suppose que $f(a) = 0$.

On peut affirmer que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$, définie au voisinage de $a$ sauf éventuellement en $a$, tend vers 1 en $a$.

*Démonstration.*

- Supposons $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Il existe $u$ définie sur $D$ qui converge vers 1 en $a$ telle qu'au voisinage de $a$, on ait $f = gu$. Donc $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de 0, sauf en $a$, et coïncide avec $u$ là où elle est définie. Donc sa limite en $a$ est 1.
- Supposons que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$, et tende vers 1 en $a$. On définit la fonction $u$ sur $D$ par :

$$u: \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \text{ et } g(a) = 0, \text{ auquel cas } f(a) = 0 \\ \frac{f(x)}{g(x)} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Alors, dans un voisinage de $a$, on a $f(x) = u(x)g(x)$ pour tout $x$ dans ce voisinage. De plus, par hypothèse, $u$ tend vers 1 en 0. D'où $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$. □

**Exercice d'application 21.22.** Préciser si les équivalents suivants sont vrais ou faux :

**1.** $\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ ; **2.** $x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$ ; **3.** $3x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

➥

**Théorème 21.23 - Lien entre équivalence et négligeabilité.**

Sous les hypothèses de la définition, $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f \underset{a}{=} g + \mathrm{o}(g)$.

*Démonstration.*

Ce résultat est extrêmement important ! Il signifie qu'il y a toujours un petit o dans une équivalence.

Quand on demande une équivalent d'une fonction, il ne faut pas donner une somme, mais plutôt un seul terme (voir l'exemple qui suit).

**Exemple 21.24.** Si on demande un équivalent de $x-3x^2+x^5$ en 0, il ne faut pas répondre $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x-3x^2$. C'est correct (car $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{=} x-3x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)$) mais insuffisant car on peut simplifier encore : $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x$ (en effet, $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)$).

Notez qu'il n'est pas plus précis d'écrire $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x-3x^2$ parce qu'on a écrit un terme de plus. Le terme en $x^2$ étant absorbé par $\mathrm{o}(x)$, on pourrait le remplacer par n'importe quel autre terme en $x^2$ : $x-3x^2+x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x+12x^2$ par exemple...

**Exercice d'application 21.25.** Donner un équivalent de $12x^2+7\ln(x)-8$ au voisinage de $+\infty$.

➥

### 21.2.2 Propriétés des équivalents

**Proposition 21.26 - Principales propriétés des équivalents.**

Soit $f$, $g$, $h$, $s$, $t$ des fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Symétrie. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$.
2. Transitivité. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.
3. Conservation du signe. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g$ est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de $a$, alors $f$ l'est aussi.
4. Dans les petits o, on peut remplacer toute fonction par une fonction équivalente. Si $g \underset{a}{\sim} f$, si $s \underset{a}{\sim} t$ et si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(s)$, alors $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(t)$.
5. Produit. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $s \underset{a}{\sim} t$, alors $fs \underset{a}{\sim} gt$.
6. Inverse. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $f$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
7. Puissances. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $f$ est strictement positive au voisinage de $a$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

*Démonstration.*

**ATTENTION**

Tout ce qui n'est pas écrit ci-avant ou ci-après est faux ! En particulier,

1. on n'écrit JAMAIS qu'une fonction non localement nulle est équivalente à 0 ;
2. on n'effectue JAMAIS de sommes d'équivalents ;
3. on n'applique JAMAIS une fonction à un équivalent (ce qui revient à : on ne compose JAMAIS un équivalent par une fonction ou encore : on ne remplace JAMAIS l'expression à l'« intérieur » d'une fonction par un équivalent).

Vous trouverez ci-après des contre-exemples pour chaque point.

**Exemple 21.27.**

1. Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. Si $f \underset{a}{\sim} 0$, alors il existe $u : D \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ et $V$ un voisinage de $a$ tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) = 0 \times u(x) = 0$, donc $f$ est localement nulle...
2. On a $\dfrac{1}{x} + 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $-\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$. Si on pouvait ajouter ces équivalents, on obtiendrait $1 \underset{x \to 0}{\sim} 0$, ce qui est absurde...
3. On a $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$ et pourtant $\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui montre que $x \longmapsto e^{x^2+x}$ et $x \longmapsto e^{x^2}$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$.

**Proposition 21.28 - Changement de variable dans un équivalent.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$ et $h$ une fonction définie sur $E$ telle que $h(E) \subset D$. Soit $a$ un point ou une extrémité de $E$ et $b$ un point ou une extrémité de $D$.
Si $f(y) \underset{y \to b}{\sim} g(y)$ et si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, alors $f\big(h(x)\big) \underset{x \to a}{\sim} g\big(h(x)\big)$.

*Démonstration.*
Supposons $f(y) \underset{y \to b}{\sim} g(y)$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$. Il existe $\eta > 0$ et $u : D \longrightarrow \mathbf{R}$ tels que pour tout $y \in ]b - \eta\,;\, b + \eta[ \cap D$, $f(y) = g(y)u(y)$ avec $\lim\limits_{y \to b} u(y) = 1$. Puisque $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in ]a - \delta\,;\, a + \delta[ \cap E$, $h(x) \in ]b - \eta\,;\, b + \eta[$. Ainsi,

$$\forall x \in ]a - \delta\,;\, a + \delta[ \cap E, \quad f(h(x)) = g(h(x))u(h(x))$$

avec $\lim\limits_{x \to a} u(h(x)) = 1$, d'où le résultat attendu. $\square$

**Exercice d'application 21.29.** Montrer que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ puis en déduire un équivalent de $\sin(\cos(x) - 1)$ en 0.

➥

**Remarque 21.30.** Dans l'exercice précédent, il ne fallait SURTOUT PAS écrire $\sin(\cos(x)-1) \underset{x\to 0}{\sim} \sin\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, car en faisant cela on applique la fonction sin à l'équivalent $\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, ce qui est formellement INTERDIT !!!

**Proposition 21.31 - Conservation de la limite.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $g$ admet aussi une limite en $a$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

*Démonstration.*

**Exercice d'application 21.32.** Déterminer la limite de $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 4\ln(x)}{x^8 + 3 - \frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

➥

**Proposition 21.33 - Équivalent d'une fonction qui admet une limite finie non nulle.**

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. Si $f$ possède une limite **finie non nulle** $\ell$ en $a$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

*Démonstration.*

**Exercice d'application 21.34.** Donner un équivalent de la fonction Arctan au voisinage de $+\infty$.

➥

**ATTENTION**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, on NE PEUT PAS EN DÉDUIRE que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Si cela ne vous paraît pas clair, il faut relire le chapitre !!
Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, et pourtant exp et $x \longmapsto x$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

**Proposition 21.35 - Lien entre équivalent et grand O.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$.
Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$.

*Démonstration.*
Supposons $f \underset{a}{\sim} g$. Il existe $V$ un voisinage de $a$ et $u : D \longrightarrow \mathbf{R}$ tels que, pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) = g(x)u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$. En tant que suite convergente, $u$ est bornée au voisinage de $a$, d'où le résultat. □

### 21.2.3 Équivalents usuels

**Proposition 21.36 - Équivalent d'une fonction polynomiale.**

Soit $n \in \mathbf{N}$, $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels avec $a_n$ non nul et $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$ une fonction polynomiale. Alors, en notant $k$ le plus petit entier tel que $a_k$ soit non nul, on a :

**1.** $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n x^n$ ; **2.** $f(x) \underset{x\to0}{\sim} a_k x^k$ ; **3.** $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$.

*Démonstration.*
D'après la Proposition ,

$$a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}(x^n)$$

donc, avec le Théorème , on en déduit $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n x^n$. Les autres équivalents s'obtiennent de la même manière. □

**Exercice d'application 21.37.** Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x^2+3x+1}$.

➥

**Exercice d'application 21.38.** Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+1}$.

➥

**Proposition 21.39 - Équivalent d'une fonction dérivable.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$. Si $f$ est dérivable en $a$ et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

*Démonstration.*

**Corollaire 21.40 - Équivalents usuels.**

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

**1.** $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ ;
**2.** $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ ;
**3.** $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ ;
**4.** $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ ;
**5.** $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ ;
**6.** $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$.

*Démonstration.*

**Exercice d'application 21.41.** Déterminer la limite de $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)^2}{\tan(x)\ln(1-x)}$ au voisinage de 0.

➥

### 21.2.4 Techniques d'obtention d'équivalents

**Théorème 21.42 - Théorème d'encadrement pour les équivalents.**

Soit $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$.
Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de $a$ et si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$.

*Démonstration.*
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors il existe $u_0$ définie sur $D$ qui converge vers 1 en $a$ telle qu'au voisinage de $a$, on ait $fu_0 = h$. On a donc pour tout $x$ au voisinage de $a$,

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)u_0(x).$$

Ainsi, $f$ et $g$ ont les mêmes points d'annulation au voisinage de $a$ (en se plaçant sur un voisinage où $u_0$ est strictement positive).

On pose $u$ qui vaut 1 là où $f$ s'annule et qui coïncide avec $u_0$ en dehors.

On définit la fonction $w$ sur $D$ par :

$$w: \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \text{ et } g(a) = 0\text{, auquel cas } f(a) = 0 \text{ au voisinage de } a \\ \frac{g(x)}{f(x)} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Ainsi, pour tout $x$ au voisinage de $a$, on a

$$1 \leqslant |w(x)| \leqslant |u(x)|.$$

Avec le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} w(x) = 1$.

Comme, $g = fw$ au voisinage de $a$, on a bien que $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ □

**Exercice d'application 21.43.** Donner un équivalent en $+\infty$ de $x + \sin(x)$.

➥

**Méthode 21.44.** *Obtention d'un équivalent d'un logarithme*

Soit $u$ une fonction strictement positive définie sur $D$. Soit $a$ un point ou une extrémité de $D$. On explique ici comment trouver un équivalent de $x \longmapsto \ln(u(x))$ en $a$.

- Si $u$ possède en $a$ une limite finie $\ell$ strictement positive en et différente de 1, alors $\ln(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(\ell)$ (par composition de **limites**, surtout pas par composition d'équivalents !).
- Si $u$ tend vers 1 en $a$ alors $\ln(u(x)) = \ln(1 + \underbrace{u(x) - 1}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow} 0}) \underset{x\to a}{\sim} u(x) - 1$ par changement de variable (calcul à refaire systématiquement).
- Si $u$ tend vers 0 ou $+\infty$ : on cherche un équivalent $v(x)$ de $u(x)$ en $a$, puis on effectue le calcul suivant,

$$\frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} - 1 = \frac{\ln(v(x)) - \ln(u(x))}{\ln(u(x))} = \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

puisque le dénominateur tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et que le numérateur tend vers 0 (car $\dfrac{v(x)}{u(x)}$ tend vers 1) quand $x$ tend vers $a$. On en déduit que $\ln(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(v(x))$.

**Exercice d'application 21.45.** Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x \longmapsto \ln\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$ définie sur $\left]\dfrac{1}{\pi}\,;+\infty\right[$.

➥

## 21.3 Relations de comparaison pour les suites

Les relations o, O et $\sim$ que nous venons de voir pour les fonctions peuvent aussi être utilisées pour les suites, à partir de définitions similaires. C'est l'objet de cette section. Les preuves étant très similaires à celles sur les fonctions, nous ne les écrirons pas.

### 21.3.1 Domination et négligeabilité

**Définition 21.46 - Négligeabilité, domination.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **dominée** par la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe $M \in \mathbf{R}_+$ et un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant M\,|v_n|$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, on lit « $u_n$ est un grand O de $v_n$ ».

   Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne s'annule pas au-delà du rang $n_1$, cela revient au même de dire que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_1}$ est bornée.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varepsilon_n$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, on lit « $u_n$ est un petit o de $v_n$ ».

   Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne s'annule pas au-delà du rang $n_1$, cela revient au même de dire que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_1}$ converge vers 0.

**Exemple 21.47.** Montrons que $n^{3/2}\cos(1/n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\big(n^{3/2}\big)$ et $n^{3/2}\cos(1/n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(n^2\big)$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^{3/2}}\right| = |\cos(1/n)| \leqslant 1$, donc $n^{3/2}\cos(1/n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\big(n^{3/2}\big)$.

**2.** Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^2} = \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}} = 0$ en tant que produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0. Donc $n^{3/2}\cos(1/n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^2)$.

**Proposition 21.48 - Quelques relations de domination à connaître.**

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.
2. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$. Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\beta)$.
3. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Si $0 < a < b$, alors $a^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b^n)$.

**Théorème 21.49 - Croissances comparées.**

Soit $\alpha, \beta$ deux réels strictement positifs et $q \in ]1\,;+\infty[$. Alors

1. $q^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n!)$ ;
2. $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(q^n)$ ;
3. $\ln(n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\alpha)$ ;
4. $\dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{q^n}\right)$ ;
5. $\dfrac{1}{q^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ ;
6. $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\ln(n)^\beta}\right)$.

**Exemple 21.50.**

1. $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n)$.
2. $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^4)$, $\dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. $(\ln(n))^3 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n)$
4. $n^3 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$.

**Proposition 21.51 - Opérations avec petits o et grands O.**

Les règles de calculs sont les mêmes que pour les fonctions (cf. Propositions 21.6 et 21.10).

**Proposition 21.52 - Changement de variable.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$, $a$ un point ou une extrémité de $D$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $D$ qui tend vers $a$.

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(g(u_n))$.
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(g(u_n))$.

### 21.3.2 Suites équivalentes

**Définition 21.53 - Suites équivalentes.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et un rang $n_0$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n a_n$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on lit « $u_n$ est équivalente à $v_n$ ».

Si la suite $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang $n_1$, cela revient au même de dire que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_1}$ converge vers 1.

**Exemple 21.54.** On a $n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+\ln(n)}{n} = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

**Proposition 21.55 - Lien entre équivalent et petit o.**

Sous les hypothèses de la définition précédente, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si, et seulement si, $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

On utilise les mêmes notations que pour les fonctions. Si le terme général d'une suite $(u_n)$ s'écrit $u_n = v_n + w_n$ et si $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, on peut écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$ (et on a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$).

**Exemple 21.56.** On peut traiter l'exemple précédent un peu plus rapidement : $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n)$ donc $n+\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

**Proposition 21.57 - Opérations sur les équivalents.**

Les règles de calculs sont les mêmes que pour les fonctions (cf. Proposition 21.26).

**ATTENTION**

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$, on N'A PAS nécessairement $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + x_n$.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, on N'A PAS TOUJOURS $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$.

**Proposition 21.58 - Changement de variable.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$, $a$ un point ou une extrémité de $D$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $D$ qui tend vers $a$.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f\big(u_n\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} g\big(u_n\big)$.

**Proposition 21.59 - Conservation de la limite.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites équivalentes.
Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

**Proposition 21.60 - Équivalent d'une suite qui admet une limite finie non nulle.**

Soit $\ell$ un réel **non nul**. $(u_n)$ converge vers $\ell$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

**Proposition 21.61 - Équivalent d'une suite polynomiale.**

Si $P : x \longmapsto a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est une fonction polynomiale dont le coefficient $a_p$ est non nul, alors

$$P(n) = a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p.$$

**Proposition 21.62 - Équivalents usuels.**

Soit $(u_n)$ une suite convergeant vers 0 et ne s'annulant pas au delà d'un certain rang. Alors chacune des suites suivantes est bien définie au delà d'un certain rang, et

**1.** $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ; **2.** $1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$ ; **3.** $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ;
**4.** $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ; **5.** $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ ; **6.** $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

*Démonstration.*
On utilise le fait que si pour une fonction $f$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$.

Par exemple, pour $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$, puis $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. □

**Exercice d'application 21.63.** Déterminer la limite de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n(n+1)}$.

➥

**Remarque 21.64.** **1.** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ signifie que la suite $(u_n)$ tend vers 0. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ signifie que la suite $(u_n)$ est bornée.

**2.** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

**ATTENTION**

ON N'ÉCRIT JAMAIS $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ pour une suite non nulle à partir d'un certain rang !!!!

JAMAIS, JAMAIS, JAMAIS, MAIS ALORS VRAIMENT **JAMAIS**.

## Question de cours

1. Donner la définition de négligeabilité, de domination.
2. Énoncer la caractérisation de la négligeabilité d'une fonction qui ne s'annule pas avec le quotient.
3. Soit $f$, $g$, $h$, $u$, $v$ des fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^\star$. Compléter :
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\cdots)$ et $\lambda f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\cdots)$.
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$ et $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} \mathrm{o}(\cdots)$.
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$, alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\cdots)$.
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $u \underset{a}{=} \mathrm{o}(v)$, alors $fu \underset{a}{=} \mathrm{o}(\cdots)$.
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, alors $fh \underset{a}{=} \mathrm{o}(\cdots)$.
   - Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et que $f$ et $g$ ne s'annulent pas au voisinage de $a$, alors $\dfrac{1}{\cdots} \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\cdots}\right)$.
4. Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Peut-on affirmer que si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ ? Qu'en est-il de la réciproque ?
5. Soit $m, n \in \mathbf{N}$ tels que $m < n$. Compléter :
   - $x^{\cdots} \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}(x^{\cdots})$
   - $x^{\cdots} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^{\cdots})$
   - $x^{\cdots} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^{\cdots})$
6. Donner la définition d'équivalent d'une fonction.
7. Donner la caractérisation d'équivalent d'une fonction qui ne s'annule pas avec le quotient.
8. Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a$ un point ou une extrémité de $D$. Traduire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ à l'aide d'un petit o. Soit $f$, $g$, $h$, $s$, $t$ des fonctions définies sur $D$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point ou une extrémité de $D$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Compléter :
   - 
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} \cdots$.
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g$ est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de $a$, alors...
   - Si $g \underset{a}{\sim} f$, si $s \underset{a}{\sim} t$ et si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(s)$, alors $\cdots \underset{a}{=} \mathrm{o}(\cdots)$.
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $s \underset{a}{\sim} t$, alors $fs \underset{a}{\sim} \cdots$.
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $f$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \cdots$.
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $f$ est strictement positive au voisinage de $a$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} \cdots$.
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$
   - Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \cdots$
9. Quelles sont les trois choses qu'on ne peut JAMAIS faire avec des équivalents ?
10. Soit $n \in \mathbf{N}$, $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels avec $a_n$ non nul et $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$ une fonction polynomiale. Soit $k$ le plus petit entier tel que $a_k$ soit non nul. Compléter :
    - $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \cdots$ ;
    - $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \cdots$ ;
    - $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cdots$.
11. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, soit $a \in I$. Si $f$ est dérivable en $a$ avec $f'(a) \neq 0$, donner un équivalent de $f(x) - f(a)$ au voisinage de $a$.
12. Donner les équivalents au voisinage de 0 des fonctions sin, $1-\cos$, tan, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $\exp -1$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha - 1$ où $\alpha \in \mathbf{R}$.
13. Énoncer le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes) pour les équivalents.