Chapitre 19 Continuité de fonctions

Dans toute la suite, I sera un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point, a sera un élément de I et D une partie de $\mathbf{R}$ de la forme I ou $I\setminus\{a\}$.

19.1 Continuité locale

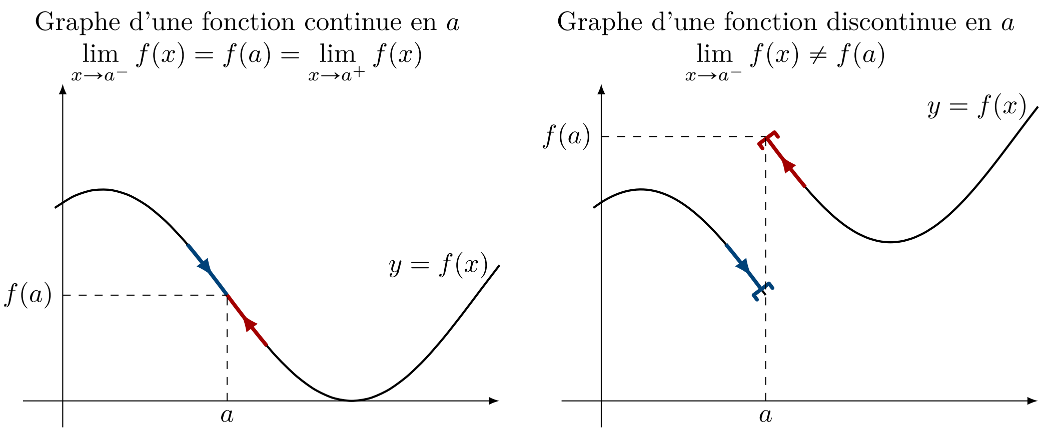
19.1.1 Continuité en un point

Définition 19.1 - Continuité en un point.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle et $a \in D$. On dit que f est **continue en** a lorsque f admet possède une limite finie en a (qui est alors nécessairement $f(a)$). Autrement dit, f est continue en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, \quad \big(|x-a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big(|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue en** a.



ATTENTION

Une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle est définie !! Ainsi, il n'y a **aucun sens** à étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-\frac{1}{\sqrt{x}}) \end{array}$$

puisque celle-ci n'est pas définie en 0.

Remarque 19.2. On peut encore une fois « simplifier » la définition à l'aide de voisinages. Avec les notations de la définition précédente, on dit que f est continue en a lorsque

$$\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)},\ \exists V' \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in D, \quad x \in V' \implies x \in V.$$

Exemple 19.3. $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.

Exercice d'application 19.4. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-1/\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ est continue en 0.

➥

Définition 19.5 - Continuité à gauche, à droite.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in D$. On dit que la fonction f est **continue à gauche en** a (respectivement **continue à droite en** a) lorsqu'elle admet une limite à gauche en a vérifiant $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ (respectivement lorsqu'elle admet une limite à droite en a vérifiant $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$).

Remarque 19.6. On peut traduire ces définitions avec des assertions mathématiques. On reprend les notations de la définition.

- On dit que f est continue à gauche en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D \cap \mathbf{R}_-, \quad (|x - a| \leqslant \eta) \implies (|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

  On peut aussi écrire cette assertion avec des voisinages :

$$\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)},\ \exists V' \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in D \cap \mathbf{R}_-, \quad x \in V' \implies x \in V.$$

- On dit que f est continue à gauche en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D \cap \mathbf{R}_+, \quad (|x - a| \leqslant \eta) \implies (|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

  On peut aussi écrire cette assertion avec des voisinages :

$$\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)},\ \exists V' \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in D \cap \mathbf{R}_+, \quad x \in V' \implies x \in V.$$

Proposition 19.7 - Caractérisation de la continuité avec les continuités à gauche, à droite.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in D$. La fonction f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Démonstration.
La limite de f existe en a existe si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont égales à $f(a)$. □

Exemple 19.8.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x & \text{si} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$$

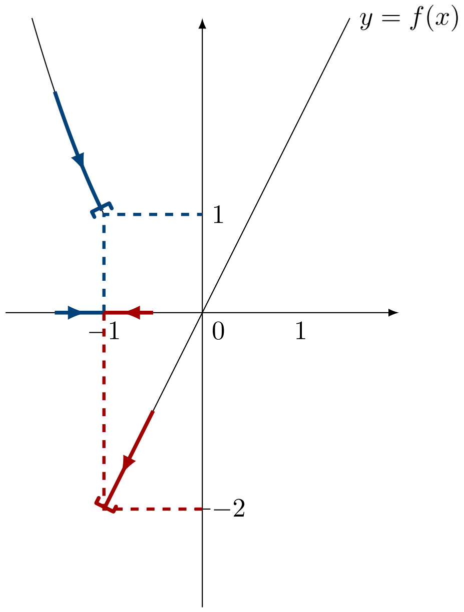
On a $f(x) = x^2$ si $x < -1$, donc

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 = 1.$$

De plus, $f(x) = 2x$ si $x \geqslant -1$, donc

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2x = -2.$$

Ainsi, f n'admet pas de limite en -1 (les limites à gauche et à droite étant distinctes). En particulier, f est discontinue en -1.



Exemple 19.9. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Intéressons-nous à la continuité de la fonction partie entière en m.

- Pour tout $x \in]m\,;\,m+1[$, $\lfloor x \rfloor = m$, donc $\lim\limits_{x \to m^+} \lfloor x \rfloor = m$. Comme $\lfloor m \rfloor = m$, on en déduit que la fonction partie entière est continue à droite en m.
- Pour tout $x \in]m-1\,;\,m[$, $\lfloor x \rfloor = m-1$, donc $\lim\limits_{x \to m^-} = m - 1 \neq \lfloor m \rfloor$. Donc la fonction partie entière n'est pas continue à gauche en m.
- En particulier, la fonction particulier entière n'est pas continue en m.

ATTENTION

Il faut se méfier des bords des intervalles lorsqu'une fonction est définie par morceaux ! Par exemple, si on note f la fonction partie entière, alors $f\big|_{[0\,;\,1[}$ (la restriction de f à $[0\,;\,1[$) est constante égale à zéro, donc on pourrait naïvement penser que f est continue sur $[0\,;\,1[$ en tant que fonction constante, ce qui est faux ! En effet, f est aussi définie à gauche de zéro, donc il faut vérifier également la continuité à gauche en zéro (et f n'est pas continue à gauche en zéro, voir l'exemple précédent).

Exercice d'application 19.10. On considère $f : x \longmapsto x + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2$ définie sur $\mathbf{R}$. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Étudier la continuité de f en m.

➥

19.1.2 Prolongement par continuité

Définition 19.11 - Prolongement par continuité.

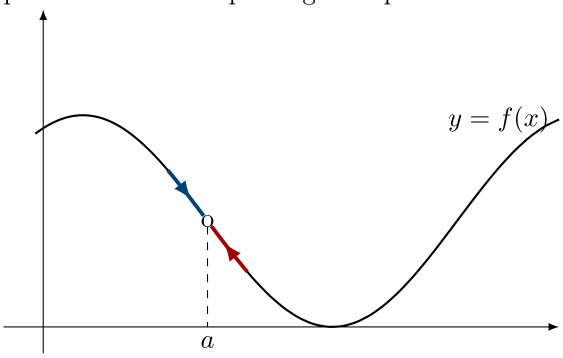
Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \notin D$ une extrémité de D. On dit que f est **prolongeable par continuité** en a si f admet une limite finie ℓ en a. Dans ce cas, la fonction

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

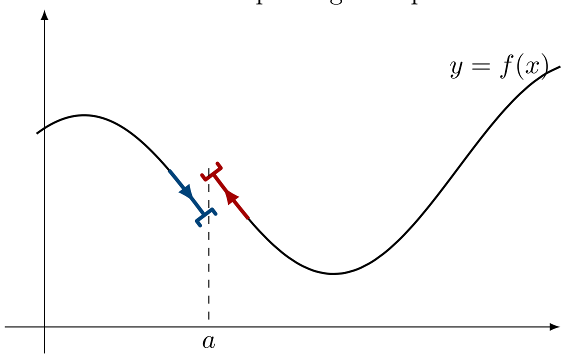
s'appelle le **prolongement par continuité de f en a**. C'est l'unique fonction définie sur $D \cup \{a\}$ et continue en a qui coïncide avec f sur D.
Par abus on la note souvent encore f (c'est-à-dire que l'on confond f et $\widetilde{f}$).

Démonstration.
On a $\widetilde{f}(a) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, donc $\lim\limits_{x \to a} \widetilde{f}(x) = \ell$ ce qui montre que $\widetilde{f}$ est continue en a.
Montrons que $\widetilde{f}$ est unique. Soit g une fonction continue en a qui coïncide avec f sur $D \setminus \{a\}$. Ainsi, pour tout $x \in D \setminus \{a\}$, $\widetilde{f}(x) = g(x)$. Il reste à montrer que $\widetilde{f}(a) = g(a)$. On a, par continuité de g en a, $g(a) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell = \widetilde{f}(a)$, d'où le résultat. □

Graphe d'une fonction prolongeable par continuité en a



Graphe d'une fonction non prolongeable par continuité en a



Exemple 19.12. Le prolongement par continuité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{array}$ en 0 est

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exemple 19.13. La fonction inverse n'est pas prolongeable par continuité en 0, puisque par exemple $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, donc la fonction inverse ne peut pas admettre de limite finie en 0.

Exercice d'application 19.14. Montrer qu'on peut prolonger la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \sin(1/x) \end{array}$ par continuité en 0.

➥

Exercice d'application 19.15. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

➥

19.1.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 19.16 - Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $a \in D$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue en a.

(ii) Pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite a à valeur dans D, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite $f(a)$.

Démonstration.
C'est une traduction de la caractérisation séquentielle de la limite, démontrée dans le chapitre *Limites de fonctions.* □

Remarque 19.17. On pourra retenir que pour une fonction <u>continue</u> : $f\Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \cdots}_{\text{si elle existe}}\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\cdots)$.

Méthode 19.18. *Montrer la discontinuité en un point*

Ce résultat permet de justifier la discontinuité d'une fonction en un point a. Il suffit de trouver une suite (u_n) tendant vers a telles que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers $f(a)$.

Exercice d'application 19.19. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

➥

Définition 19.20 - Point fixe.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que x_0 est un **point fixe** de f lorsque $f(x_0) = x_0$.

Définition 19.21 - Ensemble stable.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et E un ensemble. On dit que E est **stable** par f lorsque $f(E) \subset E$.

Corollaire 19.22 - Limites possibles d'une suite récurrente.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur le segment $[a\,;\,b]$. On suppose que $[a\,;\,b]$ est stable par f. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [a\,;\,b]$ et la relation

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un point fixe de f.

Démonstration.

Nous reviendrons en détail sur l'étude de telles suites prochainement !

19.2 Continuité globale

19.2.1 Continuité sur D

Définition 19.23 - Continuité sur D.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est **continue** sur D si f est continue en tout point de D. On note $\mathscr{C}^0(D, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur D.

Exemple 19.24. Les fonctions usuelles, sauf la fonction partie entière, sont toutes continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 19.25 - Opérations sur les fonctions continues.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions, $a \in D$, λ, μ deux réels. On suppose que f et g sont continues en a (resp. sur D).

1. $\lambda f + \mu g$ est continue en a (resp. sur D).
2. fg est continue en a (resp. sur D).
3. Si g ne s'annule pas en a (resp. sur D), alors f/g est continue en a (resp. sur D).

Démonstration.
C'est une conséquence directe des opérations sur les limites. □

Proposition 19.26 - Composition de fonctions continues.

Soit D' un intervalle non réduit à un point, $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : D' \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subset D'$. Soit $a \in D$. On pose $b = f(a)$. Si f est continue en a (resp. sur D) et g est continue en b (resp. sur D'), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur D).

Remarque 19.27. En bref : si on peut l'écrire, la composée de fonctions continues est continue.

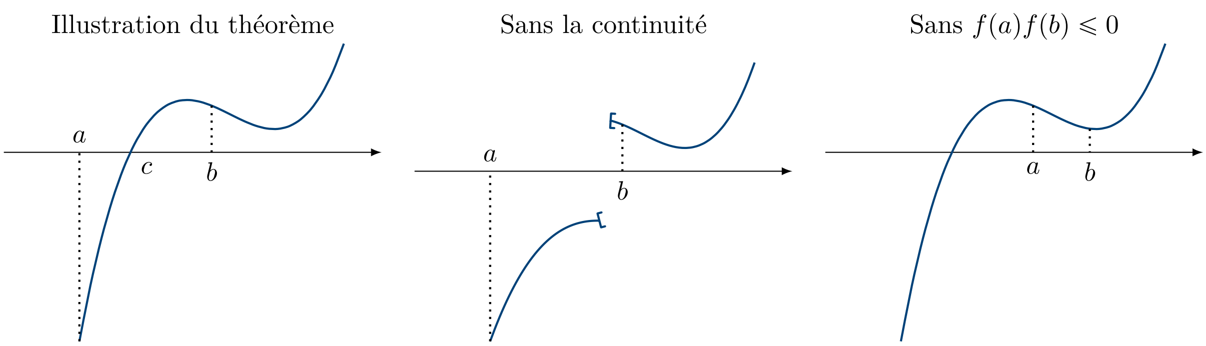
Démonstration.
C'est une conséquence directe de la composition de limites. □

Exemple 19.28. Soit $f \in \mathscr{C}^0(D, \mathbf{R})$. Alors $|f[$ est continue sur D également.

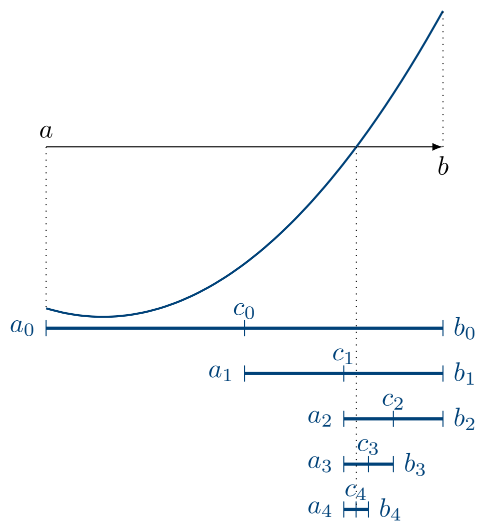
19.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 19.29 - Théorème des valeurs intermédiaires (cas particulier).

Soit $a \leqslant b$ deux réels, $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose de plus que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (c'est-à-dire tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Alors il existe $c \in [a\,;\,b]$ vérifiant $f(c) = 0$.

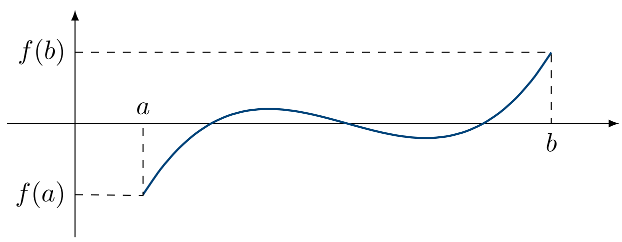


Démonstration (procédé de dichotomie).



ATTENTION

Le théorème des valeurs intermédiaires **ne donne pas l'unicité** du point d'annulation de la fonction.
Pour obtenir l'unicité, on utilise le théorème de la bijection (et il faut donc montrer la stricte monotonie en plus de la continuité). Voir le Théorème 19.42 de la bijection.



La contraposée de ce théorème fournit également un énoncé remarquable.

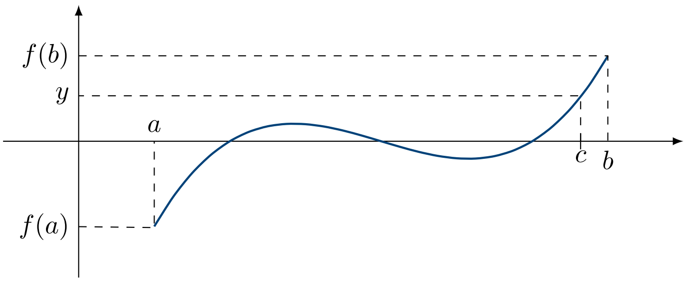
Corollaire 19.30 - Contraposée du TVI.

Si une fonction continue sur un intervalle ne s'y annule pas, alors elle y garde un signe constant.

Théorème 19.31 - Théorème des valeurs intermédiaires (cas général).

Soit $a \leqslant b$ deux réels, $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration.



Corollaire 19.32 - Extension du TVI à un intervalle ouvert.

Soit $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbf{R}}$, $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b. Pour tout réel k strictement compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, il existe un nombre réel $c \in]a\,;b[$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to b} f(x)$ (quitte à changer f en $-f$).
Soit k strictement compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$. On a, avec la définition de la limite, qu'il existe x_1, x_2 tels que $\lim\limits_{x\to a} f(x) < f(x_0) < k < f(x_1) < \lim\limits_{x\to b} f(x)$. Or f est continue sur $[x_1\,;x_2]$ et $k \in [f(x_1)\,;f(x_2)]$, donc le Théorème 19.29 des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $c \in [x_1\,;x_2] \subset]a\,;b[$ tel que $f(c) = k$. □

Exercice d'application 19.33. Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

➥

Exercice d'application 19.34. ♥ Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow [a\,;b]$ une fonction continue.

Montrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = c$. Ce résultat porte le nom de **théorème du point fixe**.

➥

Corollaire 19.35 - Image d'un intervalle par une fonction continue.

L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

Démonstration.

On peut se demander si le type d'un intervalle (c'est-à-dire fermé, borné, semi-ouvert, etc.) est conservé par une application continue. Nous allons voir que la réponse est positive dans le cas d'un segment. Par contre, pour les huit autres types d'intervalles, sans autre hypothèse que la continuité, le type d'intervalle n'est pas conservé.

Image d'un intervalle par une fonction non continue
I est un intervalle, $f(I)$ n'est pas un intervalle

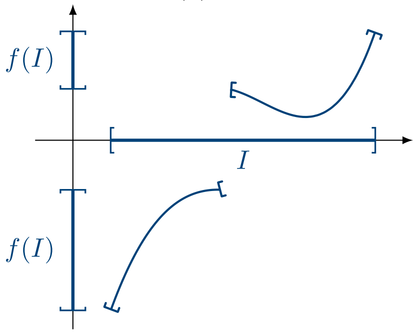
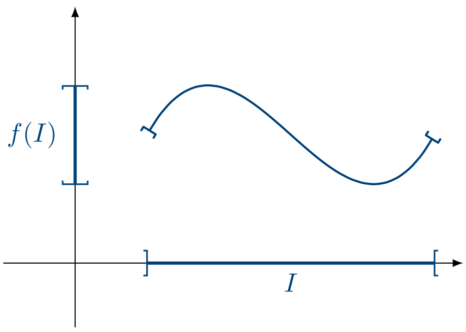


Image d'un intervalle par une fonction continue
I est ouvert, $f(I)$ est fermé



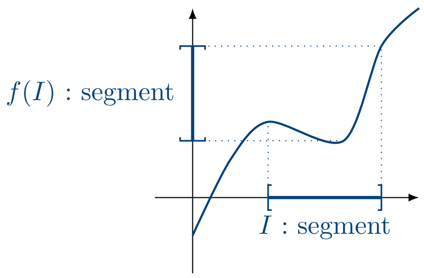
19.2.3 Image d'un segment par une fonction continue

Théorème 19.36 - Théorème des bornes atteintes.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a\,;\,b]\,,\mathbf{R})$. Alors f est bornée sur $[a\,;\,b]$ et atteint ses bornes.
Autrement dit,

$$\exists c_1 \in [a\,;\,b]\,,\ f(c_1) = \min_{[a\,;\,b]} f \quad \text{et} \quad \exists c_2 \in [a\,;\,b]\,,\ f(c_2) = \max_{[a\,;\,b]} f.$$

Démonstration.
Admis (hors-programme). □



Remarque 19.37. En particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exercice d'application 19.38. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2+\mathrm{e}^x}$ possède un minimum sur $]0\,;\,1]$.

➥

Exercice d'application 19.39. Montrer que toute fonction continue périodique définie sur $\mathbf{R}$ est bornée.

➥

19.2.4 Théorème de la bijection

Théorème 19.40 - Lien entre stricte monotonie et injectivité.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction strictement monotone sur l'intervalle I. Alors f est injective.

Démonstration.

Proposition 19.41 - Sens de variation de la bijection réciproque.

Soit A, B deux parties de $\mathbf{R}$, $f : A \longrightarrow B$ une bijection. Si f est strictement monotone sur A, alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone sur B et de même monotonie que f.

Démonstration.
Démonstration déjà faite dans le chapitre *Bijections réelles et fonctions circulaires réciproques.* □

Théorème 19.42 - Théorème de la bijection.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors

1. $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$. On rappelle que cela signifie que la fonction

$$\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

   est une bijection.
3. La bijection réciproque $\widetilde{f}^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur $f(I)$ et $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f.

Démonstration.

Exemple 19.43. Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan sont continues.

Exercice d'application 19.44. Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(x) \end{array}$ s'annule exactement une fois.

➡

Exemple 19.45 (☕). Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$, on note $f(\alpha)$ l'unique solution sur $\mathbf{R}^\star$ de l'équation d'inconnue réelle x

$$(E): \quad \alpha x^3 + \alpha x - 1 = 0.$$

Montrons que f est bien définie est bien définie, est continue et donner ses variations.

Soit $\alpha, x > 0$. On a

$$\alpha x^3 + \alpha x - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{x^3 + x}$$

Introduisons $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^3+x} \end{array}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $g'(x) = -\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x)^2} < 0$.
Donc g est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^\star$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^\star$ sur $\mathbf{R}_+^\star$ qu'on note $\widetilde{g}$. Comme α appartient à l'ensemble d'arrivée, l'équation $g(x) = \alpha$ admet une unique solution. La fonction f est alors la bijection réciproque de $\widetilde{g}$ donc est bien définie, continue et strictement croissante.

La démonstration de la continuité de f^{-1} peut être adaptée pour déterminer les limites de f^{-1}, comme le montre l'exemple qui suit. Le théorème de la limite monotone est essentiel !

Exemple 19.46. Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$, continue, strictement croissante et qui converge vers un réel ℓ en $+\infty$. Le théorème de la bijection assure que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ vers $[0\,;\ell[$. On note encore f cette nouvelle fonction. Montrons que $\lim\limits_{y \to \ell} f^{-1}(y) = +\infty$.
f^{-1} est strictement croissante (car f l'est, c'est aussi une conséquence du théorème de la bijection), donc $\lim\limits_{y \to \ell} f^{-1}(y)$ existe d'après le théorème de la limite monotone. Notons L cette limite. Par composition,

$$f^{-1}(f(x)) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L.$$

Par ailleurs,

$$f^{-1}(f(x)) = x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Via l'unicité de la limite, $L = +\infty$.

x	0		$+\infty$
f	$f(0)$	$\nearrow$	ℓ

x	$f(0)$		ℓ
f^{-1}	0	$\nearrow$	$+\infty$

19.3 Continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

Définition 19.47 - Continuité d'une fonction à valeurs complexes.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.

1. On dit que f est **continue en** $a \in D$ si et seulement si f tend vers $f(a)$ en a.
2. On dit que f est **continue sur** D si et seulement si f est continue en tout point de D.

Proposition 19.48 - Lien avec la continuité des parties réelles, imaginaires.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$. La fonction f est continue en $a \in D$ (respectivement sur D) si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues en $a \in D$ (respectivement sur D).

Démonstration.
Le résultat provient du lien entre la limite d'une fonction à valeurs complexes et la limite de sa partie réelle, de sa partie imaginaire. $\square$

Proposition 19.49 - Opérations sur les fonctions continues à valeurs complexes.

La somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), de deux fonctions à valeurs complexes continues sur I est continue sur I.

Démonstration.
Conséquence directe des opérations sur les limites. □

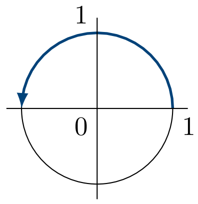
ATTENTION

Le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection faisant appel aux propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, ils n'existent pas pour les fonctions à valeurs complexes.

Exemple 19.50. La fonction $f : \begin{array}{ccc} [0\,;\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{ix} \end{array}$ est continue.

On a $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$, mais f ne s'annule jamais !

Le théorème des valeurs intermédiaires ne peut pas s'appliquer ici.



Questions de cours

1. Définir la notion de continuité en un point (deux définitions à connaître : avec les limites et sa traduction « avec epsilon »).
2. Définir la notion de continuité à gauche et de continuité à droite.
3. Énoncer la caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche et à droite.
4. Donner la définition de fonction prolongeable par continuité et de prolongement par continuité.
5. Énoncer la caractérisation séquentielle de la continuité.
6. Donner la définition de point fixe d'une fonction.
7. Donner la définition d'ensemble stable par une fonction.
8. Donner les limites possibles d'une suite u définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue définie sur un intervalle stable I.
9. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
10. Énoncer l'extension du théorème des valeurs intermédiaires à un intervalle ouvert.
11. Quelle est l'image d'un intervalle par une fonction continue ?
12. Énoncer le théorème des bornes atteintes.
13. Donner le lien entre la continuité d'une fonction à valeurs complexes et la continuité de ses parties réelle et imaginaire.