Chapitre 18 Limites de fonctions

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. De plus, a désignera un élément de I ou une extrémité de I (le terme « extrémité » est défini en tout début de chapitre).

18.1 Propriétés locales d'une fonction

Définition 18.1 - Extrémités d'un intervalle.

On rappelle qu'un intervalle I est toujours d'une des quatre formes suivantes : $[\alpha\,;\,\beta]$, $[\alpha\,;\,\beta[$, $]\alpha\,;\,\beta]$ ou $]\alpha\,;\,\beta[$, avec $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{R}}$ et $\alpha \leqslant \beta$. Les valeurs α et β sont appelées **extrémités** de I.

Exemple 18.2. Les extrémités de $[1\,;\,3[$ sont 1 et 3.

Définition 18.3 - Voisinages.

- Soit $a \in \mathbf{R}$. On appelle **voisinage de** a un intervalle de la forme $[a-\eta\,;\,a+\eta]$, où $\eta > 0$. L'ensemble des voisinages de a est donc
$$\mathcal{V}_a = \{[a-\eta\,;\,a+\eta] \ : \ \eta > 0\} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \mid \exists \eta > 0,\ V = [a-\eta\,;\,a+\eta]\}\,.$$
- On appelle **voisinage de** $+\infty$ un intervalle de la forme $[A\,;\,+\infty[$, où $A \in \mathbf{R}$. L'ensemble des voisinages de $+\infty$ est donc
$$\mathcal{V}_{+\infty} = \{[A\,;\,+\infty[\ : \ A \in \mathbf{R}\} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \mid \exists A \in \mathbf{R},\ V = [A\,;\,+\infty[\}\,.$$
- On appelle **voisinage de** $-\infty$ un intervalle de la forme $]-\infty\,;\,A]$, où $A \in \mathbf{R}$. L'ensemble des voisinages de $-\infty$ est donc
$$\mathcal{V}_{-\infty} = \{]-\infty\,;\,A] \ : \ A \in \mathbf{R}\} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \mid \exists A \in \mathbf{R},\ V =]-\infty\,;\,A]\}\,.$$

Définition 18.4 - Propriété vraie en un voisinage.

On dit qu'une propriété P sur f est vraie au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a sur lequel la propriété P est vraie.

Exemple 18.5. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

Les variations de f sont données par :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un maximum au voisinage de -1 qui vaut 2 car par exemple f admet un maximum sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right]$. De même, f admet un minimum au voisinage de 1 qui vaut -2 car par exemple f admet un minimum sur $[0\,;\,2]$.

La fonction admet un maximum au voisinage de $-\infty$ (car par exemple la fonction admet un maximum sur $]-\infty\,;\,-2]$) et un minimum au voisinage de $+\infty$ (car par exemple la fonction admet un minimum sur $[2\,;\,+\infty[$).

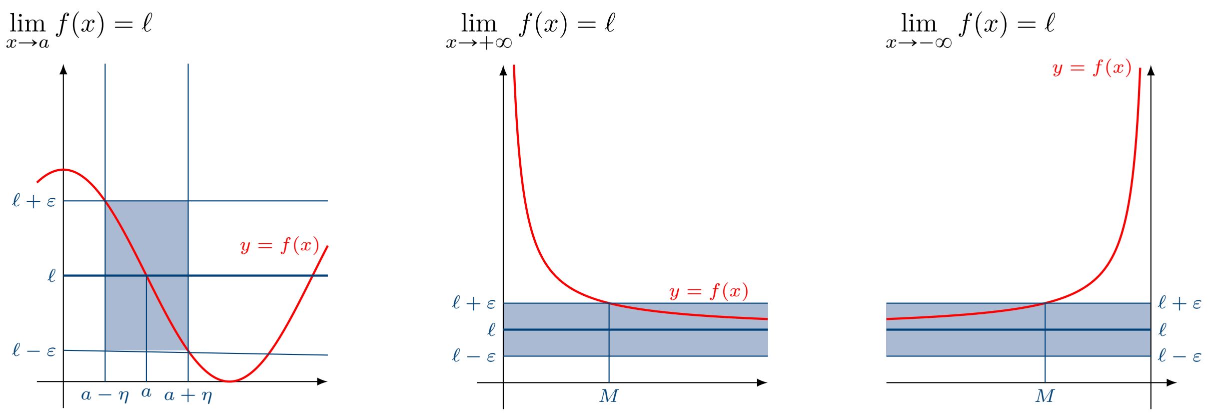
Par contre, f n'admet pas de minimum (global, c'est-à-dire sur $\mathbf{R}$) ni de maximum (global). De plus, la fonction n'est pas minorée au voisinage de $-\infty$ ni majorée au voisinage de $+\infty$.

18.2 Limites

18.2.1 Limite finie d'une fonction

Définition 18.6 - Limite finie.

- Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$
- Cas où $a = +\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant M \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$
- Cas où $a = -\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad x \leqslant M \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$



Remarque 18.7 (♥). On peut regrouper les trois point de la définition en un seul en utilisant la notion de voisinage. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f tend vers ℓ en a si
$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists V' \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in I, \quad x \in V' \implies f(x) \in V.$$

Proposition 18.8 - Unicité de la limite finie.

Si f possède une limite finie en a, alors cette limite est unique.
Cela nous autorise à introduire les notations suivantes, si ℓ désigne la limite unique :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_a f = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Démonstration.
On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbf{R}$ (elle s'adapte facilement aux autres cas).

Raisonnons par l'absurde et supposons que f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes en a. Posons $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$. Par définition de la limite en a, on a

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon,$$

et

$$\exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon,$$

Notons $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta_0$. Alors :

$$\begin{aligned}
|\ell_1 - \ell_2| &= |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)| & \\
&\leqslant |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| & \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2| & \text{car } |f(x)-\ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ et } |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \dfrac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$, ce qu'on peut réécrire comme $\dfrac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| \leqslant 0$, puis $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant 0$, d'où $|\ell_1 - \ell_2| = 0$ et finalement $\ell_1 = \ell_2$. □

Exemple 18.9 (*Déterminer une limite avec la définition*). Montrons que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut déterminer $A \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $\left|\dfrac{3}{x^2}\right| \leqslant \varepsilon$.

On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3}{x^2}\right| \leqslant \varepsilon &\Longleftrightarrow \frac{3}{x^2} \leqslant \varepsilon & \text{car } \frac{3}{x^2} \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x^2}{3} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbf{R}_+^\star \\
&\Longleftrightarrow x^2 \geqslant \frac{3}{\varepsilon} & \\
&\Longleftrightarrow x \geqslant \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} & \text{car } \frac{3}{\varepsilon} \geqslant 0 \text{ et la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbf{R}_+
\end{aligned}$$

Ce calcul montre que pour $A = \sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}}$, on a $x \geqslant A$ qui entraîne $|f(x) - 0| \leqslant \varepsilon$. Finalement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

18.2.2 Limites infinies

Définition 18.10 - Limite égale à $+\infty$.

- Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f **tend vers** $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(f(x) \geqslant A\big).$$

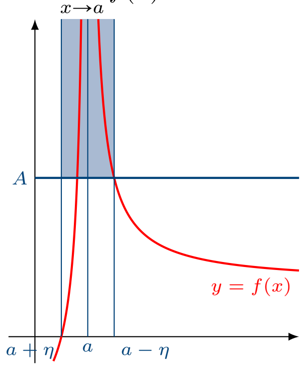
- Cas où $a = +\infty$: on dit que f **tend vers** $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \geqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \geqslant A\big).$$

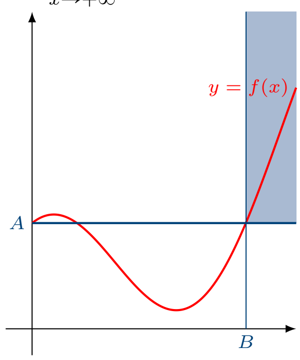
- Cas où $a = -\infty$: on dit que f **tend vers** $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \leqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \geqslant A\big).$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Définition 18.11 - Limite égale à $-\infty$.

- Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f **tend vers** $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ lorsque
$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(f(x) \leqslant A\big).$$
- Cas où $a = +\infty$: on dit que f **tend vers** $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ lorsque
$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \geqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \leqslant A\big).$$
- Cas où $a = -\infty$: on dit que f **tend vers** $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ lorsque
$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad (x \leqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \leqslant A\big).$$

Remarque 18.12 (♥♥). On peut regrouper les neuf points des Définitions 18.6, 18.10, 18.11 en un seul en utilisant la notion de voisinage. Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que f tend vers ℓ en a si
$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists V' \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in I, \quad x \in V' \implies f(x) \in V.$$
On peut même faire plus condensé (mais c'est plus compliqué à utiliser, je le donne ici uniquement à titre culturel) :
$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists V' \in \mathcal{V}_a, \quad f(I \cap V') \subset V.$$

Proposition 18.13 - Unicité de la limite.

Si f possède une limite (finie ou infinie) en a, alors cette limite est unique.
Cela nous autorise à introduire les notations suivantes, si ℓ désigne la limite unique :
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_a f = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Démonstration.
On fait la démonstration dans le cas où $a \in \mathbf{R}$.

- On a déjà montré que f ne peut pas avoir deux limites réelles finies distinctes.
- Supposons que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ et aussi vers $+\infty$. Posons $\varepsilon = 1$. Alors il existe $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\eta_1\,;\,a+\eta_1] \cap I$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $x \in [a-\eta_1\,;\,a+\eta_1]$, $f(x) \leqslant \ell + 1$.
Notons $A = \ell + 2$. On sait que f tend aussi vers $+\infty$, donc il existe $\eta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\eta_2\,;\,a+\eta_2] \cap I$, $f(x) \geqslant A$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant \ell + 2$.
Si on pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors on a, pour tout $x \in [a-\eta\,;\,a+\eta]$, $f(x) \leqslant \ell + 1$ et $f(x) \geqslant \ell + 2$, ce qui est contradictoire. Donc f ne peut avoir à la fois une limite finie et $+\infty$ comme limite.

- De même, on montre que f ne peut à la fois avoir une limite finie et $-\infty$ comme limite.

□

ATTENTION

On utilisera la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ uniquement après avoir montré que f admet une limite en a (finie ou infinie).

Exemple 18.14. Montrons que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.

Soit $A \in \mathbf{R}$. Il faut déterminer $B \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant A$. Soit $x \in \mathbf{R}$. On suppose que $A \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1} \geqslant A &\iff x^2+1 \geqslant A^2 && \text{car la fonction carré est croissante sur } \mathbf{R}_+ \\
&\iff x^2 \geqslant A^2-1 \\
&\iff x \geqslant \sqrt{A^2-1} && \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbf{R}_+
\end{aligned}$$

Posons $B = \sqrt{A^2-1}$. Si $x \geqslant B$, alors $f(x) \geqslant A$. Finalement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

18.2.3 Propriétés des limites

Proposition 18.15 - Limite finie en un point où la fonction est définie.

Soit a un élément de I (donc f est définie en a). Si la limite de f en a existe, alors la limite est finie et on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration.

Proposition 18.16 - Une fonction convergente est bornée dans un voisinage.

Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.
De plus, si la limite de f est un réel strictement positif (resp. négatif) ou $+\infty$ (resp. $-\infty$), f est strictement positive (resp. négative) au voisinage de a.

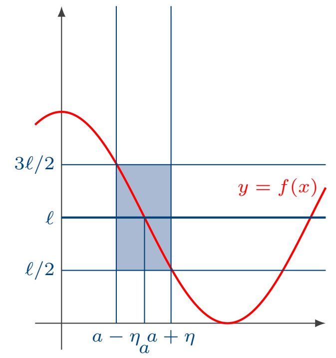
Démonstration.
On démontre d'abord que si f admet une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.
Traitons le cas où $a \in \mathbf{R}$. Notons $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Considérons $\varepsilon = 1$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\eta\,;\, a+\eta]$, $|f(x) - \ell| \leqslant 1$, donc en particulier :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant |f(x)-\ell| + |\ell| && \text{car } f(x) = f(x)-\ell+\ell \text{ et avec l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant 1 + |\ell| && \text{car } |f(x)-\ell| \leqslant 1
\end{aligned}$$

donc f est bornée sur $I \cap [a-\eta\,;\,a+\eta]$. Ainsi, f est bornée au voisinage de a.

- Montrons maintenant que si f tend vers un réel ℓ strictement positif, alors f est strictement positive au voisinage de a (les autres cas sont laissés au lecteur).

  Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a-\eta\,;\,a+\eta]$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$, donc en particulier $f(x) \geqslant \ell - \varepsilon$, c'est-à-dire $g(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$, puis $g(x) > 0$. Donc f est strictement positive sur un voisinage de a.



□

ATTENTION

Si une fonction tend vers $\ell \geqslant 0$ en a, on ne peut pas en déduire son signe au voisinage de a. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x$ tend vers 0 en 0 et cette fonction n'est pas de signe constant au voisinage de 0.

Théorème 18.17 - Passage à la limite dans une inégalité large.

Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que f et g admettent une limite finie en a. Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$. On dit usuellement qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Démonstration.

Démontrons ce résultat par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > \lim\limits_{x\to a} g(x)$. D'après les opérations sur les limites (qu'on démontrera à nouveau plus tard), $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$, donc $\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) > 0$. Avec la Proposition , la fonction $f-g$ est strictement positive au voisinage de a, ce qui est contradictoire. □

ATTENTION

Le résultat précédent est faux avec des inégalités strictes. Si $f < g$ au voisinage de a, alors on a seulement $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (les inégalités strictes deviennent larges après passage à la limite). Pour le retenir, vous pouvez penser à la fonction inverse f et la fonction nulle g : pour tout $x > 0$, $f(x) > g(x)$ (donc $f > g$ au voisinage de $+\infty$) et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (l'assertion $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est donc fausse).

Théorème 18.18 - Caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite ℓ.

Démonstration.

Remarque 18.19. Cette proposition s'utilise souvent pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a : il suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers a telles que les suites $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ n'ont pas la même limite.

Exemple 18.20. Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'a pas de limite en $+\infty$. Pour cela, nous allons considérer les suites u, v définies pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = n$, $v_n = n + \dfrac{1}{2}$ et montrer que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ n'ont pas les mêmes limites.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $\lfloor n\rfloor = n$, donc $f(n) = 1$. Par ailleurs, $\left\lfloor n + \dfrac{1}{2}\right\rfloor = n$, d'où :

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right).$$

Or $n + \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par composition de limites $\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par ailleurs, on rappelle que $\dfrac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$, donc $2n\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ puis $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$. Donc, par composition de limites,

$$\exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Ainsi, par produit de limites,

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Finalement, on a obtenu que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on peut en déduire que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice d'application 18.21. ♥

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\sin(n\pi)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$. En déduire que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.

➥

Ce théorème a aussi un très grand intérêt théorique. Il va nous permettre de transposer beaucoup de résultats sur les limites de suites aux limites de fonctions.

18.2.4 Limite à droite, limite à gauche

Définition 18.22 - Limite à gauche, à droite.

Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

- On dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a si la restriction de f à $]a\,;+\infty[\,\cap I$ admet ℓ pour limite en a. On la note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$.
- On dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a si la restriction de f à $]-\infty\,;a[\,\cap I$ admet ℓ pour limite en a. On la note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$.

Remarque 18.23. Dans la définition précédente, les intervalles $]a\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;a[$ sont ouverts en a. Autrement dit, la valeur de f en a n'intervient pas dans l'existence et la valeur de la limite à droite ou à gauche.

Exemple 18.24. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

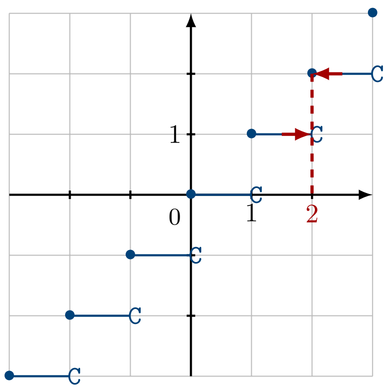
Exemple 18.25 (♥). Soit $m \in \mathbf{Z}$. Déterminons les limites à droite et à gauche de la fonction partie entière en m.
Pour tout $x \in]m-1\,;m[$, $\lfloor x \rfloor = m-1$, d'où

$$\lim_{\substack{x\to m\\x<m}} \lfloor x \rfloor = m-1.$$

De plus, pour tout $x \in]m\,;m+1[$, $\lfloor x \rfloor = m$, d'où

$$\lim_{\substack{x\to m\\x>m}} \lfloor x \rfloor = m.$$

Ci contre, on illustre les limites en 2^- et 2^+, qui valent respectivement 1 et 2.



Proposition 18.26 - Valeurs de la limite à gauche et à droite si la fonction admet une limite.

Si f admet une limite en a, alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en a. Le cas échéant, les limites à gauche et à droite sont égales à la limite en a.

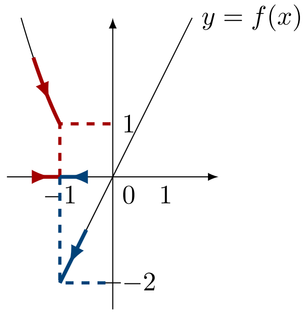
Remarque 18.27. La contraposée du résultat précédent est utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite : si les limites à droite et à gauche sont différentes, alors f n'admet pas de limite en a.

Exemple 18.28.
Considérons la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x & \text{si} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$$

On donne la courbe représentative de la fonction f ci-contre. On y lit

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -2.$$



Puisque f n'admet pas les mêmes limites à gauche et à droite en -1, f n'admet pas de limite en -1 (en effet, si f admettait une limite en a, les limites à gauche et à droite devraient être égales).

Exemple 18.29 (♥). La fonction inverse n'admet pas de limite en 0, puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Théorème 18.30 - Caractérisation de la limite avec les limites à gauche et à droite.

- On suppose que a est une extrémité de l'ensemble de définition de f et que f n'est pas définie en a. On suppose de plus que f est définie à gauche et à droite de a. Si f possède une limite à gauche et une limite à droite et si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$
alors f tend vers ℓ en a.
- On suppose que f est définie en a, à gauche de a et à droite de a. Si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
alors f tend vers $f(a)$ en a.

Exercice d'application 18.31.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^\star$ par $f(x) = \lfloor -|x| \rfloor$.

 (a) Déterminer l'expression de f sur $]0\,;\,1[$ puis l'expression de f sur $]-1\,;\,0[$.

 (b) En déduire les limites à gauche et à droite de f en 0 et conclure quant à l'existence d'une limite en 0.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \lfloor -|x| \rfloor$. La fonction g admet-elle une limite en 0 ?

➥

Remarque 18.32. On peut généraliser le théorème précédent si f n'est pas défini à gauche (dans ce cas on ne calcule pas la limite à gauche) ou à droite (dans ce cas on ne calcule pas la limite à droite). Par exemple, supposons que f n'est pas définie en a ni à gauche de a mais que f est définie à droite de a. Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors f tend vers ℓ en a.

Exemple 18.33. La fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une limite égale à $+\infty$ en 0. En effet, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (en effet, on ne peut ni évaluer f en 0, ni calculer de limite à gauche en 0 puisque f est définie sur $\mathbf{R}_+^\star$).

18.3 Opérations sur les limites

On résume dans les tableaux suivants les opérations sur les limites, où $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$. f et g désignent deux fonctions définie sur I et a est un élément de I ou une de ses extrémités.

FI signifie « **forme indéterminée** ». On rappelle que cette expression signifie que la limite peut être réelle, infinie voire ne pas exister. Il y a alors un travail (parfois important) à fournir pour « lever » cette forme indéterminée et calculer la limite (quand on aboutit à une forme indéterminée il ne faut donc surtout pas s'arrêter mais au contraire poursuivre ses efforts ☺).

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	ℓ
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ℓ
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0	ℓ'
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x))$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\ell\times\ell'$

la règle des signes donne le signe de la limite du produit

Limite d'un inverse

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\pm\infty$	$\ell\neq 0$	0 et $f(x)<0$ à gauche et à droite de a	0 et $f(x)>0$ à gauche et à droite de a
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration.

Remarque 18.34. Tous ces résultats restent valables en échangeant les limites par des limites à gauche (resp. à droite).

Remarque 18.35. Il y a quatre formes indéterminées à retenir (deux ne sont pas explicitement données dans les tableaux mais peuvent s'en déduire). Les notations suivantes sont un moyen mnémotechnique uniquement, il faut surtout ne jamais les écrire en devoir !

1. $+\infty-\infty$; **2.** $0\times\infty$; **3.** $\dfrac{0}{0}$; **4.** $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Remarque 18.36. La limite d'un quotient s'obtient en combinant les deux derniers tableaux.

Proposition 18.37 - Limite d'une composée.

Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbf{R})$, $g\in\mathcal{F}(J,\mathbf{R})$ avec $f(I)\subset J$. Soit a un élément de I ou une de ses extrémités, soit b un élément de J ou une de ses extrémités.
Si f admet pour limite b en a, et si g admet pour limite $\ell\in\overline{\mathbf{R}}$ en b, alors $g\circ f$ tend vers ℓ en a. Autrement dit, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\ell$.

Démonstration.
On fait la preuve uniquement pour a,b,ℓ réels. Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la limite de g,

$$\exists\nu>0,\ \forall y\in E,\quad (|y-b|\leqslant\nu\Longrightarrow|g(y)-\ell|\leqslant\varepsilon)\,.$$

Ensuite, la définition de la limite de f donne

$$\exists\eta>0,\ \forall x\in I,\quad (|x-a|\leqslant\eta\Longrightarrow|f(x)-b|\leqslant\nu)\,.$$

On a donc, pour tout $x\in I\cap[a-\eta\,;\,a+\eta]$, $|g(f(x))-\ell|\leqslant\varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

Exemple 18.38. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$ car $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y}=1$.

18.4 Théorèmes d'existence de limite

Lemme 18.39.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in I^{\mathbf{N}}$. Si (x_n) tend vers a, alors pour tout voisinage V de a, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (x_n) sont dans V.

Démonstration.

Théorème 18.40 - Théorème d'encadrement.

Soit f, g, h trois fonctions réelles définies sur I, soit a un point ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbf{R}$. Supposons que les trois propriétés suivantes soient vérifiées.

(a) $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

(c) $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

Alors g admet une limite en a, et plus précisément $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Démonstration.

Remarque 18.41. On notera que dans ce théorème on ne se contente pas d'un passage à la limite dans une inégalité (qui nécessite de savoir a priori que les limites existent).

Exercice d'application 18.42. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin(\sqrt{x})}{2x^2+1}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

➥

Corollaire 18.43 - Fonction majorée en valeur absolue par une fonction qui tend vers 0.

Soit f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que $|f| \leqslant g$ au voisinage de a. Si g tend vers 0 en a, alors f tend aussi vers 0 en a.

Démonstration.
On a $|f| \leqslant g$ au voisinage de a, donc $-g \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de a. De plus, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ donc $\lim_{x \to a} -g(x) = 0$, puis avec le théorème d'encadrement $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. □

Corollaire 18.44 - Produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ une fonction qui tend vers 0 en a et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ une fonction bornée au voisinage de a. Alors fg tend vers 0 en a.

Démonstration.
Notons V un voisinage sur lequel g est bornée. Il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in V$, $|g(x)| \leqslant M$. Donc, en multipliant par $|f(x)|$, $|(fg)(x)| \leqslant M\,|f(x)|$. Or $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, donc $|f(x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ par composition de limite. Ainsi, le corollaire précédent assure que $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$. □

Théorème 18.45 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit f et g deux fonctions définies sur I telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a.

1. Si f tend vers $+\infty$ en a, alors g tend également vers $+\infty$ en a.
2. Si g tend vers $-\infty$ en a, alors f tend également vers $-\infty$ en a.

Démonstration.
Soit V un voisinage de a sur lequel $f \leqslant g$. Soit $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ une suite qui tend vers a. Il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in V$, donc $f(x_n) \leqslant g(x_n)$.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$ et le théorème de minoration sur les suites assure que $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = +\infty$. Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ qui tend vers a, on en déduit avec le théorème de la caractérisation séquentielle des limites que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Idem si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. □

Exemple 18.46 (*Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la partie entière*). Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Or $\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, donc le théorème de minoration assure que $\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$. De plus, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$, donc le théorème de majoration assure que $\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$.

Théorème 18.47 - Théorème de la limite monotone.

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ avec $a < b$, et f une fonction croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $]a\,;b[$.

1. Si f est majorée (resp. minorée) sur $]a\,;b[$, alors f possède une limite finie à gauche en b et
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup(\{f(x)\ :\ x \in]a\,;b[\}) \quad (\text{resp. } \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf(\{f(x)\ :\ x \in]a\,;b[\})).$$
2. Si f est minorée (resp. majorée) sur $]a\,;b[$, alors f possède une limite finie à droite en a et
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf(\{f(x)\ :\ x \in]a\,;b[\}) \quad (\text{resp. } \lim_{x \to a^+} f(x) = \sup(\{f(x)\ :\ x \in]a\,;b[\})).$$
3. Si f n'est pas majorée (resp. minorée) sur $]a\,;b[$, alors $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).
4. Si f n'est pas minorée (resp. majorée) sur $]a\,;b[$, alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Démonstration.
Supposons que f est croissante sur l'intervalle $]a\,;b[$.

1. La fonction f étant majorée, l'ensemble $\{f(x) : x \in]a\,;b[\}$ est non vide et majoré, ce qui justifie l'existence de $\ell = \sup(\{f(x) : x \in]a\,;b[\})$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, on sait qu'il existe $x_0 \in]a\,;b[$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant \ell$. Comme la fonction f est croissante et majorée par ℓ (une borne supérieure est un majorant), on en déduit que pour tout $x \geqslant x_0$, $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell$. On a donc démontré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in]a\,;b[\,,\ \forall x \geqslant x_0,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui établit la convergence de f vers ℓ.

3. Soit $A \in \mathbf{R}$. Comme f n'est pas majorée, le nombre A n'est pas un majorant de f, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in]a\,;b[$ tel que $f(x_0) \geqslant A$. Comme f est croissante, on en déduit que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant A$. On a donc démontré que

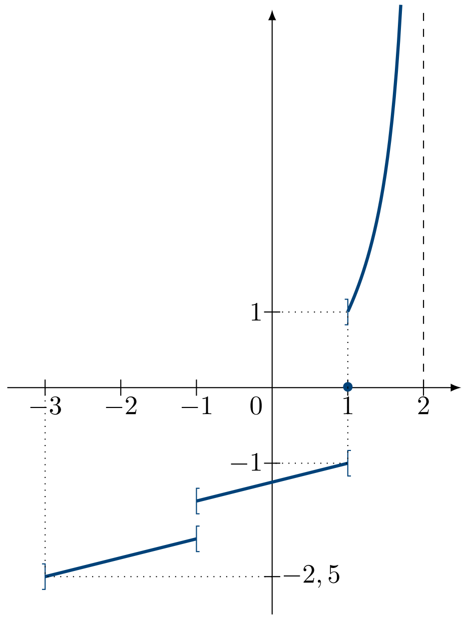
$$\forall A > 0,\ \exists x_0 \in]a\,;b[\,,\ \forall x \geqslant x_0,\ f(x) \geqslant A,$$

ce qui démontre la divergence de f vers $+\infty$ quand x tend vers b.

Le cas où f est décroissante se déduit en considérant $-f$ à la place de f. Les points **2.** et **4.** se déduisent de **1.** et **3.** en considérant : $x \longmapsto f(-x)$ à la place de f. □

Exemple 18.48. On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f croissante définie sur $]-3\,;2[$. On retrouve bien que f admet des limites à gauche et à droite en tout point de $]-3\,;2[$, ainsi qu'une limite à droite en 3 et une limite à gauche en 2.
On lit par exemple sur le graphe :

- $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x) = -2,5\,;$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1\,;$
- $f(1) = 0\,;$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1\,;$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty.$



Exemple 18.49 (♥). On peut démontrer un résultat laissé en suspens : soit $f :]a\,;b[\longrightarrow]c\,;d[$ une fonction strictement monotone, continue (donc bijective) où $a, b, c, d \in \overline{\mathbf{R}}$.

- Si f est strictement croissante, $\displaystyle\lim_{x\to c^+} f^{-1}(x) = a$ et $\displaystyle\lim_{x\to d^-} f^{-1}(x) = b$.
- Si f est strictement décroissante, $\displaystyle\lim_{x\to c^+} f^{-1}(x) = b$ et $\displaystyle\lim_{x\to d^-} f^{-1}(x) = a$.

Démontrons que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ dans le cas où $f :]a\,;+\infty[\longrightarrow]c\,;+\infty[$ est strictement croissante. On a $f^{-1} :]c\,;+\infty[\longrightarrow]a\,;+\infty[$ strictement croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone f^{-1} admet une limite au voisinage de $+\infty$. Or f^{-1} est surjective, ce qui signifie que chaque réel de $]c\,;+\infty[$ admet un antécédent. Autrement dit, f^{-1} n'est pas majorée (chaque réel $x > a$ admettant un antécédent par f^{-1}) donc le théorème de la limite monotone assure que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

Corollaire 18.50 - Existence de limites finies à gauche et à droite pour une fonction monotone.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ monotone, et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Alors f admet des limites finies à gauche et à droite en a. Plus précisément,

1. Si f est croissante, $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$.

2. Si f est décroissante, $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Démonstration.

Remarque 18.51. Ces deux inégalités peuvent être strictes (penser à la fonction partie entière).

18.5 Fonctions à valeurs complexes

On peut étendre aux fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ toutes les propriétés des fonctions réelles qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbf{R}$ (il ne sera plus question de fonction croissante, décroissante, majorée, minorée). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 18.52 - Limites d'une fonction à valeurs complexes en un complexe.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$. Soit $\ell \in \mathbf{C}$.
On dit que f **tend vers** ℓ en a lorsqu'elle est définie au voisinage de a et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t \in I, \quad (\underbrace{|t-a|}_{\text{val. abs.}} \leqslant \eta) \Longrightarrow (\underbrace{|f(t)-\ell|}_{\text{module}} \leqslant \varepsilon).$$

On dit que f **tend vers** ℓ en $+\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $+\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall t \in I, \quad (t \geqslant A) \Longrightarrow (|f(t)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

On dit que f **tend vers** ℓ en $-\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $-\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall t \in I, \quad (t \leqslant A) \Longrightarrow (|f(t)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

Comme dans le cas réel, la limite d'une fonction, si elle existe, est unique.

ATTENTION

Pour les fonctions à valeurs complexes, seules les limites finies ont un sens. Une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$ ne peut pas admettre $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

Remarque 18.53. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on peut regrouper les trois assertions de la définition précédente en une seule à l'aide de la notion de voisinage. Soit $\ell \in \mathbf{C}$. On appelle voisinage de ℓ un ensemble de la forme $\{ z \in \mathbf{C} \mid |z-a| \leqslant \eta \}$, où $\eta > 0$. On dit que f tend vers ℓ en a lorsque

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists V' \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in I, \quad x \in V' \implies f(x) \in V.$$

Proposition 18.54 - Une fonction convergente est bornée dans un voisinage.

Une fonction à valeurs complexes qui admet une limite en a est bornée au voisinage de a (cela signifie que son module $|f|$ est une fonction réelle majorée au voisinage de a).

Proposition 18.55 - Opérations sur les limites complexes.

Si f et g sont deux fonctions à valeurs complexes qui possèdent une limite en a, alors

- la somme $f+g$ possède une limite en a et $\lim\limits_{a}(f+g) = \lim\limits_{a} f + \lim\limits_{a} g$,
- le produit fg possède une limite en a et $\lim\limits_{a}(fg) = \lim\limits_{a} f \times \lim\limits_{a} g$,
- si $\lim\limits_{a} g \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini au voisinage de a, possède une limite en a et $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim\limits_{a} f}{\lim\limits_{a} g}$.

Le théorème suivant est fondamental. Il établit que l'existence d'une limite pour une fonction complexe équivaut à l'existence d'une limite pour sa partie réelle et pour sa partie imaginaire.

Théorème 18.56 - Critère d'existence d'une limite complexe avec $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$.

Soit $\ell \in \mathbf{C}$. Une fonction à valeurs complexes f tend vers ℓ en a si, et seulement si, les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ admettent respectivement $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$ pour limite en a.

Démonstration.

- Si les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ tendent respectivement vers les réels α et β en a, alors la somme $f = \mathfrak{Re}(f) + i\,\mathfrak{Im}(f)$ tend vers $\ell = \alpha + i\beta$ en a, d'après la proposition précédente.
- Supposons réciproquement que f tend vers ℓ. On note $\alpha = \mathfrak{Re}(\ell)$ et $\beta = \mathfrak{Im}(\ell)$. On fait uniquement la démonstration pour a fini uniquement.

  Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f tend vers ℓ en a, on obtient qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I \cap \,]a-\eta\,;\,a+\eta[\,, \quad \big|f(t) - \ell\big| \leqslant \varepsilon.$$

  c'est-à-dire

$$\forall t \in I \cap \,]a-\eta\,;\,a+\eta[\,, \quad \Big|\big(\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha\big) + i\big(\mathfrak{Im}(f)(t) - \beta\big)\Big| \leqslant \varepsilon.$$

  Or pour tout $t \in I \cap \,]a-\eta\,;\,a+\eta[$, $|\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha| \leqslant \Big|\big(\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha\big) + i\big(\mathfrak{Im}(f)(t) - \beta\big)\Big|$, d'où $|\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
  Ainsi, $\lim\limits_{a} \mathfrak{Re}(f) = \alpha$. De même, on montre que $\lim\limits_{\to a} \mathfrak{Im}(f) = \beta$. $\square$

Exemple 18.57. Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & 2i + 3 + \mathrm{e}^{ix - x} \end{array}$.

On a $\mathfrak{Re}(f) : x \longmapsto 3 + \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$. En tant que produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x) = 0$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathfrak{Re}(f)(x) = 3$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathfrak{Im}(f)(x) = 2$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2i + 3$.

Questions de cours

1. Définir la notion de voisinage de $a \in \mathbf{R}$, de $+\infty$ et de $-\infty$.
2. Définir la notion de limite finie en $a \in \mathbf{R}$, en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Définir la notion de limite égale à $+\infty$ en $a \in \mathbf{R}$, en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Définir la notion de limite égale à $-\infty$ en $a \in \mathbf{R}$, en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Donner le lien entre fonction convergente en a et fonction bornée au voisinage de a.
6. Énoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité large.
7. Énoncer le théorème de caractérisation séquentielle de la limite.
8. Donner la définition de limite à gauche (resp. à droite).
9. Si la fonction admet une limite, que peut-on dire de ses limites à gauche et à droite ?
10. Énoncer le théorème de caractérisation de la limite avec les limites à gauche et à droite.
11. Donner les tableaux d'opérations sur les limites de fonctions.
12. Énoncer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
13. Énoncer le théorème de majoration (resp. minoration) pour les fonctions.
14. Énoncer le théorème de la limite monotone pour les fonctions.
15. Énoncer le théorème d'existence d'une limite d'une fonction à valeurs complexes avec les parties réelles et imaginaires.