CHAPITRE 16 CALCUL MATRICIEL

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et (n,p) est un couple d'entiers naturels non nuls.

16.1 Vocabulaire

Définition 16.1 - Matrice, coefficient, format.

On appelle **matrice** à coefficients dans $\mathbf{K}$ un tableau rectangulaire constitué de nombres appartenant à $\mathbf{K}$ et ayant n lignes, p colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note, de manière condensée, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

L'élément $a_{i,j}$ est appelé **coefficient** de position (ou d'indice) (i,j) de la matrice A : il est situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne (où $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$).

Le couple (n,p) est appelé **format** de la matrice. On dit que M est une matrice (n,p) (sous entendu de format (n,p), on dit parfois de taille (n,p)).

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de format (n,p).

Définition 16.2 - Matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

1. Si $n = p$ (la matrice a donc le même nombre de lignes et de colonnes), M est dite **matrice carrée** . On note alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Si $n = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule ligne), M est dite **matrice ligne**.
3. Si $p = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule colonne), M est dite **matrice colonne**.

Définition 16.3 - Matrice nulle.

On appelle **matrice nulle** de format (n,p) la matrice de format (n,p) dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou 0 si cette notation ne présente pas d'ambiguïté.

Définition 16.4 - Matrice identité.

On appelle **matrice identité** de taille n la matrice notée I_n et définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

Exemple 16.5. Voici quelques exemples de matrices :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{R})$; **2.** $\begin{pmatrix} \pi \\ 1,5 \\ \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$; **3.** $\begin{pmatrix} 3,1 & -2 \\ 1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$;

4. $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbf{R})$; **5.** $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -1-i & 2 \\ -3+2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbf{C})$; **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

B est une matrice colonne, D est une matrice ligne, C et F sont carrées.
Si $A = (a_{i,j})$, on a par exemple, $a_{3,1} = 9$, $a_{1,3} = 3$, etc.

Exercice d'application 16.6. Écrire explicitement les matrices suivantes :

$$M = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{\substack{i \in [\![1,3]\!] \\ j \in [\![1,4]\!]}} \qquad N = \left(n_{i,j}\right)_{\substack{i \in [\![1,5]\!] \\ j \in [\![1,3]\!]}} \text{ avec } \forall (i,j) \in [\![1,5]\!] \times [\![1,3]\!], n_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i > j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$$

➥

Notation 16.7. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

- On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de la matrice M. Ces lignes sont écrites via des matrices-ligne.
- On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de la matrice M. Ces colonnes sont écrites via des matrices-colonne.

Exemple 16.8. Les lignes et les colonnes de la matrice A de l'Exemple 16.5 sont

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

16.2 Calcul matriciel

16.2.1 Combinaison linéaire

Définition 16.9 - Somme et produit externe.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On définit les matrices $A + B$ (somme de A et B) et λA (produit externe de λ par A) par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

ATTENTION

On ne peut additionner ou multiplier par une constante que des matrices de même format.

Exemple 16.10. $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} & 3 \\ \ln 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{e} & 4 \\ \ln 2 & 5+\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 16.11. $i\begin{pmatrix} 1+i & i & 3 \\ \ln 2 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 & -1 & 3i \\ i\ln 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Définition 16.12 - Combinaison linéaire de matrices.

Soit $M, A_1, \dots, A_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On dit que M est **combinaison linéaire** des matrices $A_1, \dots, A_r$ lorsqu'il existe des scalaires (des nombres) $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbf{K}$ tels que

$$M = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_r A_r.$$

Une combinaison linéaire est donc une somme pondérée de matrices.

Exercice d'application 16.13. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $A + 2B$ et $2A - B$.

➥

Proposition 16.14 - Propriétés de la somme matricielle.

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ (les trois matrices sont donc de même format) et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

1. Associativité : $(A+B)+C = A+(B+C)$. On notera dorénavant $A+B+C$ une de ces opérations.
2. Commutativité : $A+B = B+A$.
3. Existence d'un élément neutre : $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
4. Existence d'un opposé : $A + (-1).A = 0_{n,p}$. On notera dorénavant $-A = (-1).A$ l'**opposé** de A.

Démonstration.
Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, coefficient d'indice (i,j) de $(A+B)+C$ est $(a_{i,j}+b_{i,j})+c_{i,j} = a_{i,j}+(b_{i,j}+c_{i,j})$ par associativité de la somme sur $\mathbf{K}$, c'est donc aussi le coefficient d'indice (i,j) de $A+(B+C)$, donc $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Les autres points se montrent de la même manière. □

Proposition 16.15 - Propriétés du produit externe.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

1. Distributivité : $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
2. Distributivité : $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.
3. Associativité : $\lambda(\mu A) = (\mu \times \lambda)A$. On notera dorénavant $\lambda\mu A$ une de ces opérations.
4. $0.A = 0_{n,p}$.
5. Existence d'un élément neutre : $1.A = A$.

Démonstration.
Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, coefficient d'indice (i,j) de $\lambda(A+B)$ est $\lambda(a_{i,j}+b_{i,j}) = \lambda a_{i,j} + \lambda b_{i,j}$ par distributivité sur $\mathbf{K}$, c'est donc aussi le coefficient d'indice (i,j) de $\lambda A + \lambda B$, donc $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Les autres points se montrent de la même manière. □

16.2.2 Matrices élémentaires

Définition 16.16 - Symbole de Kronecker.

Lorsque x et y sont des nombres réels, on appelle **symbole de Kronecker** de x et de y et on note $\delta_{x,y}$ le réel défini par :

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = y \\ 0 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Exemple 16.17. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. La matrice identité de taille n peut ainsi s'écrire $I_n = (\delta_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

Exemple 16.18 (♨). Soit x, y et z des réels. Que vaut $\delta_{x,y} \times \delta_{y,z}$?

On a $\delta_{x,y}\delta_{y,z} \neq 0 \iff \delta_{x,y} \neq 0$ et $\delta_{y,z} \neq 0 \iff x = y$ et $y = z$. Donc

$$\delta_{x,y}\delta_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = y = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 16.19 - Matrice élémentaire.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On appelle **matrice élémentaire** $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i,j).

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i. \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

Autrement dit, $E_{i,j} = (\delta_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$.

Proposition 16.20 - Décomposition d'une matrice avec des matrices élémentaires.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Démonstration.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ une matrice. On a $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$. □

Exemple 16.21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{1,2} + 4E_{2,1} - E_{2,2}.$$

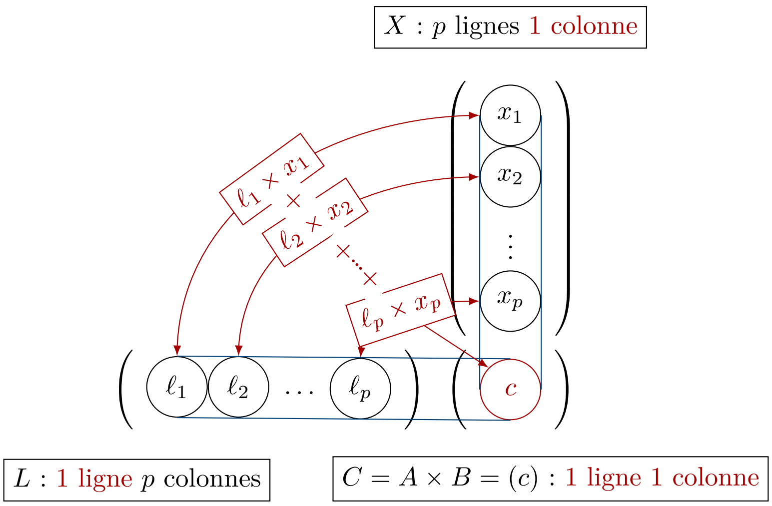
16.2.3 Multiplication matricielle

Définition 16.22 - Multiplication d'une matrice ligne et d'une matrice colonne.

Soit $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. On définit alors le **produit matriciel** LX comme étant $C \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{K})$ dont l'unique coefficient est défini par :

$$c_{1,1} = \sum_{k=1}^{p} \ell_k x_k.$$

En pratique, on pourra poser le calcul comme suit :



Exemple 16.23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-2) + 2 \times (-1) + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ (c'est une matrice de format (1,1)).

Exercice d'application 16.24. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$. Calculer $M = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

➥

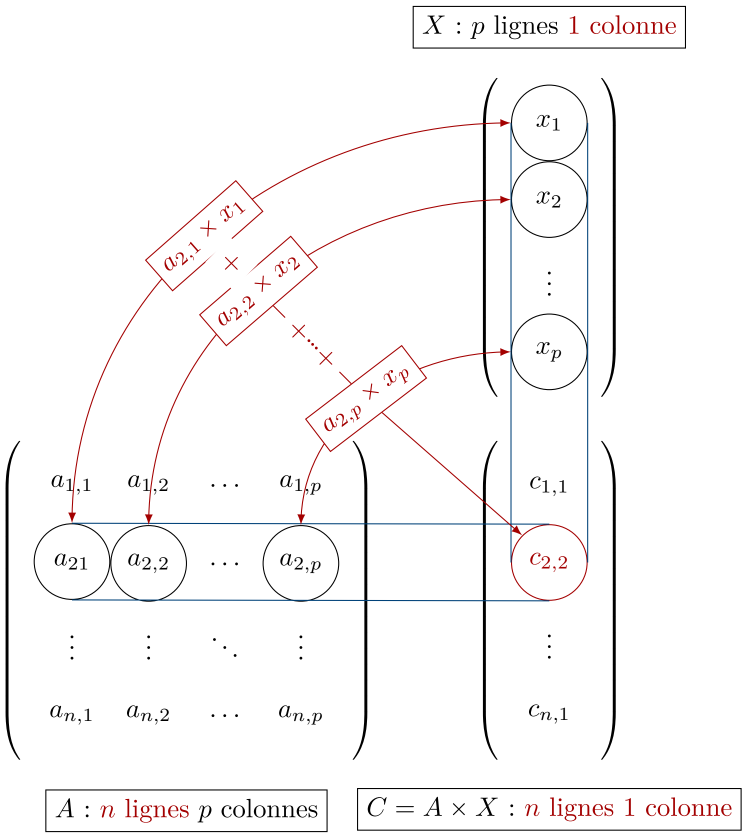
Remarque 16.25. Le résultat du produit d'une matrice ligne par une matrice colonne peut être considéré comme un réel. Le résultat correspond alors au produit scalaire canonique sur $\mathbf{K}^n$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si les coordonnées de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) sont stockées dans la matrice ligne (resp. la matrice colonne).

Définition 16.26 - Produit d'une matrice par une matrice colonne.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. On définit alors le **produit matriciel** AX comme étant la matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont définis par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad c_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k.$$

En pratique, on pourra poser le calcul comme suit :



Remarque 16.27. En particulier, avec les notations de la définition précédente, AX est combinaison linéaire des colonnes de A. En effet, si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A, on a

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j.$$

Exemple 16.28. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}.$

Exercice d'application 16.29. Calculer le produit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

➥

Définition 16.30 - Produit de deux matrices.

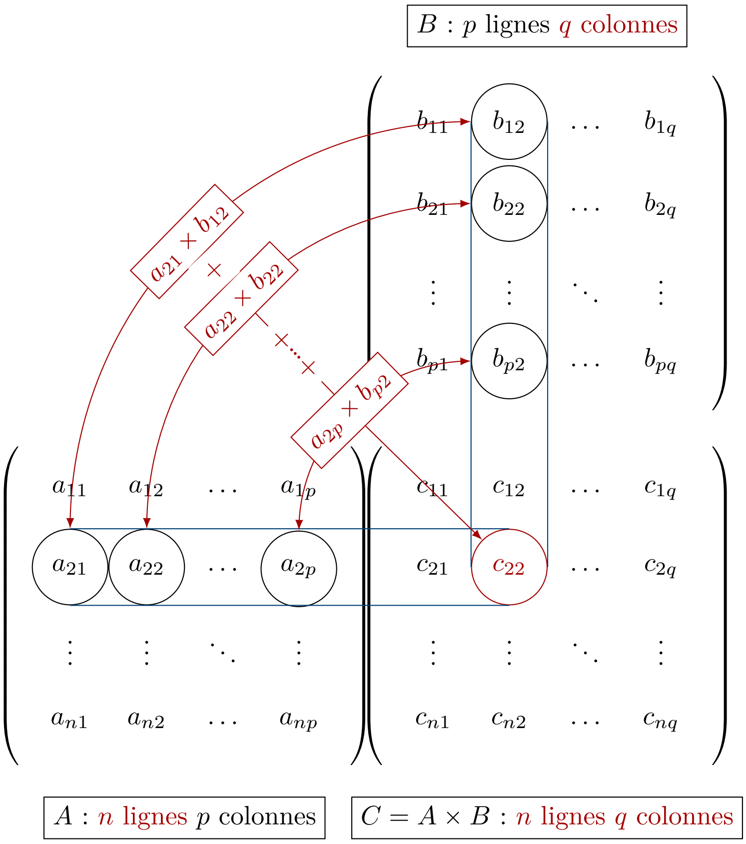
Soit $(n,p,q) \in (\mathbf{N}^\star)^3$, $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de sorte que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (c'est pour cette raison que l'indice de colonne de A est le même que l'indice de ligne de B). On définit alors le **produit matriciel** AB comme étant la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont définis par :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

ATTENTION

Le produit AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
Le cas échéant, le produit AB de A par B a le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de B.

En pratique, on pourra poser le calcul comme suit :



Exemple 16.31. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -11 \\ -1 & -9 & 37 \end{pmatrix}$

Exercice d'application 16.32. Dans chaque cas, calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$ si c'est possible.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

➥

Remarque 16.33. Les colonnes de la matrice $A \times B$ sont le produit de A avec les colonnes de B.

Exemple 16.34 (☕). On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4, \quad E_{i,k} \times E_{\ell,j} = \delta_{k,\ell} E_{i,j}.$$

En effet, fixons $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$.

- Les lignes de $E_{i,k}$ sont nulles, sauf la i-ième. Donc les lignes de $E_{i,k} \times E_{\ell,j}$ sont nulles, sauf peut-être la i-ième.
- Les colonnes de $E_{\ell,j}$ sont nulles, sauf la j-ième. Donc les colonnes de $E_{i,k} \times E_{\ell,j}$ sont nulles, sauf peut-être la j-ième.
- Le seul coefficient qui peut être non nul est donc en position (i, j), et c'est le produit de la i ième ligne de $E_{i,k}$ et de la j-ième colonne de $E_{\ell,j}$. Il vaut donc 1 si $k = \ell$ et 0 sinon.

Proposition 16.35 - Propriétés usuelles du produit matriciel.

Soit $(n, p, q, r) \in (\mathbf{N}^\star)^4$. Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. Associativité : $(AB)C = A(BC)$. On écrira dorénavant ABC une de ces opérations.
2. Associativité : $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
3. Distributivité : $A(B + B') = AB + AB'$.
4. Distributivité : $(A + A')B = AB + A'B$.
5. Existence d'un neutre à gauche et à droite : $I_n \times A = A = A \times I_p$.
6. $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} = 0_{n,p} \times B$.

Remarque 16.36. Les propriétés **2.**, **3.**, **4.** assurent que le produit matriciel est bilinéaire. Nous reviendrons sur cette notion plus tard dans l'année.

Démonstration.

ATTENTION

Il faut être très prudent avec le produit matriciel : les règles du produit sur $\mathbf{K}$ ne s'appliquent pas toutes aux matrices. On retiendra en particulier que :

- **le produit n'est pas intègre** : on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- **le produit matriciel n'est pas commutatif** : en général, $AB \neq BA$, même si les deux produits sont

bien définis (ce qui n'est pas toujours le cas !).

Exemple 16.37. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

Exemple 16.38 (♥). Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. La matrice $0_{n,n}$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $0 \times A = A \times 0$.

16.2.4 Transposition

Définition 16.39 - Matrice transposée.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La **transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ notée $A^\top$ dont le coefficient de position (i,j) est $a_{j,i}$.

Les éléments de le i-ème ligne de $A^\top$ sont donc les éléments de la i-ème colonne de A et vice-versa.

Exemple 16.40.

- Si $A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & \pi & -6\end{pmatrix}$, alors $A^\top = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & \pi\\ 1 & -6\end{pmatrix}$
- ${I_n}^\top = I_n$.
- La transposée d'une matrice-ligne est une matrice-colonne et vice-versa.

Proposition 16.41 - Propriétés usuelles de la transposition.

Soit $(n,p,q) \in \mathbf{N}^3$.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \left(A^\top\right)^\top = A$.
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad (\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}), \quad (AB)^\top = B^\top \times A^\top$.

Démonstration.

ATTENTION

Attention à l'ordre quand vous transposez un produit !

16.3 Pivot de Gauss sur des matrices

16.3.1 Opérations élémentaires

Définition 16.42 - Opérations élémentaires sur les lignes.

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** d'une matrice toute opération d'un des trois types suivants.

1. Échange de deux lignes i et j (**transposition**), qu'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne i par un nombre non nul $\alpha \in \mathbf{K}^\star$ (**dilatation**), qu'on note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
3. Ajout à une ligne i un multiple $\beta \in \mathbf{R}$ d'une autre $j \neq i$ (**transvection**), qu'on note $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.

Si A et B sont deux matrices où B est obtenue à partir de A après une ou plusieurs opérations élémentaires sur les lignes, on dit que A et B sont **équivalentes par lignes**. On notera $A \underset{L}{\sim} B$.

Exemple 16.43. On notera par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2 \end{array} \quad \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3/2$$

Définition 16.44 - Opérations élémentaires sur les colonnes.

On appelle **opération élémentaire sur les colonnes** d'une matrice toute opération d'un des trois types suivants.

1. Échange de deux colonnes i et j (**transposition**), qu'on note $C_i \leftrightarrow C_j$.
2. Multiplication d'une ligne i par un nombre non nul $\alpha \in \mathbf{K}^\star$ (**dilatation**), qu'on note $C_i \leftarrow \alpha C_i$.
3. Ajout à une ligne i un multiple $\beta \in \mathbf{R}$ d'une autre $j \neq i$ (**transvection**), qu'on note $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$.

Si A et B sont deux matrices où B est obtenue à partir de A après une ou plusieurs opérations élémentaires sur les lignes, on dit que A et B sont **équivalentes par colonnes**. On notera $A \underset{C}{\sim} B$.

Définition 16.45 - Matrice de dilatation.

Soit $\alpha \in \mathbf{K}^\star$. On appelle **matrice de dilatation** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ toute matrice de la forme

$$D_i(\alpha) = I_n - (1-\alpha)E_{i,i} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ i \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Multiplier à gauche (resp. à droite) par $D_i(\alpha)$ revient à faire l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i$).

Définition 16.46 - Matrice de transposition.

On appelle **matrice de transposition** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ toute matrice de la forme

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{array}{c@{}c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad\quad\quad \uparrow \quad\quad\quad \uparrow \\ \quad\quad\quad\quad i \quad\quad\quad\; j \end{matrix} & \end{array}$$

Multiplier à gauche (resp. à droite) par $P_{i,j}$ revient à faire l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$).

Définition 16.47 - Matrice de transvection.

Soit $\beta \in \mathbf{K}$. On appelle **matrice de transvection** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ toute matrice de la forme

$$T_{i,j}(\beta) = I_n + \beta E_{i,j} = \begin{array}{c@{}c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \beta & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad\quad\quad\quad \uparrow \\ \quad\quad\quad\quad\quad j \end{matrix} & \end{array}$$

Multiplier à gauche (resp. à droite) par $T_{i,j}(\beta)$ revient à faire l'opération $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$).

Exemple 16.48. Le calcul de l'exemple précédent peut donc s'écrire comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{L_3 \leftarrow L_3/2} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

16.3.2 Systèmes linéaires et matrices

Dans ce paragraphe, on considère le système linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$.

Définition 16.49 - Matrices associées à un système linéaire.

- Les matrices $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont respectivement appelées **matrice associée à** (S) et **matrice associée au second membre de** (S).
- On appelle **matrice augmentée associée à** (S) la matrice $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$.

La matrice augmentée associée à un système linéaire contient toutes les informations sur le système linéaire : donner le système ou sa matrice associée revient au même. En particulier, on pourra faire des pivots de Gauss directement sur la matrice augmentée pour résoudre des systèmes linéaires (ce qui permet d'écrire un peu moins).

Exemple 16.50. Résolvons $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 2 \end{array}\right.$. On applique l'algorithme de réduction de Gauss à la matrice augmentée associée au système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -5 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 5L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 12L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{22} & 0 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{22} & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{22} & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 22L_1 + 9L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow 22L_3 - 6L_2 \\ L_4 \leftarrow 22L_4 + L_2 \end{array}$$

On a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} 22x_1 & = & 28 \\ 22x_4 & = & -14 \\ 22x_3 & = & -4 \\ 22x_2 & = & 8 \end{array}\right.$$

et on obtient que l'unique solution du système est $\left(\frac{14}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{-2}{11}, \frac{4}{11}\right)$.

Exercice d'application 16.51. Résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ x + y + z & = & 1 \\ 2x + 3y + 4z & = & 5 \end{array}\right.$$

➥

Proposition 16.52 - Lien entre matrice associée et système linéaire.

On note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

De plus, on se donne $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbf{K}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$(x_1, ..., x_p) \text{ est solution de } (S) \iff AX = B.$$

Démonstration.

On a en effet $AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$ et deux matrices sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. □

Exemple 16.53. Considérons $\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 2y - 3z &= 0 \\ x + y - z &= -2 \end{cases}$. L'équation matricielle associée à ce système linéaire est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 16.54. Une équation matricielle $AX = B$ est parfois appelée système linéaire par abus de langage.

Le vocabulaire sur les systèmes linéaires reste valable pour les équations du type $AX = B$.

Définition 16.55 - Système homogène, compatible.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

1. Le système $AX = B$ est dit **compatible** lorsqu'il admet au moins une solution.
2. Un système est dit **homogène** lorsque $B = 0$.
3. On appelle **système homogène associé** à $AX = B$ le système $AX = 0$.

Proposition 16.56 - CNS pour qu'un système soit compatible.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si la matrice colonne B est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

Démonstration.
On a déjà vu que le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. □

Proposition 16.57 - Structure de l'ensemble des solutions.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On suppose que le système linéaire $AX = B$ est compatible. Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé à $AX = B$ ainsi que X_p une solution (particulière) de $AX = B$. Alors l'ensemble des solutions de $AX = B$ est

$$\{X_0 + X_p \,:\, X_0 \in \mathcal{S}_H\}.$$

Démonstration.

16.4 Les matrices carrées

16.4.1 Matrices triangulaires supérieures ou inférieures, diagonales

Définition 16.58 - Matrices triangulaires.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est :

- **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i > j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}.$$
Les $*$ désignent ici des scalaires, c'est-à-dire des éléments de $\mathbf{K}$, quelconques (éventuellement nuls).
- **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i < j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$

Définition 16.59 - Matrice diagonale, matrice scalaire.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est :

- **diagonale** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Cette matrice se note parfois $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
- **scalaire** s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda) = \lambda I_n$.

Remarque 16.60. Une matrice est diagonale si et seulement si elle est à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.

Exemple 16.61. $I_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.

Exercice d'application 16.62. Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale ou scalaire.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

➥

Proposition 16.63 - Opérations sur les matrices triangulaires.

Soit $(A, B, \lambda) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2 \times \mathbf{K}$.

1. Si A et B sont triangulaires supérieures, alors $A + B$, λA et AB le sont aussi.
2. Si A et B sont triangulaires inférieures, alors $A + B$, λA et AB le sont aussi.

Démonstration.

Corollaire 16.64 - Opérations sur les matrices diagonales.

Soit $(A, B, \lambda) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2 \times \mathbf{K}$.
Si A et B sont diagonales, alors $A + B$, λA et AB le sont aussi.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la proposition précédente puisqu'une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. □

16.4.2 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition 16.65 - Matrice symétrique, matrice antisymétrique.

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite :

1. **symétrique** lorsque $A^\top = A$;
2. **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Remarque 16.66. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. A est symétrique si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
A est antisymétrique si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} = 0$ et pour $j \neq i$, $a_{j,i} = -a_{i,j}$. En particulier, les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nécessairement nuls.

Exemple 16.67. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -\mathrm{e} \\ -12 & 0 & -i \\ \mathrm{e} & i & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Proposition 16.68 - Stabilité par somme et par produit externe.

La somme de deux matrices symétriques (resp. antisymétriques) de même taille est une matrice symétrique. Le produit d'une matrice symétrique (resp. antisymétrique) par un scalaire (c'est-à-dire un élément de $\mathbf{K}$) est symétrique (resp. antisymétrique).

Démonstration.

ATTENTION

Le produit de deux matrices symétriques (resp. antisymétriques) peut ne pas être symétrique (resp. antisymétrique), comme le montre l'exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16.4.3 Puissance d'une matrice carrée

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on notera $A^2 = A \times A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $A^3 = A \times A \times A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, etc. On peut itérer et définir les puissances de A.

Définition 16.69 - Puissances d'une matrice carrée.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On pose $A^0 = I_n$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad A^{k+1} = A^k \times A.$$

On pourra retenir :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Remarque 16.70. On a aussi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^{k+1} = A \times A^k$.

Exercice d'application 16.71. Calculer A^3 où $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

➥

Proposition 16.72 - Cas des matrices diagonales.

Soit $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n} \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
Notons $A = (a_{i,j})$ (avec par hypothèse $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons H_k : « $A^k = \mathrm{diag}(a_{1,1}^k, ..., a_{n,n}^k)$ ».
H_0 est vraie puisque $A^0 = I_n$ par définition et $\mathrm{diag}(a_{1,1}^0, \dots, a_{n,n}^0) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1) = I_n$.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que H_k soit vraie. On a

$$A^{k+1} = A \times A^k.$$

Notons $B = A^k = (b_{i,j})$ et $C = A^{k+1} = (C_{i,j})$. Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'après H_k, $b_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $b_{i,i} = a_{i,i}^k$. De plus, d'après le Corollaire 16.64, $c_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Enfin,

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i} = a_{i,i} a_{i,i}^k = a_{i,i}^{k+1}.$$

Donc $A^{k+1} = \mathrm{diag}(a_{1,1}^{k+1}, a_{2,2}^{k+1}, \dots, a_{n,n}^{k+1})$, ce qui prouve que H_{k+1} est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k = \mathrm{diag}(a_{1,1}^k, ..., a_{n,n}^k)$. □

Définition 16.73 - Matrices qui commutent.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Proposition 16.74 - Exemples de matrices qui commutent.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit $j, k \in \mathbf{N}$.

1. A commute avec toute matrice scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En particulier, A commute avec I_n.
2. Si A et B commutent, alors A^j et B^k commutent. En particulier, A et A^k commutent.

Démonstration.

Proposition 16.75 - Formule du binôme pour les matrices.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que A et B commutent. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

Démonstration.

ATTENTION

Les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ne commutent pas toujours, donc on ne peut appliquer pas toujours la formule du binôme de Newton. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On a :

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

mais on ne peut pas toujours regrouper AB et BA ensemble !

Exercice d'application 16.76. ♥ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Développer $(\lambda I_n + A)^N$ (vous écrirez les trois « premiers » termes de la somme et les deux « derniers »).

➥

Exemple 16.77. Voici à quoi ressemble un exercice type pour calculer une puissance n-ième de matrice à l'aide de la formule du binôme de Newton. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $T = A - 2I_3$.

1. Calculons T^2 et en déduire T^k pour tout $k \in \mathbf{N}$. On a

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad T^2 = 0$$

donc $T^0 = I_3$, $T^1 = T$ et pour tout $k \geqslant 2$, $T^k = 0$.

2. Puisque les matrices $2I_3$ et T commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton matricielle

$$\begin{aligned}
A^n &= (2I_3 + T)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (2I_3)^{n-k} && \text{on met la puissance } n-k \text{ sur le terme diagonal} \\
&= \binom{n}{0} T^0 \times (2I_3)^n + \binom{n}{1} T^1 \times (2I_3)^{n-1} + 0 + \dots && \text{car } T^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 2 \\
&= I_3 \times 2^n I_3^n + nT \times (2I_3)^{n-1} \\
&= 2^n I_3 + n2^{n-1} T I_3 && \text{car } I_3^n = I_3,\ I_3^{n-1} = I_3 \text{ et } I_3 \times I_3 = I_3 \\
&= 2^n I_3 + n2^{n-1} T && \text{car } TI_3 = T
\end{aligned}$$

Finalement,

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 16.78. On considère la matrice $T = D + N$, où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, T^n.

➥

Exemple 16.79 (*Application du calcul de puissances à l'étude d'un système de suites récurrentes*). On considère les suites u, v et w définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $w_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 2w_n \end{cases}$$

- Si on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = TX_n$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Montrons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « $X_n = T^n X_0$ ». On a $T^0 X_0 = I_n X_0 = X_0$ donc H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. On a

$$X_{n+1} = TX_n = TT^n X_0 = T^{n+1} X_0$$

donc H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence assure finalement que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = T^n X_0$.

- Or on peut calculer (avec la formule du binôme de Newton par exemple) que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$X_n = T^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} \\ 2^{n+1} - n2^{n-1} \\ -2^n \end{pmatrix}.$$

- Finalement, $u_n = 2^n - n2^{n-1}$, $v_n = 2^{n+1} - n2^{n-1}$ et $w_n = -2^n$.

16.5 Matrices carrées inversibles

16.5.1 Présentation

Définition 16.80 - Matrice inversible.

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices inversibles s'appelle le **groupe linéaire** d'ordre n et il est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

ATTENTION

Pour être inversible, une matrice doit d'abord être carrée !!

Proposition 16.81 - Inverse d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est inversible, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Cette matrice est appelée **inverse** de A et est notée A^{-1}.

Démonstration.

Proposition 16.82 - Caractérisation de l'inverse à l'aide d'un seul produit.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB = I_n$, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $A^{-1} = B$.
2. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $BA = I_n$, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $A^{-1} = B$.

Démonstration.
Admis pour le moment. □

Exemple 16.83 (♥). $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $I_n^{-1} = I_n$. En effet, $I_n \times I_n = I_n$.

Exercice d'application 16.84. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

➥

Proposition 16.85 - Principales propriétés des matrices inversibles.

Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, soit $\lambda \in \mathbf{K}^\star$.

1. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (attention à l'ordre !).
3. $\lambda A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.
4. $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration.

Lemme 16.86 - Matrice avec un pivot par ligne et par colonne.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que si on fait un pivot de Gauss sur la matrice A, on peut choisir un pivot par ligne et par colonne. Alors $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Démonstration.
Supposons qu'on ait exécuté l'algorithme de Gauss et qu'il y a un pivot par ligne et par colonne à la fin. En échangeant des lignes, on peut se ramener à une matrice diagonale et en divisant les lignes par les valeurs des pivots, on peut se ramener à I_n. □

Théorème 16.87 - Caractérisation de l'inversibilité.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

(ii) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n,1} \Longrightarrow X = 0_{n,1}$.

(iii) $A \underset{L}{\sim} I_n$.

(iv) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ admet une unique solution.

(v) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ admet au moins une solution.

Démonstration.
On montre que **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)** pour commencer.

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que $AX = 0_{n,1}$. On a $A^{-1}AX = A0_{n,1}$, d'où $I_nX = 0_{n,1}$ puis $X = 0_{n,1}$.
- **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iii)**. L'assertion **(ii)** entraîne que le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution, donc si on fait un pivot de Gauss sur la matrice A, il n'y aura pas de colonne sans pivot (sans quoi il y aurait une inconnue secondaire donc une infinité de solutions) donc il n'y a pas non plus de ligne sans pivot (car A est une matrice carrée). Le lemme précédent donne $A \underset{L}{\sim} I_n$.
- **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Si le système est équivalent par lignes à I_n, il existe E un produit de matrices élémentaires tel que $EA = I_n$. On en déduit que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ (et au passage $A^{-1} = E$).

Montrons pour conclure **(i)** $\Longrightarrow$ **(iv)** $\Longrightarrow$ **(v)** $\Longrightarrow$ **(iii)**.

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(iv)**. Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors $A \times A^{-1}B = B$, donc $A^{-1}B$ est solution de l'équation $AX = B$.
- **(iv)** $\Longrightarrow$ **(v)**. Évident.
- **(v)** $\Longrightarrow$ **(iii)**. Si l'équation $AX = B$ admet une solution pour tout B que la matrice augmentée associée au système ne contient pas de ligne de zéros. En particulier, un pivot a pu être choisi pour chaque ligne, donc aussi pour chaque colonne (car A est une matrice carrée). On a donc $A \underset{L}{\sim} I_n$. □

16.5.2 Calcul pratique de l'inverse par résolution d'un système

Lemme 16.88.

Soit $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Si, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ on a $MY = NY$, alors $M = N$.

Démonstration.
Posons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$Y_i = E_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i. \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

La relation $MY_i = NY_i$ donne l'égalité de la i-ième colonne de M et de la i-ième colonne de N. Ainsi, toutes les colonnes étant égales, on peut conclure que $M = N$. □

Méthode 16.89. *Calculer l'inverse d'une matrice par résolution d'un système*

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Pour déterminer si A est inversible et obtenir son inverse, on peut chercher à résoudre $AX = B$ avec B quelconque. Si le système n'admet pas toujours de solution, on a vu que cela entraînait que A n'est inversible. Sinon, A est inversible et la solution fournit l'inverse : il faut trouver (en pratique on la lit simplement) une matrice C telle que $X = CB$. Comme on sait aussi que $X = A^{-1}B$, on obtient $A^{-1}B = CB$ et le lemme précédent donne $A^{-1} = C$.

Exercice d'application 16.90. Déterminer les si matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

sont inversibles et dans le cas échéant donner leurs inverses.

➥

16.5.3 Calcul pratique à l'aide d'opérations élémentaires

Proposition 16.91 - Inversibilité des matrices élémentaires.

Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont toutes inversibles. Plus précisément, si $\alpha \in \mathbf{K}^\star$, $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\beta \in \mathbf{K}$ alors :

1. $D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$; **2.** $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$; **3.** $T_{i,j}(\beta)^{-1} = T_{i,j}(-\beta)$.

Démonstration.
Le produit $D_i(\alpha)D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)I_n$ revient à multiplier par $\frac{1}{\alpha}$ puis par α la i-ième ligne de I_n, donc $D_i(\alpha)D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) = I_n$ ce qui prouve que $D_i(\alpha)$ est inversible et $D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Les autres point se prouvent de la même manière. □

En particulier, puisqu'un produit de matrice inversible est inversible, multiplier une matrice inversible par des matrices élémentaires conserve sont inversibilité.

Méthode 16.92. *Calcul pratique de l'inverse d'une matrice*

Pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss. On écrit à gauche la matrice A, et à droite la matrice I_n. On applique l'algorithme du pivot sur A pour la réduire à I_n. On fait les mêmes opérations sur la matrice de droite. À la fin, on doit donc avoir I_n à gauche. La matrice à droite est l'inverse de A.

$$
\begin{array}{cc|c}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^{I_n} \\
\underset{L}{\sim} & \vdots & \vdots \\
\underset{L}{\sim} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{I_n} & \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}
\end{array}
$$

Cette méthode permet aussi de démontrer qu'une matrice n'est pas inversible : si à la fin de l'algorithme de réduction de Gauss on n'a pas pu choisir n pivots, c'est que la matrice A n'est pas inversible.

Les calculs de la colonne de gauche dans la méthode précédente assurent qu'il existe un produit de matrices élémentaires tel que $EA = I_n$, donc A est inversible et son inverse est E. Dans la colonne de droite, on fait alors le calcul $EI_n = E$, c'est pourquoi on y lit A^{-1}.

Exemple 16.93. On veut inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On commence par appliquer la méthode de Gauss en choisissant les pivots les plus intéressants.

$$
\begin{array}{cc|cl}
 & \begin{pmatrix} -2 & 3 & \boxed{1} \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} -2 & 3 & \boxed{1} \\ 7 & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 7 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{7} & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{7} \\ \boxed{7} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-7} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -7 & 21 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 7L_1 - 7L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_2 \end{array} \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-7} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & -7 & 21 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{array} \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/7 \\ L_2 \leftarrow L_2/(-7) \\ L_3 \leftarrow L_3/7 \end{array}
\end{array}
$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque 16.94. La colonne gauche du calcul précédent peut s'écrire :

$$
\begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I_n
$$

et la colonne de droite :

$$
\begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}
$$

d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

16.5.4 Inversion de matrices diagonales, triangulaires

Proposition 16.95 - Inversibilité d'une matrice diagonale.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale. A est inversible si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. Le cas échéant,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,i} = 0$, alors pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que $X = E_{i,1}$ (tous les coefficients de cette matrice colonne sont nuls sauf le i-ième), on a $AX = 0$. Le Théorème 16.87 assure alors que A n'est pas inversible.
Supposons que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. On vérifie aisément que $\operatorname{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \times \operatorname{diag}(a_{1,1}^{-1}, \dots, a_{n,n}^{-1}) = I_n$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 16.96 - Inversibilité d'une matrice triangulaire.

Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont toujours non nuls. Le cas échéant, l'inverse est encore une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure. On note $A = (a_{i,j})$. Montrons, à l'aide d'une récurrence finie sur les lignes, qu'il existe un produit E de matrice de transvection triangulaires supérieures telles que $A = E \times \operatorname{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$.
  Posons, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, H_j : « il existe un produit E de matrices de transvection triangulaires supérieures tel que $EA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{j,j} & \star & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{j+1,j+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ ».
  La matrice A est triangulaire supérieure, donc H_1 est vraie (on choisit $E = I_n$).
  Soit $j \in [\![1,n-1]\!]$ tel que H_j soit vraie. Avec des opérations sur les lignes, on peut annuler tous les coefficients au dessus de $a_{j+1,j+1}$: seules des matrices de transvections triangulaires supérieures sont utiles (puisque les coefficients à annuler sont au dessus de $a_{j+1,j+1}$), donc H_{j+1} est vraie. Le principe de récurrence permet alors de conclure que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, H_j est vraie.
  En particulier, H_n est vraie, donc il existe un produit E de matrice de transvection triangulaires supérieures tel que $EA = \operatorname{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$.
  - Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors cette matrice EA est inversible et son inverse est une matrice diagonale D d'après la Proposition 16.95. Ainsi, $DEA = I_n$. Cela montre que A est inversible et que son inverse est DE. Or E est un produit de matrices triangulaires supérieures, donc elle est triangulaire supérieure, puis DE est triangulaire supérieure. On a donc obtenu que l'inverse de A est triangulaire supérieure.
  - Si un coefficient diagonal est nul, alors EA n'est pas inversible d'après la Proposition 16.95 donc A ne l'est pas non plus (si A l'était, comme $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ on aurait $EA \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ puisqu'un produit de matrices inversibles est inversible). □

Questions de cours

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Définir la matrice identité de taille n.

2. Soit $n, p \in \mathbf{N}^\star$, $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. Définir la matrice élémentaire $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

3. Soit $n, p, q \in \mathbf{N}^\star$, $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Posons $C = AB$ et notons $C = (c_{i,k})$. Compléter :
$$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!], \quad c_{i,k} =$$

4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définir la transposée de A.

5. Énoncer la formule donnant la transposée d'un produit.

6. Donner le lien entre matrice associée et système linéaire (savoir passer d'un système d'équations linéaires à une équation matricielle sur un exemple concret ; ou l'inverse).

7. Définir la notion de matrice triangulaire supérieur (resp. inférieure), diagonale.

8. Définir la notion de matrice symétrique, antisymétrique.

9. Expliquer comment calculer les puissances d'une matrice diagonale.

10. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

11. Donner la définition de matrice inversible.

12. Écrire les formules donnant l'inverse d'un produit de matrice et l'inverse de la transposée d'une matrice.

13. Expliquer comment calculer l'inverse d'une matrice diagonale.

14. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice triangulaire soit inversible.