CHAPITRE 15 SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

15.1 Généralités sur les suites réelles

15.1.1 Suites réelles : définition et notations

Définition 15.1 - Suite réelle.

Une **suite réelle** est une famille de nombres réels indexée par $\mathbf{N}$, c'est-à-dire une application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

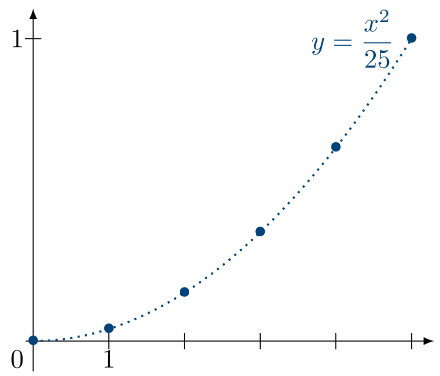
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé **terme général** (ou n-ième terme de la suite, ou terme d'indice n, ou terme de rang n) de la suite.
La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
On note $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbf{N}$.

Remarque 15.2. Une suite réelle de terme général u_n peut aussi être indexée par les nombres entiers naturels supérieurs à un entier n_0. Une telle suite est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. L'étude d'une telle suite est identique à celle d'une suite indexée par $\mathbf{N}$.

On peut définir une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de plusieurs manières différentes.

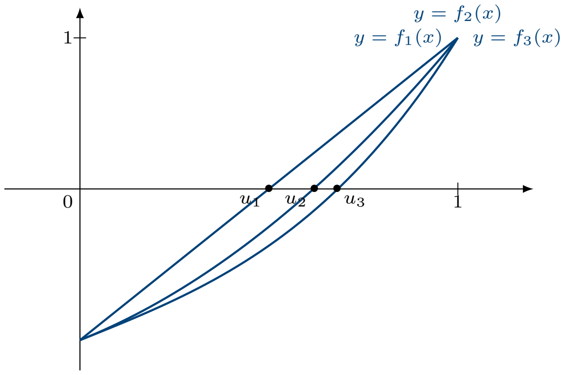
1. Suite définie de manière **explicite**. Chacun des termes de la suite est donné en fonction de n.

   Exemple 15.3. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{25}$. Cette suite est définie de manière explicite. On peut la représenter directement (comme on tracerait un graphe de fonction, en ne conservant que les abscisses entières) :



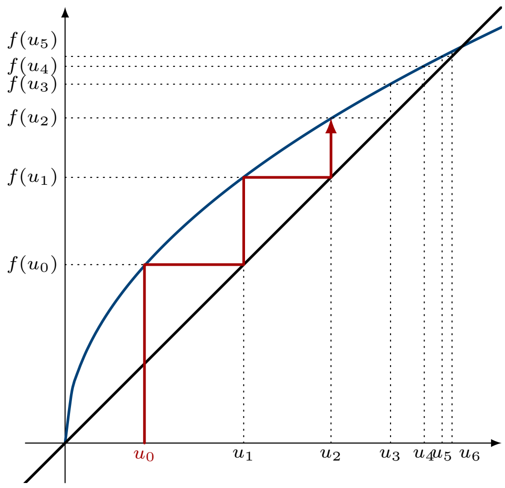
2. Suite définie de de manière **implicite**. Tous les termes de la suite sont correctement définis comme vérifiant une certaine propriété, mais on ne dispose pas de la valeur explicite de chacun de ses termes (souvent le terme général est défini comme l'unique solution d'une équation donnée).

   Exemple 15.4. On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, la fonction $f_n : x \longmapsto x^n + x - 1$ ainsi que l'équation $(E_n) : f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0\,;1[$. On peut montrer, avec le théorème de la bijection, que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'équation (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;1[$, qu'on note u_n. On construit ainsi une suite implicite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$. u_1 est donc la solution de l'équation $2x - 1 = 0$, u_2 la solution de $x^2 + x - 1 = 0$, u_3 la solution de $x^3 - x + 1 = 0$. On peut déterminer u_1 et u_2, par contre les termes à partir de u_3 sont difficiles à calculer !
   On peut résoudre les différentes équations graphiquement pour obtenir un « tracer » de la suite.

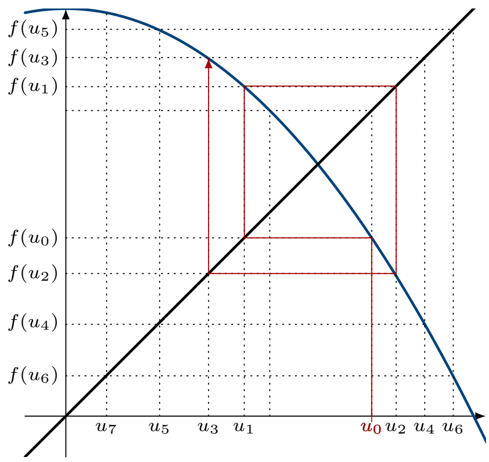


3. Suite définie par une relation de **récurrence**. On définit explicitement le (ou les) premier(s) terme(s) de la suite puis chaque terme de la suite est défini à l'aide du (ou des) précédent(s).

Exemple 15.5. On considère la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{5}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. On peut calculer les termes de cette suite successivement. $u_1 = \sqrt{u_0} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 5^{-1/2}$, $u_2 = \sqrt{5^{-1/2}} = 5^{-1/4}$, etc. On peut aussi obtenir les premiers termes graphiquement, en s'aidant de la première bissectrice pour reporter les valeurs de la suite sur l'axe des abscisses.



Exemple 15.6. On a représenté ci-après la suite définie par $u_0 = \dfrac{3}{4}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.



ATTENTION

Pour définir une suite par une relation de récurrence, il y a tout de même des précautions à prendre : il se peut que la donnée d'un premier terme et d'une relation de récurrence ne définissent pas correctement une suite.

Par exemple, en posant $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$, on ne définit pas correctement la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: on aurait $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = 1$ et u_4 n'est pas défini !

Exercice d'application 15.7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1}$. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n > 0$, $u_n > 0$.

➥

15.1.2 Opérations sur les suites

Définition 15.8 - Opérations sur les suites.

Soit u, v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbf{R}$.

- La **somme** de u et v est la suite notée $(u + v)$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (u + v)_n = u_n + v_n.$$

- La **multiplication interne** de u et v est la suite notée $(u \times v)$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$

- La **multiplication externe** de u par λ est la suite notée $\lambda \cdot u$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (\lambda \cdot u)_n = \lambda \cdot u_n.$$

15.1.3 Suites réelles et relation d'ordre

Définition 15.9 - Suite croissante, décroissante, constante.

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

- **croissante** (resp. **décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$) ;
- **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) ;
- **(strictement) monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante ;
- **constante** si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n$ (ce qui équivaut à $u_n = u_0$), c'est-à-dire si u est à la fois croissante et décroissante.

Méthode 15.10. *Étudier la monotonie d'une suite*

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la principale méthode consiste à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n > 0$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors u est constante ;
- si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n < 0$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Notons tout de même que lorsque le terme général u_n s'écrit sous forme d'un produit ou d'un quotient de termes strictement positifs, on peut, au lieu d'étudier le signe de différence, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

- si $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n > 1$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1}/u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est constante ;
- si $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n < 1$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Exercice d'application 15.11. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1.$$

➥

Exercice d'application 15.12. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \frac{(n+3)!}{2^n}.$$

➥

Définition 15.13 - Propriété vraie à partir d'un certain rang.

On dit qu'une suite u satisfait une propriété $\mathcal{P}(n)$ **à partir d'un certain rang** s'il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que,

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple 15.14. La suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (n-2)^2$ est croissante à partir du rang 2.

Définition 15.15 - Suite stationnaire.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = u_n.$$

Exemple 15.16. La suite $\left(\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est une suite stationnaire : elle est contante égale à 0 à partir du rang 2.

Définition 15.17 - Suite majorée, minorée, bornée.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

- **majorée** si elle vérifie
$$\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant M\ ;$$
- **minorée** si elle vérifie
$$\exists m \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geqslant m\ ;$$
- **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à vérifier une des deux conditions équivalentes suivantes :

  (i) $\exists m \in \mathbf{R},\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M.$ **(ii)** $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$

Démonstration.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors il existe des réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. Posons $K = \max(|m|, |M|)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant u_n \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K$$

donc $|u| \leqslant K$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Alors u est minorée par $-M$ et majorée par M. □

Exemple 15.18. Une suite positive est une suite minorée par 0. Elle est également minorée par n'importe quel nombre négatif non nul.

Exercice d'application 15.19. ♥ Démontrer qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

➥

Exercice d'application 15.20. Démontrer que l'ensemble des suites bornées est stable par somme, produit (ce qui signifie que la somme, resp. le produit, de deux suites bornées est bornée) et produit par un réel (ce qui signifie le produit par un réel d'une suite bornée est borné).

➥

ATTENTION

Un majorant ne dépend jamais de n ! On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^2 \leqslant n$ et pourtant n^2 n'est pas une suite majorée.

15.2 Limites des suites réelles

15.2.1 Limite finie d'une suite réelle

Définition 15.21 - Suite convergente.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

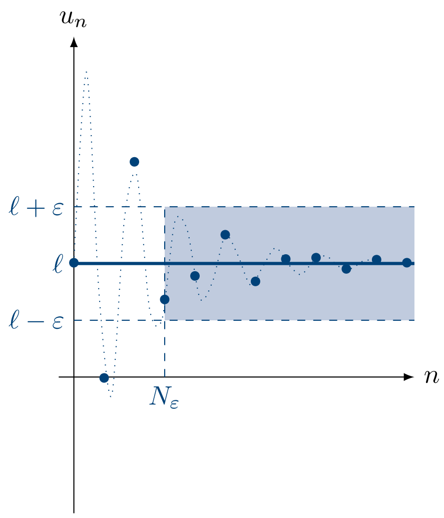
On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite **convergente** et le réel ℓ est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On note alors :

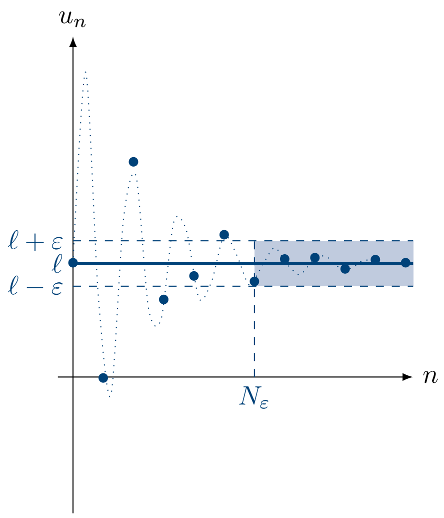
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.
La **nature** d'une suite est son caractère convergent ou divergent.

L'assertion de la définition signifie qu'au delà du rang N_ε (qui dépend à priori de ε), tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[\ell - \varepsilon\,;\, \ell + \varepsilon]$.

Intuitivement, u converge vers ℓ si u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ au delà d'un certain rang. Graphiquement, toute bande horizontale centrée sur la droite d'équation $y = \ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.





Exemple 15.22. On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. On veut démontrer, à l'aide de la définition, que u converge vers 1.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$\begin{aligned} |u_n - 1| \leqslant \varepsilon &\Longleftrightarrow \left| -\frac{1}{n+2} \right| \leqslant \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{n+2} \leqslant \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow n+2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Longleftrightarrow n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 2. \end{aligned}$$

On vient d'obtenir que, si on note $N_\varepsilon = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} - 2 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor - 1$, on a pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que u converge vers 1.

Notons que plus ε est petit, plus N_ε est grand : si on veut une approximation plus précise, il faut calculer des termes de rang plus élevé.

Exercice d'application 15.23. Soit $q \in]-1\,;\,1[$ et $u = (q^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Montrer que u converge vers 0.

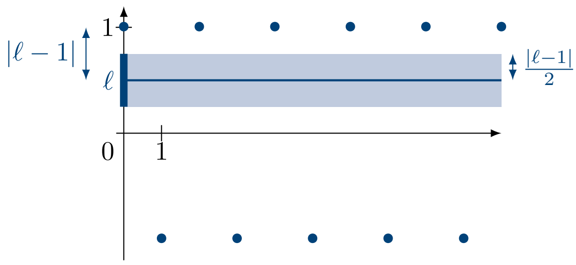
➥

Exemple 15.24. La suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge.

Montrons que, pour tout $\ell \in \mathbf{R}$, u ne converge pas vers ℓ, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

- Cas où $\ell \neq 1$. Considérons $\varepsilon = \dfrac{|\ell - 1|}{2}$, de sorte que $1 \notin]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, si on considère $n = 2N$, on a $|u_n - \ell| > \varepsilon$. On vient de montrer que u ne converge par vers ℓ.



- Cas où $\ell = 1$. Considérons $\varepsilon = 1$, de sorte que $-1 \notin]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, si on considère $n = 2N + 1$, on a $|u_n - \ell| > \varepsilon$. On vient de montrer que u ne converge pas vers ℓ.

Comme u ne converge vers aucun réel, u diverge.

Proposition 15.25 - Unicité de la limite.

La limite ℓ d'une suite convergente est unique.

Démonstration.

15.2.2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 15.26 - Les suites convergentes sont bornées.

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

15.19

ATTENTION

La réciproque de ce résultat est fausse. On a déjà obtenu que $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente, alors qu'elle est bornée par -1 et 1.

Proposition 15.27 - Minoration d'une suite qui converge vers un réel strictement positif.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que u converge vers un réel ℓ.

1. Si $\ell > 0$, u est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.

2. Si $\ell < 0$, u est majorée par un réel $M < 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration.

Remarque 15.28. En particulier, une suite qui converge vers un réel strictement positif (resp. négatif) est strictement positive (resp. négative) à partir d'un certain rang.

Proposition 15.29 - Passage à la limite dans une inégalité.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites convergentes. On suppose que $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que

$$\exists N \in \mathbf{N}_0,\ \forall n \geqslant N_0, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration.

ATTENTION

On retiendra que les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ et pourtant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ (donc on peut seulement affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \geqslant 0$).

15.2.3 Suites qui tendent vers l'infini

Définition 15.30 - Divergence vers l'infini.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. On dit que u **tend vers** $+\infty$ si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \geqslant A.$$

(la suite prend des valeurs aussi grandes que l'on veut). Le cas échéant, on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

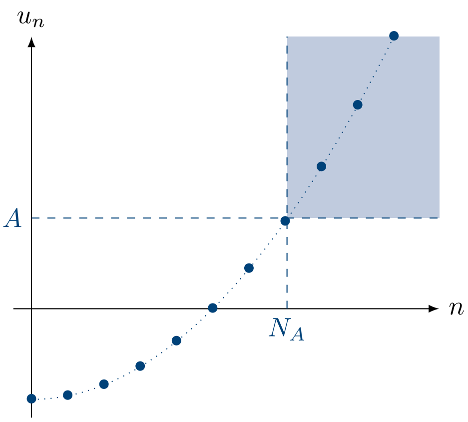
2. On dit que u **tend vers** $-\infty$ si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \leqslant A.$$

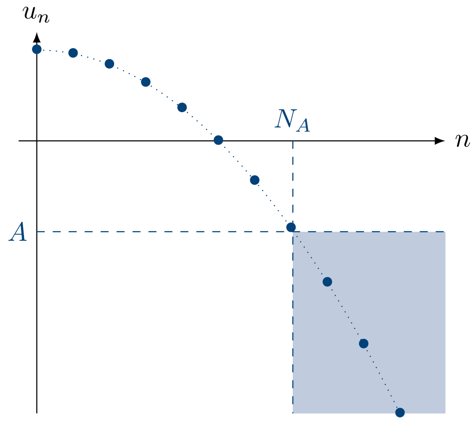
(la suite prend des valeurs aussi petites que l'on veut). Le cas échéant, on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Suite qui diverge vers $+\infty$



Suite qui diverge vers $-\infty$



ATTENTION

Converger, ce n'est pas avoir une limite mais avoir une limite finie. Diverger, ce n'est pas avoir $\pm\infty$ pour limite, mais éventuellement ne pas avoir de limite.

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

Il faut aussi être vigilant avec le symbole lim. On ne peut écrire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ que si on a vérifié avant que la limite existait !

Proposition 15.31 - Majoration, minoration des suites qui tendent vers l'infini.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée par un réel strictement positif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement positive au delà d'un certain rang.
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée par un réel strictement négatif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement négative au delà d'un certain rang.
4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Démonstration.

15.2.4 Opérations sur les limites

On résume dans les tableaux suivants les opérations sur les limites, où $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$. FI signifie « **forme indéterminée** ». Cette expression signifie que la limite peut être réelle, infinie voire ne pas exister. Il y a alors un travail (parfois important) à fournir pour « lever » cette forme indéterminée et calculer la limite (quand on aboutit à une forme indéterminée il ne faut donc surtout pas s'arrêter mais au contraire poursuivre ses efforts ☺).

Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	ℓ
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ℓ
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0	ℓ'
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\ell\times\ell'$

la règle des signes donne le
signe de la limite du produit

Limite d'un inverse

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\ell\neq 0$	0 et $u_n<0$ à partir d'un certain rang	0 et $u_n>0$ à partir d'un certain rang
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration.

Remarque 15.32. On peut condenser ces résultats en travaillant dans $\overline{\mathbf{R}}$ (et les opérations prolongées sur cet ensemble). Considérons deux suites u et v qui tendent vers $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$.

1. Si la forme $\ell_1 + \ell_2$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$.

2. Si la forme $\ell_1\ell_2$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1\ell_2$.

3. Pour tout λ réel non nul, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \ell_1$.

ATTENTION

Attention aux puissances (0^0, $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, etc.), qui sont toutes des formes indéterminées !! Par exemple, $1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et pourtant $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ ne converge pas vers 1 contrairement à ce qu'on pourrait croire (on peut montrer que cette suite tend plutôt vers e, cf. Exercice d'application 15.35). La règle est de systématiquement revenir à la forme exponentielle pour éviter de faire des erreurs.

ATTENTION

Obtenir une forme indéterminée n'est pas une conclusion ! Quand on en obtient une, il faut s'organiser pour la lever !

Quand on a une forme indéterminée, tout est possible ! Par exemple, pour la forme $(+\infty) - (+\infty)$,

- on peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} n + \ell = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+\ell) - n = \ell$.
- on peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - n = +\infty$.
- on peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} n + (-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n + (-1)^n - n = (-1)^n$, on obtient une suite qui n'a pas de limite.

Proposition 15.33 - Composition par une fonction à gauche.

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ un élément ou une extrémité de I (on définira cela en détail un peu plus tard). Soit $L \in \overline{\mathbf{R}}$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à valeurs dans I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Démonstration.
Admis, car la démonstration requiert la notion de limite d'une fonction, que vous connaissez déjà intuitivement mais que l'on définira plus soigneusement plus tard. □

Exercice d'application 15.34. Déterminer la limite de la suite $\left(\ln\left(\dfrac{1}{-\operatorname{Arctan}(n) + \mathrm{e}^{-n} + \pi/2}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

➥

Exercice d'application 15.35. ♥ Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

➥

15.3 Suites extraites

Définition 15.36 - Suites extraites.

On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.

Remarque 15.37. Concrètement, pour former une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on ne prend que certains éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en conservant l'ordre d'apparition de ces termes (ce qui explique que φ soit choisie strictement croissante).

Exemple 15.38. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_{2n}$, est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Plutôt que de changer le nom de suite, on la note souvent $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$. Il faut faire attention, car $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$! La suite (u_{2n+1}) formée des termes impairs de la suite est également souvent utile.

Par contre, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $w_{2k} = u_{2k+1}$ et $w_{2k+1} = u_{2k}$, pour laquelle on a,

$$w_0 = u_1, \quad w_1 = u_0, \quad w_2 = u_3, \quad w_3 = u_2, \quad w_4 = u_5, \quad w_5 = u_4 \ldots$$

n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ car l'ordre d'apparition des termes de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas respecté.

Lemme 15.39.

Soit $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une fonction strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration.

Proposition 15.40 - Limite des suites extraites.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers ℓ.

Démonstration.

Méthode 15.41. *Démontrer qu'une suite n'a pas de limite avec des suites extraites*

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite, on peut trouver deux sous-suites distinctes de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne convergeant pas vers la même limite.

Exemple 15.42 (♥). On peut démontrer très simplement que la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge. En effet, la suite $(u_{2n}) = ((-1)^{2n})$ est constante égale à 1 (donc converge vers 1), tandis que la suite extraite $(u_{2n+1}) = ((-1)^{2n+1})$ est constante égale à -1 (donc converge vers -1). Ainsi, la suite u n'a pas de limite.

Exemple 15.43. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$. La suite u n'a pas de limite car $u_{9n^2} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que

$$u_{(3n+1)^2} = \frac{(3n+1)^2}{9} - \left\lfloor \frac{3n+1}{3} \right\rfloor^2 = \frac{9n^2+6n+1}{9} - n^2 = \frac{6n+1}{9} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice d'application 15.44. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\dfrac{2^n + (-2)^n}{2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas.

➥

Exercice d'application 15.45. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{10}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

➥

Théorème 15.46 - Théorème de convergence des suites extraites.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration.

15.4 Théorèmes d'existence d'une limite

15.4.1 Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration

Théorème 15.47 - Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et converge vers ℓ.

Démonstration.

Exercice d'application 15.48. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

➥

Exercice d'application 15.49. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, posons $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Déterminer, si elle existe, la limite de u.

➥

Exemple 15.50 (♥). Pour $x \in \mathbf{R}$, les suites des valeurs approchées par défaut u et par excès v de x, définies par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n},$$

convergent toutes deux vers x.

En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$, donc $x - \frac{1}{10^n} < u_n \leqslant x$ puis avec le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = x$.

Ce résultat très important assure que tout réel peut être approché par une suite de rationnel. On dit que $\mathbf{Q}$ est **dense** dans $\mathbf{R}$.

Corollaire 15.51 - Majoration en valeur absolue par une suite qui converge vers 0.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites. Si pour tout $n \in \mathbf{N}, |u_n| \leqslant v_n$ et si la suite (v_n) converge vers 0, alors la suite (u_n) converge aussi vers 0.

Démonstration.

Corollaire 15.52 - Produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0.

Le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 converge vers 0.

Démonstration.

Exemple 15.53. Le corollaire précédent donne directement que la suite $\left(\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Théorème 15.54 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n.$$

1. **Théorème de minoration.** Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.
2. **Théorème de majoration.** Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers $-\infty$.

Démonstration.

Exercice d'application 15.55. On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = n^2 - n + 1.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant n$.
2. En déduire, si elle existe, la limite de la suite u.

➥

Exercice d'application 15.56. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

➥

15.4.2 Limites pour les suites monotones

Théorème 15.57 - Théorème de la limite monotone (TLM).

Soit u une suite réelle. Si u est monotone, alors u possède une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. Plus précisément :

1. Si u est croissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\left(\{u_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}\right)$. En particulier,
   - si u est croissante et majorée, alors u converge ;
   - si u est croissante et non majorée, alors u diverge vers $+\infty$.
2. Si u est décroissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\left(\{u_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}\right)$. En particulier,
   - si u est décroissante et minorée, alors u converge ;
   - si u est décroissante et non minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration.

ATTENTION

Notons que le théorème de la limite monotone permet de démontrer qu'une suite admet une limite, mais il ne permet pas de calculer celle-ci ! En particulier, ça n'est pas parce qu'une suite est majorée par un réel M qu'elle converge vers M. Par exemple, la suite $\left(-\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est croissante, majorée par 2 mais elle ne converge pas vers 2.

Exercice d'application 15.58. Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\lfloor e^k \rfloor}{3^k}$ converge.

➥

Remarque 15.59 (♥). Si u est croissante et majorée, alors u est majorée par sa limite (puisque cette limite vaut $\sup(\{u_n : n \in \mathbf{N}\})$. De même, une suite décroissante et minorée est minorée par sa limite.

Remarque 15.60 (♥). Pour justifier qu'une suite croissante diverge vers $+\infty$, on utilise souvent le théorème de la limite monotone sous cette forme : si u est croissante et non convergente, alors u diverge vers $+\infty$.

On peut évidemment adapter cette remarque aux suites décroissantes.

Démonstration.

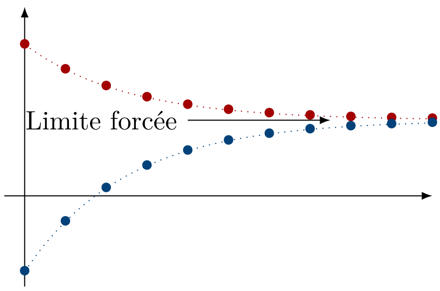
15.4.3 Suites adjacentes

Définition 15.61 - Suites adjacentes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont **adjacentes** lorsque :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante (ou l'inverse) ;
2. la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Deux suites adjacentes viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant et l'autre en décroissant. On comprend intuitivement qu'elles finissent nécessairement par s'écraser l'une sur l'autre. On ne sait pas où, mais cela arrive quelque part ! On obtient donc un théorème d'existence de limite, mais qui ne donne pas la valeur de la limite (comme le théorème de la limite monotone).



Lemme 15.62.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$

Démonstration.

Théorème 15.63 - Théorème de convergence des suites adjacentes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles avec u croissante et v décroissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes alors u et v convergent vers une même limite. Si on note ℓ cette limite commune, on a de plus

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Démonstration.

Exemple 15.64 (♥). Pour $x \in \mathbf{R}$, les suites des valeurs approchées par défaut u et par excès v de x (voir l'Exemple 15.50) sont adjacentes.

En effet, $v_n - u_n = \dfrac{1}{10^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, $10^n u_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 = 10^n v_n$. En multipliant par 10, on obtient $10^{n+1} u_n \leqslant 10^{n+1} x < 10^{n+1} v_n$. Puisque tous les termes sont entiers, $10^{n+1} u_n \leqslant \left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor = 10^{n+1} u_{n+1}$, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. De même, $10^{n+1} v_n \geqslant \left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor + 1 = 10^{n+1} v_{n+1}$, puis $v_n \geqslant v_{n+1}$.

Exercice d'application 15.65. ♨ Justifier que les suites u et v définies pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$

convergent vers une même limite.

➥

15.5 Théorème des croissances comparées

Proposition 15.66 - Limite de la suite factorielle.

La suite $(n!)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

Lemme 15.67.

Soit u une suite strictement positive et $\eta \in]0\,;1[$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \eta$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant N$. $u_{n+1} \leqslant \eta u_n$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{\eta^{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{\eta^n}$, donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{\eta^n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante. Elle aussi bornée puisque positive. Or $\eta \in]0\,;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta^n = 0$ (suite géométrique de raison dans $]-1\,;1[$, on rappelle ce résultat plus loin dans ce chapitre). Par produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle, on en déduit $u_n = \dfrac{u_n}{\eta^n} \times \eta^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Remarque 15.68. Le lemme assure en particulier que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Théorème 15.69 - Croissances comparées.

Soit α, β deux réels strictement positifs et $q \in]1\,;+\infty[$. Alors

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0\,;$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0\,;$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} = 0\,;$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{q^n} = +\infty\,;$ **5.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty\,;$ **6.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\ln(n)^\beta} = +\infty.$

Démonstration.

1. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{q}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec le lemme précédent.
2. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{n^\alpha}{q^n}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \times \dfrac{1}{q}$. Or, si $n \neq 0$, $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$, d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{q} > 0$, donc u est majorée par une constante $\eta \in]0\,;1[$. Avec le lemme précédent, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Démonstration très similaire à celle donnée dans le cours sur les fonctions usuelles.

Les autres limites s'obtiennent en inversant les résultats déjà obtenus. □

On dit parfois grossièrement que, lorsqu'on a une forme indéterminée, « $n!$ l'emporte sur les fonctions exponentielles, qui l'emportent sur les fonctions puissances, qui l'emporte sur la fonction logarithme népérien ». Cette notion de l'« emporte sur » a en réalité un sens précis en mathématique, que l'on étudiera plus tard. Pour l'instant, il faut se ramener explicitement à l'une des 6 formes du théorème avant de pouvoir donner la valeur d'une limite !

Exemple 15.70. Considérons $u = \left(\dfrac{n^2 + \mathrm{e}^n}{\ln(n) + \sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$. On factorise par les termes qui l'emportent au numérateur et au dénominateur. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^n(\frac{n^2}{\mathrm{e}^n} + 1)}{\sqrt{n}(\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + 1)}.$$

Or par croissances comparées, $\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, par opérations sur les limites, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice d'application 15.71. Déterminer la limite de $u = \left(\dfrac{n^2+n+1+n\ln(n)}{1-2^n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

➥

15.6 Suites de nombres complexes

Définition 15.72 - Suite complexe.

Une **suite de nombres complexes** u est une famille de complexes indexée par $\mathbf{N}$. On la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. L'ensemble des suites complexes est donc $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbf{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, adjacentes... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes, de même que les théorème de la limite monotone et d'encadrement !). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module, on peut donc peut étendre la notion de suite bornée et de limite.

Définition 15.73 - Suite bornée.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **bornée** lorsque la suite de nombres réels $(|z_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Définition 15.74 - Limite d'une suite complexe.

On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell\in\mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty}|z_n-\ell| = 0,$$

(c'est la limite d'un module, donc d'une suite réelle). Autrement dit, z converge vers ℓ si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad |z_n-\ell|<\varepsilon.$$

Remarque 15.75. Dire qu'une suite complexe tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'a pas de sens.

Proposition 15.76 - Caractérisation de la limite avec la partie réelle et la partie imaginaire.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell\in\mathbf{C}$.
La suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$.

Démonstration.

Exemple 15.77. On a $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(n) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + i \operatorname{Arctan}(n)\right) = \frac{i\pi}{2}$.

Proposition 15.78 - Limite de la suite conjuguée, des modules.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers ℓ un nombre complexe.

1. La suite $(\overline{z_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.

2. La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|$.

Démonstration.

Remarque 15.79. Les résultats obtenus sur les suites de nombres réels qui ne font pas intervenir la relation d'ordre dans $\mathbf{R}$ restent valable pour les suites de nombres complexes. Par exemple, les opérations sur les limites restent valables : on le démontre de la même manière que pour les suites réelles, en remplaçant les valeurs absolues par des modules. De plus, une suite complexe convergente est bornée, la limite est unique si elle existe.

15.7 Suites classiques

Dans ce paragraphe, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

15.7.1 Suites arithmétiques

Définition 15.80 - Suite arithmétique.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. La suite u est dite **arithmétique** lorsqu'il existe $r \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

Exercice d'application 15.81. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 3^n.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle arithmétique ? Si oui, préciser sa raison.

➥

Proposition 15.82 - Variations.

Soit u une suite réelle. Supposons que u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.

- Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.

Démonstration.
Immédiat en remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$. □

Proposition 15.83 - Terme général.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{K}$. Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_n = u_p + (n - p) \times r.$$

Démonstration.
Ce résultat s'obtient facilement par récurrence, par exemple. □

Proposition 15.84 - Limites.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite réelle, arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.

- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 et converge donc vers u_0.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) tend vers $-\infty$.

Démonstration.
Immédiat en utilisant le terme général. □

Proposition 15.85 - Somme des termes.

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Démonstration.
Une récurrence est possible. On peut aussi retrouver ce résultat à partir de la somme de référence $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. □

15.7.2 Suites géométriques

Définition 15.86 - Suite géométrique.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. La suite u est dite **géométrique** si, et seulement si, il existe $q \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Exercice d'application 15.87. Soit u la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

1. En remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 1$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \ln(u_n - 1)$. Démontrer que v est une suite géométrique (et préciser sa raison).

➥

Proposition 15.88 - Variations.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite <u>réelle</u> de raison $q \in \mathbf{R}$.

- Si $q = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite est nulle à partir du rang 1.
- Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
- Si $q < 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est donc pas monotone.
- Si $q > 0$, la suite est monotone et de signe constant. Plus précisément :
  - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement croissante.
  - Si $u_0 > 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement décroissante.
  - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement décroissante.
  - Si $u_0 < 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement croissante.

Démonstration.
Seul le dernier point n'est pas évident. Il faut déjà remarqué que si $q > 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est du même signe stricte que u_0 (récurrence immédiate). Ensuite, il faut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 puis multiplier par u_n (en faisant attention à changer le sens de l'inégalité si $u_n < 0$). □

Proposition 15.89 - Terme général.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{K}$. Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Démonstration.
Ce résultat s'obtient facilement par récurrence, par exemple. □

Lemme 15.90 - Inégalité de Bernoulli.

Pour tout entier $n > 1$ et tout réel x non nul supérieur ou égal à -1,

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Démonstration.
La démonstration a été faite en TD (par récurrence). □

Proposition 15.91 - Limites.

Soit $q \in \mathbf{K}$.

1. Si q est réel avec $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
2. Si q est réel avec $q \leqslant -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.
3. Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
4. Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Démonstration.

1. On suppose q réel avec $q > 1$. Posons $x = q - 1 > 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après l'inégalité de Bernoulli

$$q^n = (1 + x)^n \geqslant 1 + nx = 1 + n(q - 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc le théorème de minoration assure que $q^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. On suppose q réel avec $q \leqslant 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$q^{2n} = (q^2)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

en appliquant le point précédent, puisque $q^2 > 1$. De même,

$$q^{2n+1} = q(q^2)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

toujours avec le point précédent et en utilisant $q < 0$. Les suites extraites (q^{2n}) et (q^{2n+1}) ne tendent pas vers la limite, donc la suite (q^n) n'a pas de limite.

3. Si $q = 1$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $q^n = 1$.

4. Supposons $|q| < 1$. Alors $\dfrac{1}{|q|} > 1$, donc la suite réelle $\left(\dfrac{1}{|q|^n}\right)$ tend vers $+\infty$ d'après **1.**. Il s'ensuit que $|q^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Proposition 15.92 - Somme des termes.

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{K}$ différente de 1 est :

$$(\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Démonstration.
Une récurrence est possible. On peut aussi retrouver ce résultat à partir de la somme de référence $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. $\square$

15.7.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 15.93 - Suite arithmético-géométrique.

On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Remarque 15.94. Les suites arithmétiques de raison r sont des suites arithmético-géométriques particulières (pour $a = 1$ et $b = r$). Les suites géométriques de raison q sont des suites arithmético-géométriques (pour $a = q$ et $b = 0$).

Définition 15.95 - Point fixe d'une suite arithmético-géométrique.

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ avec $a \neq 1$. On introduit une suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_{n+1} = au_n + b$. L'unique solution de l'équation

$$x = ax + b$$

est appelée **point fixe** de la suite u.

Proposition 15.96 - Suite auxiliaire géométrique.

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ avec $a \neq 1$. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_{n+1} = au_n + b$. Notons x_0 le point fixe de u. Alors la suite v, définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = u_n - x_0$$

est géométrique de raison a.

Démonstration.

Méthode 15.97. *Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique*

Soit $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ avec $a \neq 1$. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_{n+1} = au_n + b$. Pour déterminer le terme général de u, on procède en trois étapes.

1. On commence par chercher le point fixe de u, ce qui revient à résoudre $x = ax + b$. On note x_0 la solution.
2. On introduit $v = (u_n - x_0)_{n\in\mathbf{N}}$. Le cours assure que cette suite est géométrique de raison a (il le redémontrer à chaque fois).
3. On a alors, pour $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = v_0 a^n$, puis $u_n - x_0 = (u_0 - x_0)a^n$ et enfin $u_n = (u_0 - x_0)a^n + r$ (on refait ces calculs dans chaque situation).

Exemple 15.98. Soit u la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1. L'équation $x = 2x + 3$ d'inconnue x réelle admet -3 comme unique solution. On introduit donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - (-3) = u_n + 3$.
2. Montrons que v est géométrique de raison 2. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= 2u_n + 3 + 3 \\ &= 2(u_n + 3) - 2 \times 3 + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

   donc v est géométrique de raison 2.
3. Ainsi, pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = v_1 \times 2^{n-1}$. Or $v_1 = u_1 + 3 = 4$. Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$, puis $u_n = v_n - 3 = 2^{n+1} - 3$.

Exercice d'application 15.99. Déterminer le terme général de la suite u telle que $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3 - 2u_n$.

➥

15.7.4 Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

Définition 15.100 - Suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On appelle **suite linéaire récurrente d'ordre 2 (ou double)** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b)\in\mathbf{K}^2$ vérifiant :
$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n. \tag{15.2}$$

Définition 15.101 - Équation caractéristique.

On reprend les notations de la définition précédente. L'équation caractéristique de (15.2) d'inconnue $x\in\mathbf{K}$ est $x^2=ax+b$.

Proposition 15.102 - Terme général dans le cas complexe.

On reprend les notations de la définition précédente et on suppose $\mathbf{K}=\mathbf{C}$. Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de u, elle-même notée (E).

- Si $\Delta\neq 0$, alors (E) a deux solutions complexes distinctes z_1 et z_2 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=\alpha {z_1}^n+\beta {z_2}^n.$$
- Si $\Delta=0$, alors (E) admet une unique solution z_0 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=(\alpha n+\beta){z_0}^n.$$

Démonstration.
La démonstration sera faite plus tard. □

Remarque 15.103. Dans chacun des cas, les valeurs de α et β sont entièrement déterminées par les valeurs de u_0 et u_1.

Exemple 15.104. Déterminons le terme général de la suite u définie par $u_0=1$, $u_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$.

La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $z^2-2z+2=0$ d'inconnue z complexe a pour discriminant $-4=(2i)^2$, donc ses racines sont $\dfrac{2-2i}{2}=1-i$ et $1+i$. Ainsi, il existe $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ tel que, pour tout $n\in\mathbf{N}$,
$$u_n=\alpha(1+i)^n+\beta(1-i)^n.$$

Les valeurs de u_0 et u_1 fournissent de plus un système qui permet d'obtenir α et β :
$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0&=&1\\ u_1&=&1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&1\\ \alpha(1+i)+\beta(1-i)&=&1\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&1\\ \beta(1-i-1-i)&=&1-1-i\end{array}\right.$$

donc $\beta = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2}(1+i)^n + \frac{1}{2}(1-i)^n$$

Notons qu'on peut simplifier :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}\left[(1+i)^n + \overline{(1+i)^n}\right] = \mathfrak{Re}((1+i)^n) = \mathfrak{Re}\left((\sqrt{2})^n \mathrm{e}^{in\pi/4}\right) = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Les termes pour définir la suite sont tous réels donc il est rassurant de trouver que u_n est réel. Ce passage des complexes aux réels peut être généralisé : c'est ce qui est fait dans le résultat qui suit.

Proposition 15.105 - Terme général dans le cas réel.

On reprend les notations de la définition précédente et on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de u, elle-même notée (E).

- Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions x_1 et x_2 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution x_0 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\alpha n + \beta){x_0}^n.$$
- Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\rho \mathrm{e}^{-i\theta}$ où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)).$$

Démonstration.

Exemple 15.106. Cherchons à nouveau le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Puisque les racines du polynôme caractéristique sont $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$ et $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$, la proposition précédente assure qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sqrt{2}^n \left(\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

De plus,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \sqrt{2}(\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta\frac{\sqrt{2}}{2}) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \alpha + \beta & = & 1 \end{array}\right.$$

donc $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. On retrouve que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice d'application 15.107. On considère la **suite de Fibonacci** $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Déterminer le terme général de F.

➥

Exercice d'application 15.108. Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

➥

Questions de cours

1. Définir la notion de suite croissante (resp. décroissante), strictement croissante (resp. strictement décroissante), (strictement) monotone, constante.
2. Définir la notion de suite stationnaire.
3. Définir la notion de suite majorée, minorée, bornée.
4. Définir la notion de suite convergente vers un réel ℓ.
5. Donner le lien entre les suites convergentes et les suites bornées.
6. Soit u une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbf{R}$. Que peut-on dire en terme de majoration/minoration si $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$) ?
7. Énoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité.
8. Définir la notion de suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
9. Que peut-on dire en terme de majoration/minoration d'une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ?
10. Donner les tableaux des opérations sur les limites.
11. Définir la notion de suite extraite.
12. Soit u une suite convergente. Que peut-on dire des limites des suites extraites de u ?
13. Énoncer le théorème de convergence des suites extraites.
14. Énoncer le théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes).
15. Que peut-on dire du produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0 ?
16. Énoncer le théorème de majoration (resp. de minoration).
17. Énoncer le théorème de la limite monotone.
18. Donner la définition de suites adjacentes (à ne pas confondre avec le théorème !).
19. Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.
20. Compléter les limites suivantes, où $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^\star$ et $q \in \,]1\,;\,+\infty[$:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = \dots\,;$ **(c)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} = \dots\,;$ **(e)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = \dots\,;$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = \dots\,;$ **(d)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{q^n} = \dots\,;$ **(f)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\ln(n)^\beta} = \dots\,.$

21. Donner le terme général d'une suite arithmétique (resp. géométrique) de raison $r \in \mathbf{K}$ en fonction du terme u_p, où $p \in \mathbf{N}$.
22. Donner les limites possibles d'une suite géométrique en fonction de sa raison.
23. Donner la définition de suite arithmético-géométrique.
24. Donner la définition de suite récurrente linéaire d'ordre 2.
25. Donner le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 complexe.
26. Donner le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 réelle.