CHAPITRE 13 L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

Lorsque l'on définit les ensembles de nombres classiques, on commence par le plus petit : $\mathbf{N}$. On lui ajoute ensuite les opposés des entiers pour former $\mathbf{Z}$, et il est naturel de rajouter les inverses des entiers non nuls (et en fait tous les quotients) pour obtenir $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire l'ensemble des quotients d'entiers, de dénominateurs strictement positifs.

Depuis l'antiquité, on sait pourtant qu'on peut construire des longueurs non rationnelles uniquement à partir de segments de longueurs entières. C'est le cas de $\sqrt{2}$ qui est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont chacun des côtés de l'angle droit mesure l'unité de longueur. Cette insuffisance de $\mathbf{Q}$ en entraîne d'autres.

- On montrera plus tard que les deux suites u et v de nombres rationnels définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ ont une limite qui est $\sqrt{2}$. Leur limite n'est donc pas un nombre rationnel.
- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2 \end{array}$ prend des valeurs positives et négatives, et pourtant elle ne s'annule pas.
  Autrement dit, le théorème des valeurs intermédiaires n'existe pas avec les fonctions de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}$!

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbf{R}$, contenant $\mathbf{Q}$, permettant par exemple de repérer par leur abscisse tous les points d'une droite munie d'un repère $(O, \vec{\imath})$ (appelée **droite réelle**).

Culture : $\mathbf{R}$ peut-être construit comme ensemble des limites possibles des suites de $\mathbf{Q}$ convergentes, bien que cela nécessite de définir ce qu'est une suite convergente autrement qu'en disant que c'est une suite ayant une limite.

13.1 Parties majorées, minorées

Définition 13.1 - Minorant, majorant.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$, soit $m, M \in \mathbf{R}$.

1. On dit que m est un **minorant** de A si, pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$. Si A possède un minorant, on dit que A est **minorée**.
2. On dit que M est un **majorant** de A si, pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$. Si A possède un majorant, on dit que A est **majorée**.

Une partie de $\mathbf{R}$ à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

Définition 13.2 - Plus petit élément, plus grand élément.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$, soit $m, M \in \mathbf{R}$.

1. On dit que m est le **plus petit élément** (ou **minimum**) de A si $m \in A$ et m est un minorant de A. Si A possède un minimum, on le note $\min(A)$.
2. On dit que M est le **plus grand élément** (ou **maximum**) de A si $M \in A$ et M est un majorant de A. Si A possède un maximum, on le note $\max(A)$.

Démonstration (unicité du plus petit élément, du plus grand élément).

Remarque 13.3. Si A est une partie majorée de $\mathbf{R}$, elle possède une infinité de majorants et au plus un maximum. Si A est une partie minorée de $\mathbf{R}$, elle possède une infinité de minorants et au plus un minimum.

ATTENTION

Une partie de $\mathbf{R}$ n'admet pas toujours un minimum ou un maximum. Il ne faut donc pas utiliser les notations $\min(A)$ ou $\max(A)$ tant qu'on n'a pas démontré que ces quantités existaient !

Exemple 13.4. Considérons $A = [0\,;\,1]$. $-\dfrac{1}{2}, -1, -2$, etc. sont des minorants de A (A possède une infinité de minorants) et $\dfrac{7}{2}$, π, $\sqrt{2}$, etc. sont des majorants de A (A possède une infinité de majorants). Le plus petit élément de A est 0 et le plus grand élément de A est 1.
$B = [0\,;\,1[$ est majorée (par 2, 3,...) mais B ne possède pas de plus grand élément. En effet, supposons qu'il existe un plus grand élément M. En particulier, $M \in B$, donc $M < 1$ Notons $N = \dfrac{1+M}{2}$ le milieu du segment $[M\,;\,1]$. On a donc $M < N < 1$. De plus $N \in B$, donc M n'est pas un majorant de B, ce qui est contradictoire.
$C = [0\,;\,+\infty[$ n'est pas majorée. En effet, supposons qu'il existe un majorant $M \geqslant 0$ de C. On a $M+1 \geqslant 0$ donc $M+1 \in C$ et $M < M+1$, ce qui prouve que M n'est pas un un majorant de C, d'où la contradiction.

Proposition 13.5 - Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue.

Soit E une partie de $\mathbf{R}$. E est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $|x| \leqslant M$.

Démonstration.
Supposons que E est bornée. Alors il existe m un minorant et M un majorant de E. Soit $x \in E$. Si $m \geqslant 0$, on a $0 \leqslant m \leqslant x \leqslant M$ donc $|x| \leqslant |M|$ (les valeurs absolues sont facultatives) et si $m < 0$, $0 \leqslant -M \leqslant -x \leqslant -m$, donc $|x| \leqslant |m|$ (car $-x = |x|$ et $-m = |m|$). En résumé, $|x| \leqslant \max(|m|, |M|)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $|x| \leqslant M$. Soit $x \in E$. On a $-M \leqslant x \leqslant M$, ce qui prouve que E est minorée et majorée, donc que E est bornée. □

13.2 Borne inférieure, borne supérieure

Définition 13.6 - Borne inférieure, borne supérieure.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ non vide.

- Si A est majorée, on appelle **borne supérieure** de A, et on note $\sup(A)$, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (on verra un peu plus loin qu'il existe toujours). Si A n'est pas majorée, on convient que $\sup(A) = +\infty$.
- Si A est minorée, on appelle **borne inférieure** de A, et on note $\inf(A)$, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A (on verra un peu plus loin qu'il existe toujours). Si A n'est pas minorée, on convient que $\inf(A) = -\infty$.

On convient enfin que l'ensemble vide n'admet ni borne inférieure, ni borne supérieure.

Exemple 13.7. Considérons $A =]1\,;\,2]$. Les nombres inférieurs ou égaux à 1 sont tous des minorants de A et les autres nombres non, donc l'ensemble des minorants de A est $]-\infty\,;\,1]$. Le maximum de l'ensemble des minorants est 1, donc $\inf(A) = 1$. Notons qu'on a ici $\inf(A) \notin A$.
De même, l'ensemble des majorants de A est $[2\,;\,+\infty[$. Le minimum de l'ensemble des majorants est 2, donc $\sup(A) = 2$. Notons qu'on a $\sup(A) = 2$. De plus, 2 est un majorant de A qui appartient à A, donc on a également $\max(A) = 2$.

Théorème 13.8 - Théorèmes de la borne supérieure et de la borne inférieure.

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure finie.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$ possède une borne inférieure finie.

Démonstration.
Admis $\square$

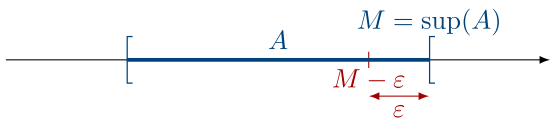
Théorème 13.9 - Caractérisation de la borne supérieure.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Soit $M \in \mathbf{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $M = \sup(A)$.

(ii) $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } M' \text{ majorant de } A,\ M \leqslant M' \end{array} \right.$

(iii) $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \end{array} \right.$



On peut aussi affirmer que :
$$M < \sup(A) \iff \exists a \in A,\ M < a.$$

Démonstration.
Chaque assertion est une traduction de la définition. $\square$

Il existe un énoncé similaire pour la borne inférieure.

Théorème 13.10 - Caractérisation de la borne inférieure.

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$. Soit $m \in \mathbf{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $m = \inf(A)$.

(ii) $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{pour tout } m' \text{ minorant de } A,\ m' \leqslant m \end{array} \right.$

(iii) $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ est un minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < m + \varepsilon \end{array} \right.$

On peut aussi affirmer que :
$$m > \inf(A) \iff \exists a \in A,\ m > a.$$

Proposition 13.11 - Lien entre maximum et borne supérieure.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ non vide. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.
$$\alpha = \max(A) \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sup(A) \\ \alpha \in A \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \alpha = \min(A) \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \inf(A) \\ \alpha \in A \end{array} \right.$$

Démonstration.
On ne démontre que la première équivalence.
Supposons que $\alpha = \max(A)$. Alors $\alpha \in A$ par définition du plus grand élément. En particulier, comme $\sup(A)$ est un majorant de A, $\sup(A) \geqslant \alpha$. Or α est un majorant de A, donc $\sup(A) \leqslant \alpha$. Donc $\sup(A) = \alpha$.
Réciproquement, supposons $\alpha = \sup(A)$ et $\alpha \in A$. On a immédiatement $\sup(A) = \max(A)$ en tant que majorant élément de A et par unicité du maximum. $\square$

Exercice d'application 13.12. Pour chaque ensemble ci-après, donner l'ensemble des minorants, l'ensemble des majorants, le plus petit élément, le plus grand élément, la borne inférieure et la borne supérieure (sous réserve d'existence pour les quatre derniers).

1. $A_1 = \{-10, 3, 12\}$; **2.** $A_2 = [0\,;\,1[\,\cup\,]3\,;\,4[$; **3.** $A_3 = \left\{\dfrac{1}{k} \,:\, k \in \mathbf{Z}^\star\right\}$; **4.** $A_4 = \left\{\dfrac{1}{k} \,:\, k \in \mathbf{N}^\star\right\}$;

5. $A_5 = \mathbf{N}$; **6.** $A_6 =]-\infty\,;\,8[$; **7.** $A_7 = \{2k-1 \,:\, k \in \mathbf{N}\}$.

➥

Exercice d'application 13.13. ♨ Déterminer $\sup([0\,;\,1[)$ et $\inf([0\,;\,1[)$.

➥

13.3 Droite réelle achevée, intervalles

13.3.1 La droite réelle achevée

Définition 13.14 - Droite réelle achevée.

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux objets non réels ayant la propriété

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent sur $\overline{\mathbf{R}}$ en complétant par les opérations suivantes

$$\begin{array}{c} \forall x \in \mathbf{R}, \qquad x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \qquad x \times (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_-^\star, \qquad x \times (+\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = +\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty. \end{array}$$

ATTENTION

Les opérations $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$ et $0 \times (-\infty)$ ne sont pas définies (ce sont les fameuses formes indéterminées).

13.3.2 Intervalles de $\mathbf{R}$

On rappelle la définition d'intervalle.

Définition 13.15 - Intervalle.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On dit que A est un intervalle si et seulement si

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \subset A.$$

Une partie d'un ensemble vérifiant cette propriété est dite **convexe**.

Proposition 13.16 - Cinq types d'intervalles.

Les intervalles de $\mathbf{R}$ ne peuvent prendre que les formes suivantes.

1. Ensemble vide.
2. Intervalle fermé borné (qu'on appelle **segment**) : $[a\,;b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $a \leqslant b$.
3. Intervalle ouvert : $]a\,;b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ où $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ et $a < b$.
4. Intervalle semi-ouvert : $[a\,;b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $]a\,;b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$, avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $a < b$.
5. Intervalle fermé non borné : $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a]$, avec $a \in \mathbf{R}$.

Démonstration.

Remarque 13.17. Les singletons sont aussi des intervalles de $\mathbf{R}$, et même des segments, puisque pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\{a\} = [a\,;\,a]$.

Exercice d'application 13.18. ♥

1. Soit I un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'intervalles indexée par I. Montrons que $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un intervalle (autrement dit, dans cet exercice, on demande de démontrer qu'une intersection quelconque d'intervalles est un intervalle).
2. Peut-on dire qu'une union d'intervalles est un intervalle ?

➥

13.4 Approximation décimale d'un nombre réel

Définition 13.19 - Approximation d'un réel.

Soit $x, y \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$.

- On dit que y **approche** x **à** ε **près** lorsque $|x - y| \leqslant \varepsilon$.
- On dit que y **approche** x **à** ε **près par excès** lorsque y approche x à ε près et $y \geqslant x$.
- On dit que y **approche** x **à** ε **près par défaut** lorsque y approche x à ε près et $y \leqslant x$.

Définition 13.20 - Nombre décimal.

On appelle **nombre décimal** tout rationnel de la forme $\dfrac{p}{10^n}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Remarque 13.21. Tout nombre décimal est rationnel, mais la réciproque est fausse. Par exemple, $\dfrac{1}{3}$ est rationnel mais non décimal (si on suppose par l'absurde que $\dfrac{1}{3}$ est décimal, on obtient qu'il existe $p \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$ tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{p}{10^n}$, ce qui se réécrit $3p = 10^n$, ce qui entraîne en particulier que 3 divise 10^n, ce qui est absurde).

Proposition 13.22 - Approximation décimale par défaut, par excès.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit x un réel.

- Le nombre décimal $\dfrac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$ approche x à 10^{-n} près par défaut.
- Le nombre décimal $\dfrac{\lfloor x10^n \rfloor + 1}{10^n}$ approche x à 10^{-n} près par excès.

Démonstration.
On a, par définition de la partie entière, $\lfloor x10^n \rfloor \leqslant x10^n < \lfloor x10^n \rfloor + 1$, d'où $\dfrac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$. De plus, on sait que $0 \leqslant x10^n - \lfloor x10^n \rfloor \leqslant 1$, donc $0 \leqslant x - \dfrac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} \leqslant \dfrac{1}{10^n}$. De même, $0 \leqslant (\lfloor x10^n \rfloor + 1) - x10^n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{\lfloor x10^n \rfloor + 1}{10^n} - x \leqslant \dfrac{1}{10^n}$. □

Exemple 13.23.

- On a, à 10^{-2} près, $2,71 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2,72$.
- On a, à 10^{-3} près, $1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415$.
- On a, à 10^{-4} près, $3,1415 \leqslant \pi \leqslant 3,1416$.

Exercice d'application 13.24. ♨ Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $\mathbf{Q} \cap [0\,;\sqrt{2}[$.

➥

Remarque 13.25 (♥). Soit $x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor + 1$ est le plus petit entier supérieur à x.

Exercice d'application 13.26. Déterminer $a = \min\left(\left\{ n \in \mathbf{N} \;\middle|\; \left(\dfrac{3}{5}\right)^n < 10^{-3} \right\}\right)$.

➥

Questions de cours

1. Définir la notion de majorant, de minorant.
2. Définir la notion de plus grand élément (ou maximum), de plus petit élément (ou minimum).
3. Donner la caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue.
4. Définir la notion de borne supérieure, de borne inférieure.
5. Théorème de la borne inférieure (resp. borne supérieure).
6. ☕ Théorème de caractérisation de la borne supérieure (resp. inférieure).
7. Lien entre maximum et borne supérieure (resp. minimum et borne inférieure).
8. Définir la droite réelle achevée.
9. Définir la notion d'intervalle comme une partie convexe de $\mathbf{R}$.
10. Donner les cinq types d'intervalles.
11. Définir la notion d'approximation d'un réel par à un autre à précision donnée. Préciser les notions d'approximation par excès et par défaut.
12. Donner les approximations décimales par défaut et par excès d'un réel x à 10^{-n} près (où $n \in \mathbf{N}$).
13. Si $x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}$, quel est le plus petit entier supérieur à x ?