

CHAPITRE 12

ENSEMBLES ET
APPLICATIONS

12.1 Ensembles : rappels et compléments

12.1.1 Compléments sur les opérations

Proposition 12.1 - Lois de Morgan.

Soit E un ensemble, A , B et C des parties de E . Alors :

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration.

Proposition 12.2 - Distributivité entre union, intersection.

Soit E un ensemble, A , B et C des parties de E . Alors :

1. **Distributivité de $\cup$ sur $\cap$.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. **Distributivité de $\cap$ sur $\cup$.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration. 1. On a

$$\begin{aligned}
 A \cup (B \cap C) &= \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)\} \\
 &= \{x \in E \mid (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\} && \text{par distributivité de ou sur et} \\
 &= \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \cap \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in C\} \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup C).
 \end{aligned}$$

2. Très similaire. □

Exercice d'application 12.3. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . Montrer que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



Définition 12.4 - Ensembles disjoints.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . A et B sont dites **disjointes** si $A \cap B = \emptyset$.

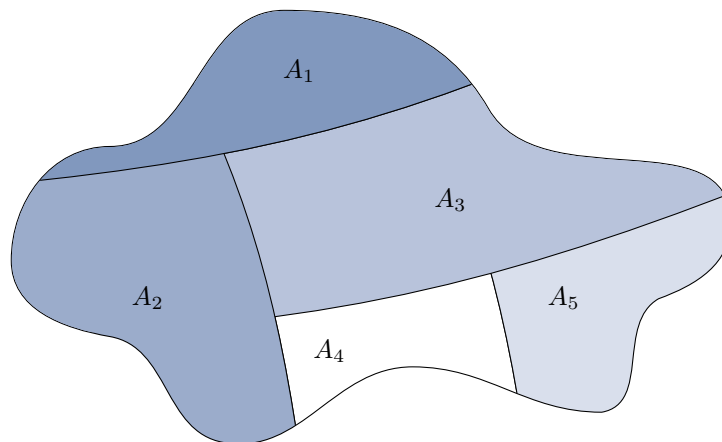
Définition 12.5 - Partition ou recouvrement disjoint d'un ensemble.

Soit E un ensemble, I un ensemble et pour tout $i \in I$, A_i , une partie de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une **partition** (on dit aussi **recouvrement disjoint**) de E si

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$;
- $\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j) \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ (on dit que les A_i sont **deux à deux disjoints**);
- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ (on dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement** de E).

Exemple de partition d'un ensemble en sous-ensembles A_1, A_2, A_3, A_4, A_5



Exemple 12.6. Notons A l'ensemble des nombres pairs et B l'ensemble des nombres impairs. A et B forment une partition de $\mathbf{Z}$ (l'intersection des deux ensembles est vide et l'union des deux ensembles est $\mathbf{Z}$).

Exemple 12.7. On note $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ et $C = \{2, 4, 5\}$.

1. $\{A, B\}$ n'est pas une partition de E , car $1 \in A \cap B$ (donc $A \cap B \neq \emptyset$).
2. $\{B, C\}$ n'est pas une partition de E , car $3 \notin B \cup C$ (donc $A \cup B \neq E$).
3. $\{A, C\}$ est une partition de E , car aucun élément de E n'appartient à la fois à A et C , et chaque élément de E appartient soit à A , soit à C .

Exercice d'application 12.8. On considère l'ensemble E de toutes les cartes d'un jeu de 32 cartes. On note A l'ensemble des rois et B l'ensemble des cœurs.

1. $\{A, \overline{A}, B\}$ est-t-il une partition de E ?
2. $\{A, B\}$ est-t-il une partition de E ?
3. $\{A, \overline{A}\}$ est-t-il une partition de E ?

4. Trouver une nouvelle partition de E .



Proposition 12.9 - Un ensemble et son complémentaire forment une partition.

Soit E un ensemble et A une partie de E non vide et distincte de E . Alors $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E .

Démonstration.

Exercice d'application 12.10. $\Rightarrow$ Pour tout $\theta \in [0; \pi[$, on note $A_\theta = \{e^{i\theta}, e^{i(\theta+\pi)}\}$. L'objectif est de montrer que $(A_\theta)_{\theta \in [0; \pi[}$ est une partition de $\mathbb{U}$.

1. (a) Soit $\theta, \theta' \in [0; \pi[$ tels que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$. Montrer que $\theta = \theta'$.
On admettra pour la suite que si $e^{i\theta} = e^{i(\theta'+\pi)}$ ou $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i\theta'}$ ou $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i(\theta'+\pi)}$, alors $\theta = \theta'$.
(b) Soit $\theta, \theta' \in [0; \pi[$ tels que $A_\theta \cap A_{\theta'} \neq \emptyset$. Montrer que $\theta = \theta'$.
2. Montrer que $\bigcup_{\theta \in [0; \pi[} A_\theta = \mathbb{U}$.
3. Conclure.



12.1.2 Rappels : montrer une égalité d'ensemble

Soit E, F deux ensembles. Pour montrer que $E \subset F$, on rappelle que peut fixer $x \in E$ et montrer qu'alors $x \in F$. Pour montrer que $E = F$, on peut montrer que $E \subset F$ et $F \subset E$. On peut aussi utiliser des équivalences, et montrer que pour x un élément quelconque, $x \in E \iff x \in F$.

Exercice d'application 12.11. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Montrer que $[a; b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0; 1]\}$.



12.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Exemple 12.12. Considérons l'ensemble $E = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$. On peut écrire $\mathcal{P}(E)$ en extension (cet ensemble compte 16 éléments) :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \emptyset, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\heartsuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\diamondsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\spadesuit, \heartsuit\}, \right. \\ \left. \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}, \{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\} \right\}.$$

Exercice d'application 12.13. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ en extension.

➡

Remarque 12.14. Si E est un ensemble qui contient n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$), alors $\mathcal{P}(E)$ contient 2^n éléments.

12.2 Applications

Dans toute la suite, E et F désigneront des ensembles.

12.2.1 Définition, restriction, prolongement

Définition 12.15 - Application.

Une **application** f de E dans F associe à chaque élément x de E un et un seul élément de F , appelé **image**, et noté $f(x)$.

Si $y \in F$, un **antécédent** de y par f est un élément x de E tel que $y = f(x)$.

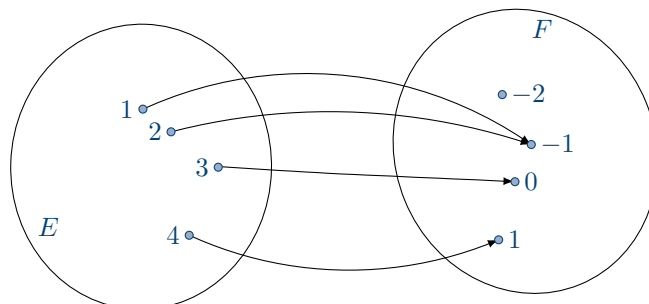
E est appelé **ensemble de départ** et F **ensemble d'arrivée**.

On notera $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F , et, pour $f \in \mathcal{F}(E, F)$,

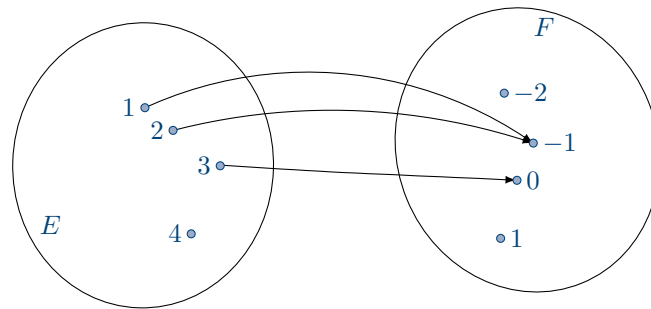
$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}.$$

Exemple 12.16. Notons $E = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $F = \llbracket -2, 1 \rrbracket$.

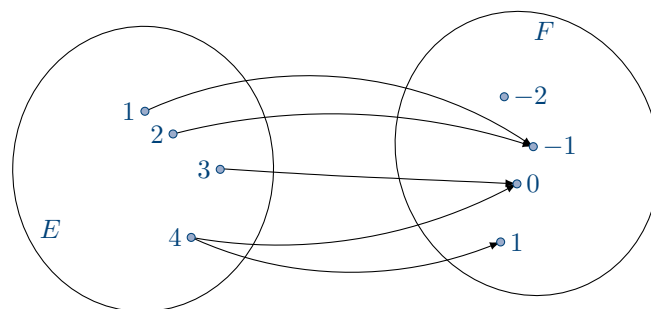
- Le diagramme suivant (appelé **diagramme sagittal**) correspond à l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(1) = -1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 0$ et $f(4) = 1$. Puisque chaque élément de E possède une unique image, f est bien une application. Notons que -2 n'a pas d'antécédent par f , 0 a un unique antécédent par f et -1 a deux antécédents par f .



Le diagramme suivant ne correspond pas à une application de E dans F , car 4 n'a pas d'image.



Le diagramme suivant ne correspond pas à une application, car 4 possède deux images.

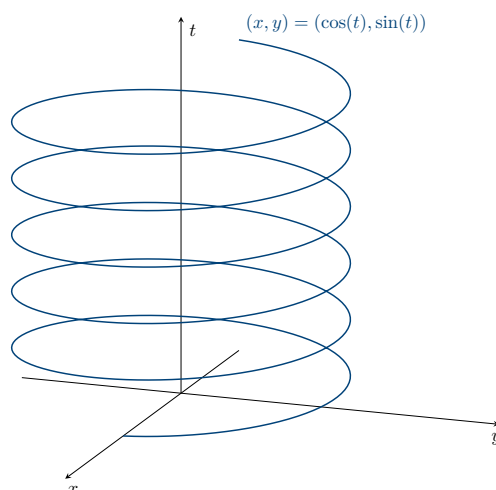


Définition 12.17 - Graphe d'une application.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Le **graphe** de f est $\{(x, f(x)) : x \in E\}$. C'est une partie de $E \times F$.

Exemple 12.18. 1. Le graphe de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto 3x^2 - 2$ est représenté géométriquement par une parabole du plan.

2. Le graphe de l'application $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$
 $t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$ est représenté géométriquement par une spirale de l'espace.



Définition 12.19 - Deux applications à connaître.

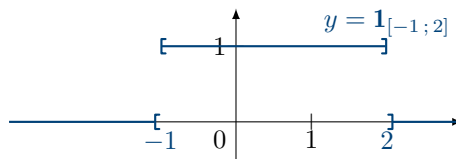
1. On appelle **identité** de E , notée Id_E , l'application

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

2. Si $A \subset E$, on appelle **indicatrice** de A , notée $\mathbf{1}_A$ l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 12.20. La courbe représentative de la fonction indicatrice sur $[-1; 2]$ est donnée ci-après :



Il est parfois utile de changer le domaine de définition d'une application, cela correspond aux notions de prolongement et de restriction.

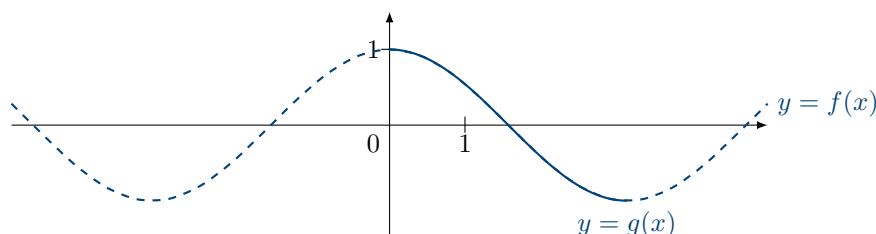
Définition 12.21 - Restriction d'une application.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soit $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application $f|_A : A \longrightarrow F$.

$$x \longmapsto f(x)$$
Définition 12.22 - Prolongement d'une application.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soit B un ensemble tel que $E \subset B$. Un **prolongement** de f à B est une application $g : B \longrightarrow F$ telle que $g|_E = f$.

Exemple 12.23. Considérons les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow [-1; 1]$ et $g : [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1]$. Alors g est une restriction (bijective) de f (qui n'est pas une application bijective). On dit aussi que f est un prolongement de g . On note $g = f|_{[0; \pi]}$.

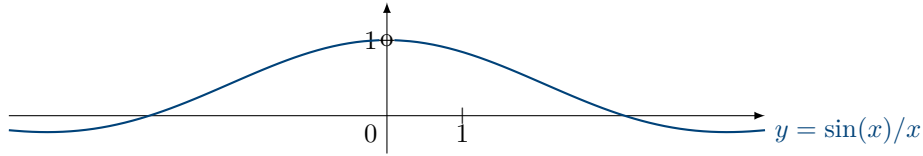


Exemple 12.24. On pose $g : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto \sin(x)/x$$

Alors $g_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est un prolongement de g . Cette nouvelle fonction est continue (on étudiera cela plus en détail dans l'année).

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



12.2.2 Image directe et image réciproque d'une partie par une application

Définition 12.25 - Image directe, image réciproque.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F .

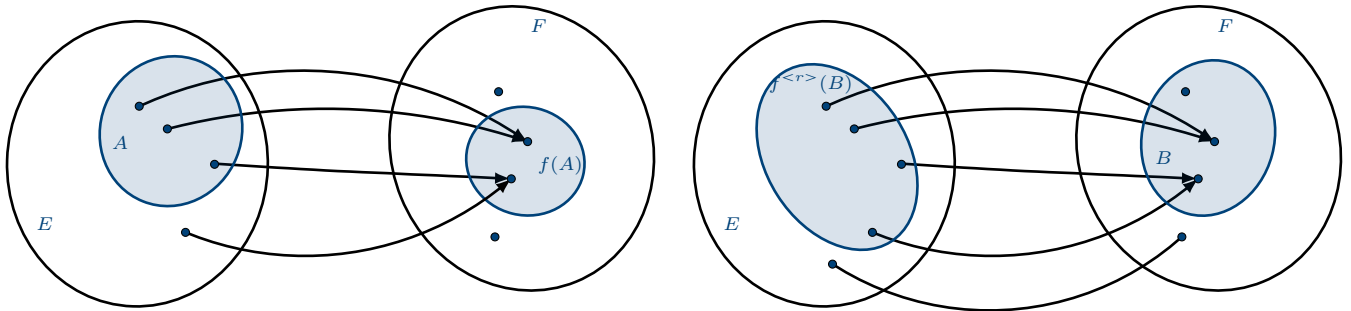
L'**image directe** de A par f est l'ensemble des images des éléments de A par f :

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

En particulier, pour $y \in F$, on a $y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y$. L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f :

$$f^{<r>}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

En particulier, pour $x \in E$, on a $x \in f^{<r>}(B) \iff f(x) \in B$.



Proposition 12.26 - Lien entre A et $f^{<r>}(f(A))$, entre B et $f(f^{<r>}(B))$.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F . Alors

1. $A \subset f^{<r>}(f(A))$;
2. $f(f^{<r>}(B)) \subset B$.

Démonstration.

Remarque 12.27. Les inclusions réciproque sont fausses en général. On voit avec l'illustration précédente que la partie $f^{<r>}(f(A))$ n'est pas incluse dans A (dans la première illustration, $f^{<r>}(f(A)) = E$). De même, $f(f^{<r>}(B))$ n'est pas incluse dans B (dans la deuxième illustration, B contient trois éléments, alors que $f(f^{<r>}(B))$ n'en contient que deux).

**Méthode 12.28.** *Trouver une image réciproque*

Trouver l'image réciproque d'un singleton revient souvent à résoudre une équation.

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, trouver l'image réciproque d'un intervalle revient souvent à résoudre une ou des inéquations.

**Méthode 12.29.** *Trouver une image directe dans le cas d'une fonction continue à valeurs réelles*

Dans le cas d'une fonction continue définie sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, appliquer le théorème de la bijection (une ou plusieurs fois) peut parfois permettre de déterminer une image directe.

**ATTENTION**

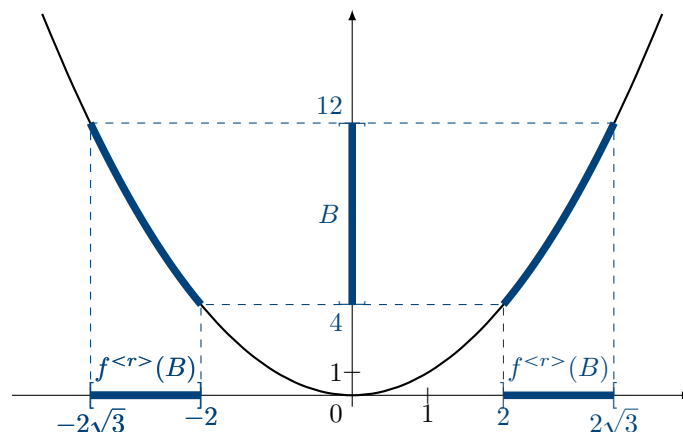
Cette méthode n'est valable que pour des fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$!

Exemple 12.30. On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x^2$.

1. Déterminons l'image réciproque de $[4; 12]$ par f . Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x \in f^{<r>}([4; 12]) &\iff f(x) \in [4; 12] \\ &\iff 4 \leq x^2 \leq 12 \\ &\iff -2\sqrt{3} \leq x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x \leq 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

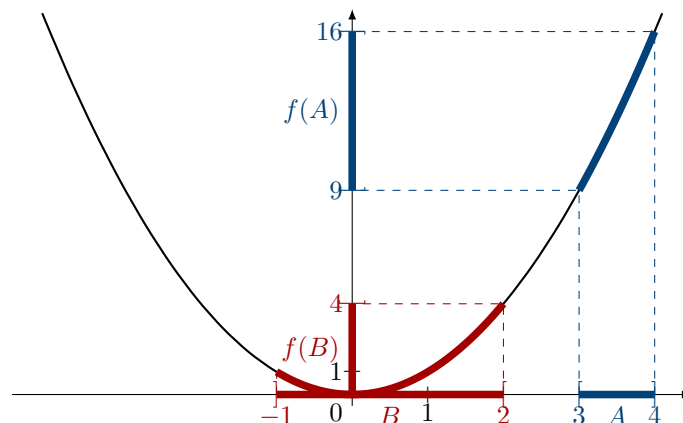
Donc $f^{<r>}([4; 12]) = [-2\sqrt{3}; -2] \cup [2; 2\sqrt{3}]$.



2. Déterminons les images directes de $[3; 4]$ et $]-1; 2]$ par f .

Puisque g est strictement croissante et continue sur $[3; 4]$, le théorème de la bijection assure que $g([3; 4]) = [g(3); g(4)] = [9; 16]$.

Puisque g est strictement décroissante sur $]-1; 0]$ et continue, le théorème de la bijection assure que $g(]-1; 0]) = [0; 1[$. De même, $g(]0; 2]) =]0; 4]$. Avec la proposition précédente, on en déduit que $g(]-1; 2]) = g(]-1; 0]) \cup g(]0; 2]) = [0; 1[\cup]0; 4] = [0; 4]$.



Exercice d'application 12.31. Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$. Déterminer $f^{<r>}(\{i\})$.

$$z \longmapsto e^z$$

➡

Exercice d'application 12.32. Soit $f : x \longmapsto 2x^2 + \ln(x)$. Déterminer $f([1; +\infty[)$.

➡

Exercice d'application 12.33. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, 7] & \longrightarrow & \{0; 1\} \\ n & \longmapsto & \text{le reste de la division de } n \text{ par } 2 \end{array}$ et $A = \{0; 2; 4\}$. Déterminer $f(A)$ et $f^{<r>}(\{1\})$.

➡

Exemple 12.34 () . Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $\mathbf{1}_A^{<r>}(\{1\}) = A$ et $\mathbf{1}_A^{<r>}(\{0\}) = \overline{A}$.

Proposition 12.35 - Inclusion et image directe, réciproque.

Soit f une application de E dans F .

- Soit A et A' des parties de E telles que $A \subset A'$. Alors $f(A) \subset f(A')$.
- Soit B et B' des parties de F telles que $B \subset B'$. Alors, $f^{<r>}(B) \subset f^{<r>}(B')$.

Démonstration.

Exercice d'application 12.36. () Soit E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, soit A, A' deux parties de E . Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

➡

Définition 12.37 - Ensemble image.

Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on appelle **ensemble image** de f , noté $f(E)$ ou $\text{Im}(f)$, l'ensemble des valeurs prises par f .

$$f(E) = \text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in E\}.$$

Exemple 12.38. On considère $f : \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Montrons que $\text{Im}(f) = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, où $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Soit $v \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Puisque v est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure qu'il existe $u \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ dérivable telle que $u' = v$ (u est une primitive de v). Or v est continue, donc $u' = v$ est également continue, et ainsi $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Ainsi la relation $f(u) = v$ entraîne $v \in f(\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}))$. On vient de montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \subset \text{Im}(f)$.

L'inclusion réciproque est trivialement vraie car la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue par définition.

Exemple 12.39. Déterminons l'image de $f : \mathbf{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto \frac{2x+3}{x-3}.$$

Soit $y \in \mathbf{R}$.

$$y \in \text{Im}(f) \iff \exists x \neq 3, \frac{2x+3}{x-3} = y \iff \exists x \neq 3, x(y-2) = 3+3y$$

Cette dernière équation admet une solution si et seulement si $y \neq 2$, donc $\text{Im}(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Exercice d'application 12.40. Déterminer l'image de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto x^2$$

➡

Exercice d'application 12.41. Déterminer l'image de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$.

$$\theta \longmapsto e^{i\theta}$$

➡

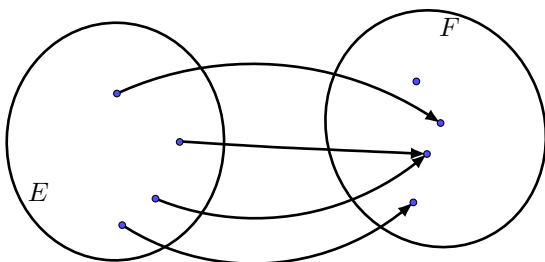
12.2.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 12.42 - Injectivité, surjectivité, bijectivité.

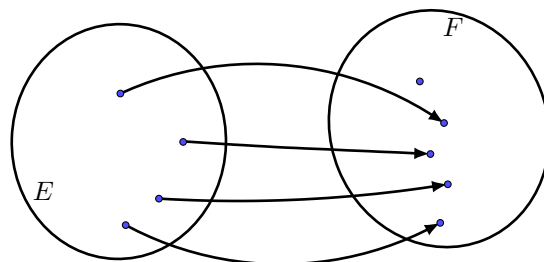
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est **injective** si l'une des conditions équivalentes suivantes est vraie :
 - (i) tout élément de F a au plus un antécédent par f ;
 - (ii) pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus une solution ;
 - (iii) $\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$.
- f est **surjective** si l'une des conditions équivalentes suivantes est vraie :
 - (i) tout élément de F a au moins un antécédent par f ;
 - (ii) pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution ;
 - (iii) $\forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y$.
- f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si l'une des conditions équivalentes suivantes est vraie :
 - (i) tout élément de F a exactement un antécédent par f ;
 - (ii) pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet exactement une solution ;
 - (iii) $\forall y \in F, \exists ! x \in E, \quad f(x) = y$.

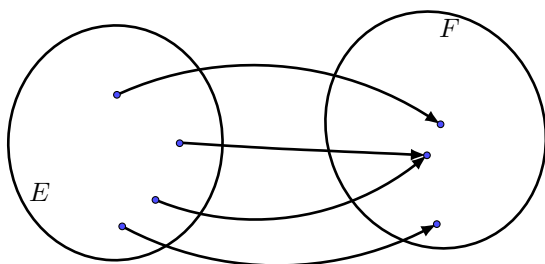
Application non injective, non surjective



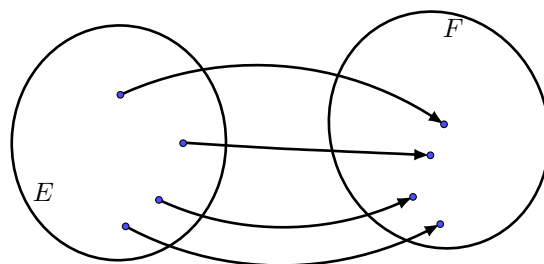
Application injective, non surjective



Application non injective, surjective



Application bijective



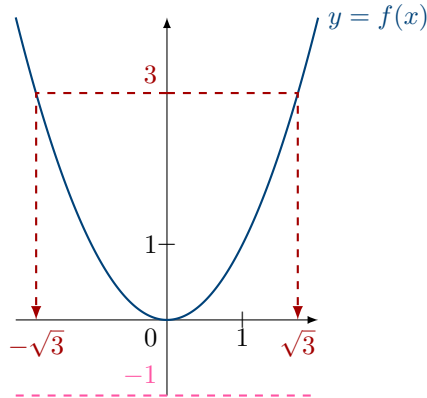
Exemple 12.43 (♥). La fonction $x \longmapsto x^2$, suivant les ensembles de départ et d'arrivée choisis, peut avoir toutes les propriétés possibles !

Application non injective, non surjective

$$f : [-2; 2] \longrightarrow [-1; 4]$$

$$x \longmapsto x^2$$

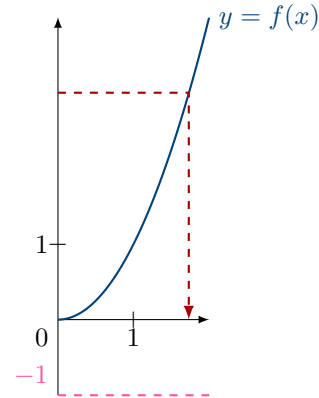
f non surjective car par exemple -1 n'a pas d'antécédent et f non injective car par exemple 3 a deux antécédents.

Application injective, non surjective

$$f : [0; 2] \longrightarrow [-1; 4]$$

$$x \longmapsto x^2$$

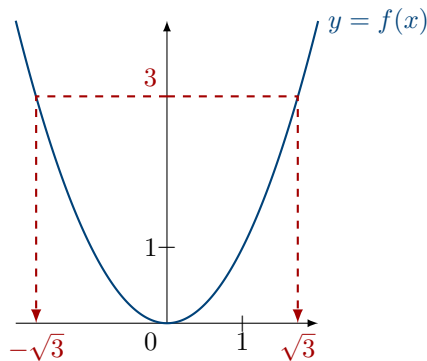
f non surjective car par exemple -1 n'a pas d'antécédent et f injective (tous les éléments de l'ensemble d'arrivée $[-1; 4]$ ont au plus un antécédent dans $[0; 2]$).

Application non injective, surjective

$$f : [-2; 2] \longrightarrow [0; 4]$$

$$x \longmapsto x^2$$

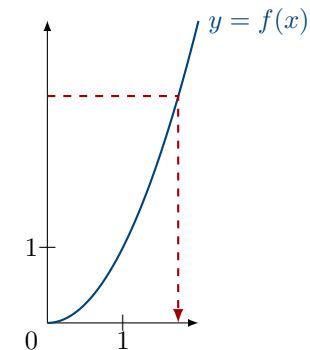
f surjective (tous les éléments de l'ensemble d'arrivée $[0; 4]$ ont au moins un antécédent par f et f non injective car par exemple 3 a deux antécédents.

Application bijective

$$f : [0; 2] \longrightarrow [0; 4]$$

$$x \longmapsto x^2$$

f est bijective (tous les éléments de l'ensemble d'arrivée $[0; 4]$ ont exactement un antécédent dans $[0; 2]$).



Exemple 12.44. Considérons la fonction $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$.

$$x \longmapsto x^2$$

- **Injectivité.**

- *Méthode 1.* Soit $x, x' \in \mathbf{R}_+$ tel que $f(x) = f(x')$. On a

$$x^2 = (x')^2 \text{ donc } \sqrt{x^2} = \sqrt{(x')^2}$$

$$\text{donc } |x| = |x'|$$

$$\text{donc } x = x'$$

on compose par la racine carrée

car $x \geq 0$, donc $|x| = x$; de même $|x'| = x'$

Ainsi, f est injective. Notons qu'on a raisonné par implications (avec des « donc ») et non par équivalences! On ne cherche pas à résoudre une équation ici, mais à établir l'égalité $x = x'$.

- *Méthode 2.* Soit $y \in \mathbf{R}_+$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. On résout :

$$f(x) = y \iff x^2 = y$$

$$\iff x = \sqrt{y} \text{ ou } x = -\sqrt{y}$$

$$\iff x = \sqrt{y}$$

$$\text{car } y \geq 0$$

$$\text{car } x \geq 0$$

Donc f est injective car, pour toute valeur de y , l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution.

- **Surjectivité.** Soit $y \in \mathbf{R}_+$. En procédant comme avant, on a

$$f(x) = y \iff x = \sqrt{y}.$$

Donc f est surjective car, pour toute valeur de y , l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.

- **Bijektivité.** L'application est bijective car elle est injective et surjective (ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution pour tout $y \in \mathbf{R}_+$).

Exercice d'application 12.45. Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (sans preuve).

$$\begin{array}{lll} 1. \quad f : \begin{array}{l} [0; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0; 2] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array} & 2. \quad g : \begin{array}{l} [0; \pi] \longrightarrow [0; 1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array} & 3. \quad h : \begin{array}{l} [0; +\infty[\longrightarrow [0; \frac{\pi}{2}[\\ x \longmapsto \text{Arctan}(x) \end{array} \end{array}$$

➡

Exercice d'application 12.46. Soit $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im m(z) > 0\}$ et $f : H \longrightarrow \mathbf{C}$. Montrer que f est injective.

$$\begin{array}{l} a \longmapsto \frac{z-i}{z+i} \\ z \longmapsto \end{array}$$

➡

Exemple 12.47 ($\frac{m}{\Rightarrow}$). L'application $\Psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}))$ est injective mais pas surjective.

$$a \longmapsto \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f' + af = 0\}$$

- Montrons l'injectivité. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $\Psi(a) = \Psi(b)$.

$$\Psi(a) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f' + af = 0\} \quad \text{et} \quad \Psi(b) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f' + bf = 0\}.$$

Considérons $f : t \longmapsto e^{-at}$. Alors $f \in \Psi(a)$. Puisque $\Psi(a) = \Psi(b)$, alors $f \in \Psi(b)$. Ainsi, $f' + af = 0 = f' + bf$ puis $(a - b)e^{-at} = 0$ puis $a - b = 0$ (car $e^{-at} \neq 0$) donc $a = b$. Ainsi, Ψ est injective.

- Montrons que Ψ n'est pas surjective. Considérons $A = \{\text{Id}_{\mathbf{R}}\}$. Puisque $\text{Id}_{\mathbf{R}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}))$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\text{Id}'_{\mathbf{R}} + a\text{Id}_{\mathbf{R}} = 1 + a\text{Id}_{\mathbf{R}}$ n'est pas la fonction nulle. Ainsi, A n'a pas d'antécédent par Ψ , ce qui prouve que Ψ n'est pas surjective.

Méthode 2. On aurait pu aussi remarquer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\Psi(a) = \{t \longmapsto \lambda e^{-at} : \lambda \in \mathbf{R}\}$, donc $\Psi(a)$ contient une infinité d'éléments quel que soit $a \in \mathbf{R}$. Or $\{\text{Id}\}$ (ou $\emptyset$, etc.) ne contient pas une infinité d'éléments, donc il n'existe pas de a réel tel que $\Psi(a) = \{\text{Id}\}$.

Proposition 12.48 - Lien entre surjectivité et image d'une application.

Soit $f : E \longrightarrow F$. La fonction f est surjective si et seulement $f(E) = F$.

Démonstration.



Méthode 12.49. Cas des fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles

Soit E, F deux parties de $\mathbf{R}$ et $f : E \longrightarrow F$.

1. **Injectivité de f .** Si f est strictement monotone, alors f est injective.
2. **Surjectivité de f .** Si f est continue, l'utilisation du théorème de la bijection peut permettre de déterminer $f(E)$. Si $f(E) = F$, alors on peut conclure que f est surjective.



ATTENTION



Cette méthode n'est valable que pour des fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans une partie de $\mathbf{R}$!

Démonstration ♥.

Exercice d'application 12.50. Montrer que $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 3\pi]$ est injective mais non surjective.
 $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \sqrt{x}$



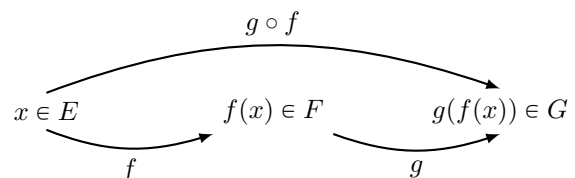
12.2.4 Composition d'applications

Définition 12.51 - Composée de deux applications.

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. On appelle **application composée** de f par g l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

$g \circ f$ se lit « g rond f ».

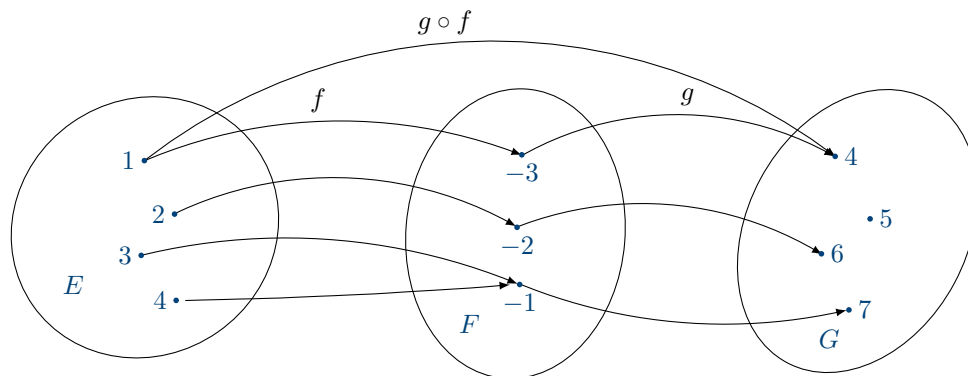


Remarque 12.52. Si E, F, G et H sont quatre ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(G, H)$, on autorise la composition $g \circ f : E \longrightarrow H$ si $g(F) \subset G$.

**ATTENTION**

Soit f, g deux applications définies sur un ensemble E et à valeurs dans E . On n'a pas en général la relation $f \circ g = g \circ f$.

Exemple 12.53. Considérons $E = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $F = \llbracket -3, -1 \rrbracket$ et $G = \llbracket 4, 7 \rrbracket$, ainsi que les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ définies par $f(1) = -3$, $f(2) = -2$, $f(3) = -1$, $f(4) = -1$ et $g(-3) = 4$, $g(-2) = 6$, $g(-1) = 7$.



On a alors $g \circ f : \llbracket 1, 4 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 4, 7 \rrbracket$ définie par $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-3) = 4$. De même, $(g \circ f)(2) = 6$, $(g \circ f)(3) = 7$ et $(g \circ f)(4) = 7$.

Exemple 12.54. Notons $f :]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[$ et $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$. On a

$$x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad x \longmapsto \ln(x)$$

$$g \circ f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

(pour déterminer l'expression de $g \circ f$, on peut écrire $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$).

Par contre, la composée $f \circ g$ n'existe pas (on ne devrait même pas l'écrire!). En effet, si $x = 1$, $g(x) = \ln(1) = 0$, et cette valeur n'appartient pas au domaine de définition de f (on ne peut donc pas calculer $f(g(x))$; encore une fois, écrire $f(g(x))$ constitue une erreur de rédaction puisque ce nombre n'existe pas!).

Exercice d'application 12.55. Notons $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Donner les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$, puis calculer $(f \circ g)(1)$ et $(g \circ f)(1)$. A-t-on $g \circ f = f \circ g$?

**Proposition 12.56 - Opérations sur les composées.**

Soient E, F, G et H des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$.

1. Le neutre de la composition est la fonction identité : $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.
2. La composition est associative : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Démonstration.

Proposition 12.57 - Composée d'applications injectives, surjectives, bijectives.

Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
Inversement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
Inversement, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
Inversement, si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Démonstration.

**ATTENTION**

Il n'y a pas de réciproque à cette propriété. Les propriétés d'une composée ne se transmettent pas aux fonctions qui la composent. Par exemple, on peut avoir $g \circ f$ bijective sans que ni g ni f ne le soit (voir l'exemple qui suit).

Exemple 12.58. Soit $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ et $g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$. On a $g \circ f = \text{Id}_{\mathbf{N}}$, donc en particulier $g \circ f$ est bijective. Pourtant, f et g ne le sont pas (f n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent par f ; g n'est pas injective car $g(0) = 0 = g(1)$, donc 0 a deux antécédents par g).

Définition 12.59 - Composition itérée.

Soit $u : E \longrightarrow E$, $n \in \mathbf{N}^*$. On peut composer u n fois avec elle-même et on note u^n le résultat. Plus précisément, on convient que $u^0 = \text{Id}_E$ et on construit les itérées successivement grâce la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u^{n+1} = u^n \circ u.$$

Plus simplement, on a :

$$u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}.$$

**ATTENTION**

$u^n \neq u \times u \times \dots \times u!$

Exercice d'application 12.60. Soit $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$.

$$x \longmapsto \frac{x}{x+1}$$

1. Justifier que f est bien définie, ce qui signifie que $[0; 1]$ est inclus dans le domaine de définition de $x \longmapsto \frac{x}{x+1}$ et que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer l'expression de f^n .

➡

12.2.5 Bijection réciproque d'une application bijective

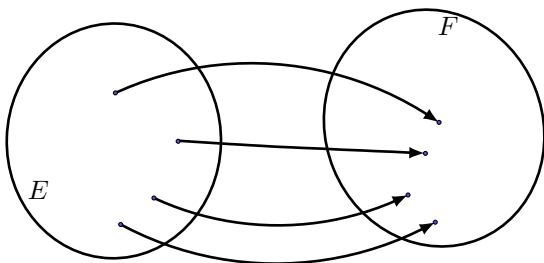
Définition 12.61 - Bijection réciproque.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, on peut définir l'application f^{-1} , appelée **bijection réciproque** de f et définie de F dans E par :

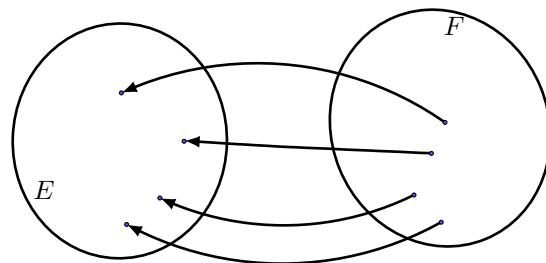
$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\forall y \in F, \forall x \in E, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$



Représentation de f



Représentation de f^{-1}

Exemple 12.62 (♥). 1. Pour tout ensemble E , la réciproque de Id_E est elle-même.

2. La réciproque de $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ est $\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto e^x \qquad x \longmapsto \ln(x)$$

3.  Notons $\mathcal{C}_0^1(\mathbf{R}) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \mid f(0) = 0\}$ (l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui s'annulent en 0). La réciproque de $\mathcal{C}_0^1(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ est $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(\mathbf{R})$.
- $$f \longmapsto f' \qquad f \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f(t) \, dt \end{bmatrix}.$$

Exercice d'application 12.63. Démontrer que $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ est bijective, et déterminer son application réciproque.

➡

Proposition 12.64 - Composée d'une fonction avec sa réciproque.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application bijective. Alors

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_E.$$

Démonstration.

Proposition 12.65 - Caractérisation de la bijectivité avec la composition.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. S'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Démonstration.

Cette proposition fournit une nouvelle méthode pour déterminer si une application est bijective : si on arrive à déterminer (deviner) directement une application que l'on pense être la réciproque de f , on introduit celle-ci, que l'on note g par exemple (ne surtout pas la noter f^{-1} tant qu'on n'a pas prouvé que f est bijective) et on vérifie que $f \circ g = \text{Id}_F$ et que $g \circ f = \text{Id}_E$.

Exercice d'application 12.66. Justifier que $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est bijective.

$$x \longmapsto x^2$$

➡

Proposition 12.67 - Opérations avec la réciproque.

- Si f est une bijection de E dans F et si g est une bijection de F dans G , alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Si f est une bijection de E dans F , alors sa bijection réciproque f^{-1} est aussi bijective et :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration.

Proposition 12.68 - Lien entre $f^{-1}(B)$ et $f^{<r>}(B)$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, B une partie de F . Alors

$$f^{-1}(B) = f^{<r>}(B).$$

Démonstration.

Remarque 12.69. Dans la proposition précédente, $f^{-1}(B)$ désigne l'image directe de l'ensemble B par l'application f^{-1} , tandis que $f^{<r>}(B)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble B par f .

En pratique, on ne note pas $f^{<r>}(B)$ l'image réciproque de B , mais plutôt $f^{-1}(B)$ (ce qui est légitime si f est bijective d'après la proposition précédente). On n'utilisera donc plus la notation $f^{<r>}$, mais plutôt f^{-1} .

**ATTENTION**

On peut écrire $f^{-1}(B)$ même si l'application f n'est pas bijective (il est toujours possible de déterminer l'image réciproque d'un ensemble). Ainsi, écrire $f^{-1}(B)$ ne signifie pas que f est bijective !

12.2.6 Famille d'éléments indexée par un ensemble

Définition 12.70 - Famille d'éléments indexée par un ensemble.

Soit X un ensemble et I un ensemble (d'indices). Une **famille** d'éléments de X indexée par I est une application de I dans X . On note une telle famille $(x_i)_{i \in I}$.

L'idée derrière cette définition est que pour chaque indice i de I , on se donne un élément x_i de X . Dans le cas où $I = \mathbf{N}$, on retrouve la notion de suite.

Exemple 12.71. La suite $(2\sqrt{n} + 1)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille de réels indexée par $\mathbf{N}$ (cela signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2\sqrt{n} + 1 \in \mathbf{R}$).

Questions de cours

1. Énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
2. Définir la notion d'ensembles disjoints.
3. Définir la notion de partition (aussi appelée recouvrement disjoint) d'un ensemble.
4. Définir l'application identité sur un ensemble E .
5. Soit E un ensemble, $A \subset E$. Définir l'indicatrice de A .
6. Définir la notion d'image directe d'un ensemble par une application.
7. Définir la notion d'image réciproque d'un ensemble par une application.
8. Soit E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Donner la relation d'inclusion existant entre A et $f^{<r>}(f(A))$, ainsi qu'entre B et $f(f^{<r>}(B))$.
9. Définir la notion d'ensemble image.
10. Soit E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Donner les trois conditions équivalentes qui traduisent que f est injective.
11. Soit E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Donner les trois conditions équivalentes qui traduisent que f est surjective.
12. Soit E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Donner les trois conditions équivalentes qui traduisent que f est bijective.
13. Soit E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Que peut-on déduire de l'égalité $f(E) = F$?
14. Que peut-on dire de la composée de deux applications injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) ?
15. Donner la caractérisation de la bijectivité avec la composition.
16. Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives. Compléter :

$$(g \circ f)^{-1} = \dots \quad \text{et} \quad (f^{-1})^{-1} = \dots$$