CHAPITRE 11 — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un seul point, et $\mathbf{K}$ désigne l'ensemble $\mathbf{R}$ ou l'ensemble $\mathbf{C}$.

11.1 Présentation générale

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre maximal de dérivation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées en physique, en biologie, en économie, etc pour étudier des modèles mathématiques des phénomènes étudiés : datation des organismes, évolution du climat, évolution de la charge électrique d'un condensateur...

Grâce aux travaux d'un physicien américain (Libby, qui a réalisé la première datation au Carbone 14 en 1950 et a obtenu le Nobel de chimie), on peut depuis le siècle dernier dater les corps organiques : dans la masse de carbone qui compose un être vivant, la proportion p de l'isotope radioactif carbone 14, ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, est constante jusqu'à sa mort. On sait qu'une matière radioactive perd une proportion constante de sa masse par unité de temps. Le carbone 14 a un noyau composé de 8 neutrons et 6 protons. Il se désintègre selon un mode β^-, c'est à dire qu'un neutron est transformé en proton et un électron est émis. On obtient alors un Azote 14, ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$, qui est stable. Le carbone 14 perd 1/8000 de sa masse en une année, il en va donc de même pour la proportion p de carbone 14 dans la masse totale de carbone dans un corps organique : la variation de la proportion de carbone 14 entre les instants t et $t+\Delta t$ est $p(t+\Delta t)-p(t) = -\dfrac{1}{8000}p(t)\Delta t$ donc $\dfrac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} + \dfrac{1}{8000}p(t) = 0$.

Si l'on considère que Δt est petit, on obtient que p vérifie pour tout $t \geqslant 0$, $p'(t) + \dfrac{1}{8000}p(t) = 0$. On dit que p est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{8000}y = 0$ d'inconnue y une fonction dérivable.

11.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

11.2.1 Définitions

Définition 11.1 - Équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \qquad (E_1)$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Définition 11.2 - Solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On appelle **solution** de (E_1) sur I toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E_1).

Définition 11.3 - Équation différentielle homogène.

L'équation différentielle (E_1) est dite **homogène** si b est la fonction nulle.
On appelle **équation homogène associée à** (E_1) (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0, \tag{H_1}$$

Dans la pratique, on écrit (E_1) sous la forme :

$$y' + a(t)y = b(t), \tag{E_1}$$

en n'écrivant pas la variable de l'inconnue y.

Pour toute la suite, on se donne a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Exercice d'application 11.4. On considère l'équation différentielle, définie sur $\mathbf{R}_+$,

$$y' + 2y = 4t^2$$

1. Donner l'équation homogène associée.
2. La fonction $f : t \longmapsto 3e^{-2t} + 2t^2 - 2t + 1$ est-elle solution de l'équation différentielle ? De l'équation homogène associée ?

➥

11.2.2 Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 1

Proposition 11.5 - Solutions de l'équation homogène.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H_1) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

où A est une primitive de la fonction a sur I.

Démonstration.

Exemple 11.6 (♥). Soit $k \in \mathbf{K}$. L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + ky = 0$$

est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-kt} \end{array} \ : \ \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

(en effet, une primitive de $t \longmapsto k$ est $t \longmapsto kt$).

Exercice d'application 11.7. Résoudre sur $]1\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{t-1} y = 0.$$

➥

Proposition 11.8 - Solutions de l'équation générale.

Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Si f_p est une solution de (E_1) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{h + f_p \ : \ h \in \mathcal{S}_H\} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + f_p(t) \end{array} \ : \ \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

Ainsi, si un connaît <u>une</u> solution particulière de (E_1), on peut obtenir <u>toutes</u> les solutions de (E_1) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H_1).

Démonstration.

On vient de voir que pour déterminer toutes les solutions de (E_1), il suffit de résoudre l'équation homogène (H_1) puis de déterminer une solution de (E_1). La résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 se mène donc toujours en trois temps :

1. recherche des solutions de l'équation homogène (cf. Proposition 11.5) ;

2. recherche d'une solution particulière ;

3. conclusion (écriture de l'ensemble des solutions de l'équation générale).

Pour déterminer une solution particulière, le premier réflexe à avoir est de chercher une solution évidente.

Exemple 11.9 (♥). Soit $k, m \in \mathbf{K}$ avec $k \neq 0$. Une solution de

$$y' + ky = m$$

est la fonction constante $t \longmapsto \frac{m}{k}$. Ainsi (on a déjà déterminé l'ensemble des solution de l'équation homogène à l'Exemple 11.6), l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-kt} + \frac{m}{k} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

11.2.3 Méthode de variation de la constante

Méthode 11.10. *Méthode de variation de la constante*

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme

$$f_p : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array},$$

où g est une fonction dérivable sur I et A est une primitive de a. Autrement dit, on a remplacé la constante d'une solution de l'équation homogène par une fonction dérivable g. On écrit ensuite, si $\mathcal{S}_E$ désigne l'ensemble des solutions de (E_1) :

$$\begin{aligned} f_p \in \mathcal{S}_E &\iff \forall t \in I, \quad f_p'(t) + a(t) f_p(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad g'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - A'(t)g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad g'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - a(t)g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t) \qquad \text{car } A' = a \\ &\iff \forall t \in I, \quad g'(t) = \mathrm{e}^{A(t)} b(t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que f_p soit solution de (E_1), il suffit que g soit une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{A(t)} b(t)$.

ATTENTION

Quand on présente une solution, il ne faut pas parler de « la » solution particulière, car il en existe une infinité.

Exemple 11.11. Résolvons l'équation $y' + y = \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.

Recherche des solutions de l'équation homogène. Une primitive de $t \longmapsto 1$ est $t \longmapsto t$, donc l'ensemble des solution de l'équation homogène est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-t} \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Recherche d'une solution particulière. Posons $f : t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbf{R}_+^\star$, où $g : \mathbf{R}_+^\star \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $t > 0$, $f'(t) = g'(t)\mathrm{e}^{-t} - g(t)\mathrm{e}^{-t}$. On a

$$\begin{aligned} f \text{ vérifie l'équation } &\textit{ssi} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}_+^\star, \quad f'(t) + f(t) = \mathrm{e}^{-t}\ln(t) \\ &\textit{ssi} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}_+^\star, \quad g'(t)\mathrm{e}^{-t} - g(t)\mathrm{e}^{-t} + g(t)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}\ln(t) \\ &\textit{ssi} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}_+^\star, \quad g'(t) = \ln(t) \end{aligned}$$

Or $t \longmapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de ln, donc une solution de l'équation est $f : t \longmapsto (t\ln(t) - t)\mathrm{e}^{-t}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda + t\ln(t) - t)\mathrm{e}^{-t} \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice d'application 11.12. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y' - t^2 y = \frac{t\mathrm{e}^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

➥

La méthode de variation de la constante assure que :

Proposition 11.13 - Existence d'une solution pour les équations linéaires d'ordre 1.

L'équation (E_1) possède au moins une solution.

Démonstration.
Puisque a est continue, elle admet une primitive A. De même, $t \longmapsto \mathrm{e}^{A(t)}b(t)$ est continue (A est continue car dérivable en tant que primitive) donc cette fonction admet aussi une primitive. La méthode de variations de la constante assure que $f_p : t \longmapsto \left(\int^t \mathrm{e}^{A(u)}b(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution de (E_1). □

Remarque 11.14. Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite : il faut pour cela être capable de déterminer deux primitives à l'aide des fonctions usuelles (une primitive A de a et une primitive de $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$).

11.2.4 Principe de superposition des solutions

Proposition 11.15 - Principe de superposition des solutions.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$ et b_1, b_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On considère

$$(E_1) : y' + ay = b_1 \qquad \text{et} \qquad (E_2) : y' + ay = b_2.$$

Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2), alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de :

$$y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2.$$

Démonstration.

Exemple 11.16. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}$ par

$$y' - 2y = \mathrm{e}^t + 3 \tag{11.1}$$

Recherche des solutions de l'équation homogène. On a immédiatement que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{2t} \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Recherche d'une solution particulière de $(E_1) : y' - 2y = \mathrm{e}^t$. Considérons g une fonction dérivable et introduisons $f_1 : t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{2t}$. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f_1' : t \longmapsto g'(t)\mathrm{e}^{2t} + 2g(t)\mathrm{e}^{2t}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_1 \text{ vérifie } (E_1) \ \textit{ssi} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}, &\quad f_1'(t) - 2f_1(t) = \mathrm{e}^t \\ \textit{ssi} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}, &\quad g'(t)\mathrm{e}^{2t} + 2g(t)\mathrm{e}^{2t} - 2g(t)\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^t \\ \textit{ssi} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}, &\quad g'(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

Une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est $t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$. Donc une solution de (E_1) est définie par $f_1(t) = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{2t} = -\mathrm{e}^t$.
Recherche d'une solution particulière de $(E_2) : y' - 2y = 3$. Ici, on a directement que $f_2 : t \longmapsto -\dfrac{3}{2}$ est une solution.
Conclusion. Le principe de superposition des solutions assure ensuite que $f_1 + f_2$ est une solution de l'équation générale (11.1). Ainsi, l'ensemble des solutions de (11.1) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t - 3/2 \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice d'application 11.17. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' - t^2 y = \dfrac{t\mathrm{e}^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}} + 2t^2$.

➥

11.2.5 Problème de Cauchy

Définition 11.18 - Condition de Cauchy.

On appelle **condition de Cauchy** toute condition imposant la valeur d'une solution de (E_1) ou de l'une de ses dérivées en un point de I.

Théorème 11.19 - Problème de Cauchy.

Soit $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{K}$. Il existe une unique solution φ de (E_1) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Démonstration.

Corollaire 11.20 - Lien entre problème de Cauchy et courbe intégrale.

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, par un point quelconque de coordonnées $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}$, il passe une courbe intégrale et une seule.

Exemple 11.21. On veut déterminer l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2y & = & \mathrm{e}^t + 3 \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

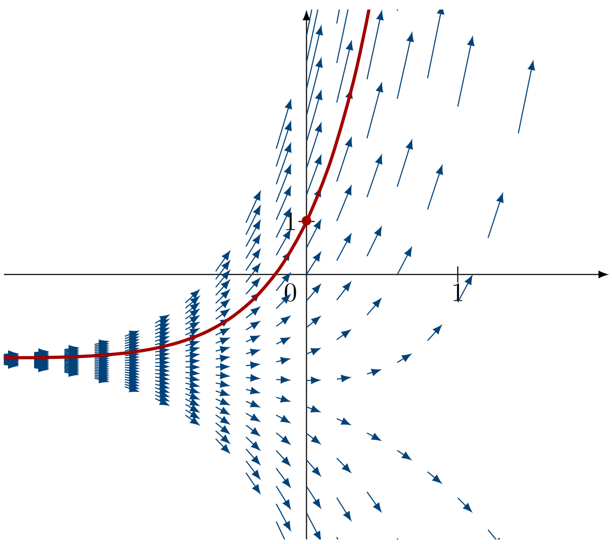
On a déjà obtenu (voir Exemple 11.16) que l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t - \dfrac{3}{2} \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{S}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t - \dfrac{3}{2}$.

$$f(0) = 1 \iff \lambda - \frac{5}{2} = 1 \iff \lambda = \frac{7}{2}.$$

Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy est $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t - \dfrac{3}{2} \end{array}$.



Exercice d'application 11.22. Déterminer la solution réelle f définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ de (E) : $\left\{\begin{array}{rcl} y'-\frac{y}{t} & = & \ln(t) \\ y(1) & = & 3 \end{array}\right.$.

➥

11.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

11.3.1 Définitions

Définition 11.23 - Équation différentielle linéaire d'ordre 2.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \quad y''(t)+ay'(t)+by(t)=c(t), \tag{E_2}$$

où a et b sont deux éléments (« constantes ») de $\mathbf{K}$, c est une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$.
On appelle **solution** de (E_2) sur I toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fois dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t)+af'(t)+bf(t)=c(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E_2).
L'équation différentielle (E_2) est dite **homogène** si c est la fonction nulle.
On appelle **équation homogène associée à** (E_2) (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \quad y''(t)+ay'(t)+by(t)=0, \tag{H_2}$$

Dans la pratique, on écrit (E_2) sous la forme :

$$y''+ay'+by=c(t), \tag{E_2}$$

en n'écrivant pas la variable de l'inconnue y.

Pour toute la suite, on se fixe $a, b \in \mathbf{K}$, $c : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$ (on ne travaillera qu'avec des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ entier) une fonction continue.

11.3.2 Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2

Définition 11.24 - Équation caractéristique.

L'**équation caractéristique** de (H_2) est l'équation du second degré suivante, d'inconnue $r \in \mathbf{K}$,

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Remarque 11.25. Le polynôme $X^2 + aX + b$ est appelé **polynôme caractéristique** de l'équation (H_2).

Proposition 11.26 - Solutions de l'équation homogène - cas complexe.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H_2).

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2. L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution complexe r_0. L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Démonstration.

Exercice d'application 11.27. Déterminer les solutions à valeurs complexes de

$$y'' + (1+2i)y' + (i-1)y = 0.$$

➥

Proposition 11.28 - Solutions de l'équation homogène - cas réel.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H_2).

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 réelles. L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution réelle r_0. L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions, qui sont des nombres complexes conjugués de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble des solutions de (H_2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Démonstration.

Remarque 11.29. Toute expression de la forme $\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$ peut s'écrire sous la forme $R\cos(x+\varphi)$ ou $R\sin(x+\psi)$. Par conséquent, lorsque $\Delta<0$, on peut aussi affirmer que l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle homogène (H_2) est

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & Re^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)\end{array} : (R,\varphi)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\right\}.$$

C'est cette forme qui est couramment utilisée en physique.

Exercice d'application 11.30. Déterminer les solutions à valeurs réelles de

$$y''+2y'+5y=0.$$

➥

Exercice d'application 11.31. Déterminer les solutions de

$$y''-6y'+5y=0.$$

➥

Exercice d'application 11.32. Déterminer les solutions de

$$y''-6y'+9y=0.$$

➥

Proposition 11.33 - Solutions de l'équation générale.

Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Si f_p est une solution de (E_2) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\{h + f_p \,:\, h \in \mathcal{S}_H\}\,.$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E_2), on peut obtenir toutes les solutions de (E_2) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H_2).

Démonstration.
La démonstration est similaire à celle de la Proposition 11.8. □

11.3.3 Recherche de solutions dans quelques cas particuliers

Comme pour les équations d'ordre 1, on commence par chercher des solutions évidentes. Sinon, on se trouvera dans l'un des trois cas suivants.

Méthode 11.34. *Cas où le second membre est une fonction polynomiale*

Si c est une fonction polynomiale de degré d, on recherche une solution particulière sous la forme $f_p : t \longmapsto R(t)$, où R est une fonction polynomiale de degré :

$$\begin{cases} d & \text{si} \quad b \neq 0 \\ d+1 & \text{si} \quad a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ d+2 & \text{si} \quad a = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Exercice d'application 11.35. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 2y = 2t^2$.

➥

Méthode 11.36. *Cas où le second membre est de la forme $t \mapsto B\mathrm{e}^{kt}$*

Soit $(B, k) \in \mathbf{K}^2$. On suppose ici que $c : t \longmapsto B\mathrm{e}^{kt}$. On cherche alors une solution particulière f_p sous la forme

- $f_p : t \longmapsto \alpha\mathrm{e}^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $f_p : t \longmapsto \alpha t\mathrm{e}^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'une des deux solutions distinctes de l'équation caractéristique (on dit que k est une racine simple de l'équation).
- $f_p : t \longmapsto \alpha t^2\mathrm{e}^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'unique racine (double) de l'équation caractéristique.

Exercice d'application 11.37. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 10\mathrm{e}^{3t}$.

➥

Méthode 11.38. *Cas où le second membre est de la forme $t \mapsto B\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto B\sin(\omega t)$*

On suppose que $c : t \longmapsto B\cos(\omega t)$ (resp. $c : t \longmapsto B\sin(\omega t)$), où $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$.
On commence par chercher une solution particulière g_p de l'équation différentielle sur $\mathbf{C}$:

$$z'' + az' + bz = B\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

en utilisant la méthode précédente. La fonction $\mathfrak{Re}(g_p)$ (resp. $\mathfrak{Im}(g_p)$) est alors solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = B\cos(\omega t)$ (resp. $y'' + ay' + by = B\sin(\omega t)$).

Exercice d'application 11.39. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 10\cos(2t)$.

➥

Remarque 11.40. La même astuce peut servir pour d'autres types de second membre. Si $c : t \longmapsto B\mathrm{e}^{kt}\cos(\omega t + \varphi)$ (resp. $c : t \longmapsto B\mathrm{e}^{kt}\sin(\omega t + \varphi)$), où $(B, k, \omega, \varphi) \in \mathbf{R}^4$, on utilise la même astuce qui est de « passer aux complexes » et on commence par trouver une solution particulière g_p de l'équation

$$z'' + az' + bz = B\mathrm{e}^{k+i(\omega t+\varphi)}.$$

11.3.4 Principe de superposition des solutions

Proposition 11.41 - Principe de superposition des solutions.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et c_1, c_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On pose

$$(E_1) : y'' + ay' + by = c_1 \qquad \text{et} \qquad (E_2) : y'' + ay' + by = c_2.$$

Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2), alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de :

$$y'' + ay' + b' = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2.$$

Démonstration.
Similaire à celle de la Proposition 11.15. □

Exercice d'application 11.42. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 2t^2 + 10\mathrm{e}^{3t} + 10\cos(2t)$.

➥

Exemple 11.43 (♨). Considérons $(E): \ y'' - y' = \sin(x)\operatorname{ch}(x)$ dans $\mathbf{R}$. Le polynôme caractéristique est $X^2 - X = X(X-1)$, donc l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & A\mathrm{e}^x + B \end{array} : (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sin(x)\operatorname{ch}(x) = \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{ix})\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathfrak{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(i+1)x} + \mathrm{e}^{(i-1)x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{(i+1)x}) + \frac{1}{2}\mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{(i-1)x}).$$

Ce calcul nous conduit à poser :

$$\begin{array}{rccc} (E_1): & y'' - y' & = & \mathrm{e}^{(i+1)x} \\ (E_2): & y'' - y' & = & \mathrm{e}^{(i-1)x} \end{array}$$

- *Recherche d'une solution de* (E_1). Soit $a \in \mathbf{C}$. Notons $f_1 : x \longmapsto a\mathrm{e}^{(i+1)x}$ (c'est la Méthode 11.36 qui nous indique qu'il faut chercher une solution particulière sous cette forme, car $i+1$ n'est pas racine du polynôme caractéristique). Cette fonction est deux fois dérivable avec $f_1' : x \longmapsto a(i+1)\mathrm{e}^{(i+1)x}$ et $f_1'' : x \longmapsto 2ia\mathrm{e}^{(i+1)x}$. On a donc

$$\begin{aligned} f_1 \text{ est solution de } (E_1) \ &\textit{ssi} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}, \ (2ia - a(i+1))\mathrm{e}^{(i+1)x} = \mathrm{e}^{(i+1)x} \\ &\textit{ssi} \ \ ai - a = 1 \\ &\textit{ssi} \ \ a = \frac{1}{i-1} \\ &\textit{ssi} \ \ a = \frac{-1-i}{2}. \end{aligned}$$

  Ainsi, $f_1 : x \longmapsto \dfrac{-1-i}{2}\mathrm{e}^{(i+1)x}$ est une solution particulière de (E_1).

- *Recherche d'une solution de* (E_2). On procède comme avant et on trouve que $f_2 : x \longmapsto \dfrac{3i+1}{10}\mathrm{e}^{(i-1)x}$ est solution de (E_2).
- Le principe de superposition des solutions assure qu'une solution particulière de (E) est définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\frac{-1-i}{2}\mathrm{e}^{(i+1)x} + \frac{3i+1}{10}\mathrm{e}^{(i-1)x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\frac{-1-i}{2}\mathrm{e}^{x}(\cos(x) + i\sin(x)) + \frac{3i+1}{10}\mathrm{e}^{-x}(\cos(x) + i\sin(x))\right) \\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^x\cos(x) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x\sin(x) + \frac{3}{20}\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + \frac{1}{20}\mathrm{e}^{-x}\sin(x). \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & A\mathrm{e}^x + B - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x\cos(x) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x\sin(x) + \frac{3}{20}\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + \frac{1}{20}\mathrm{e}^{-x}\sin(x) \end{array} : (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

11.3.5 Problème de Cauchy

Théorème 11.44 - Problème de Cauchy.

Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbf{K}^2$. Il existe une unique solution φ de (E_2) telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_1$.

Démonstration.
Admis. □

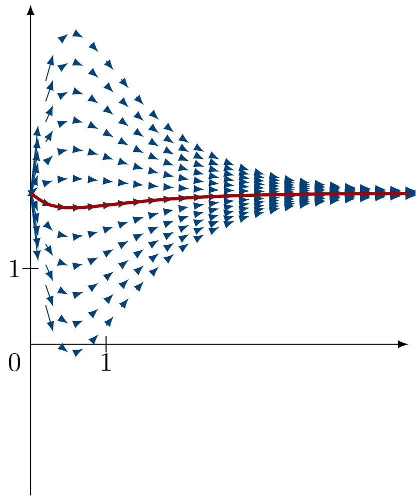
Exemple 11.45. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + 4y' + 3y & = & 6 \\ y(0) & = & 2 \\ y'(0) & = & -1 \end{array}\right.$$

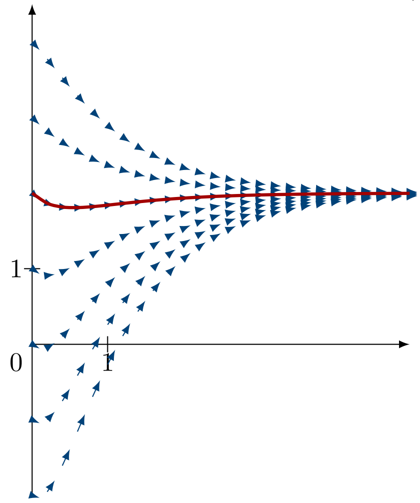
On peut aisément démontrer que l'ensemble des solutions de $y'' + 4y' + 3y = 6$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-3t} + \mu \mathrm{e}^{-t} + 2 \end{array} \;:\; (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Trajectoires vérifiant la condition $y(0) = 2$



Courbes intégrales vérifiant la condition $y'(0) = -1$



Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Soit $f : t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-3t} + \mu \mathrm{e}^{-t} + 2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 2 \\ f'(0) & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu + 2 & = & 2 \\ -3\lambda - \mu & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ -3\lambda - \mu & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1/2 \\ \mu & = & -1/2 \end{array}\right.$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + 2$.

Exercice d'application 11.46. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' - 5y' + 4y & = & 0 \\ y(0) & = & 3 \\ y'(0) & = & 6 \end{array}\right.$$

➥

Questions de cours

1. Définition de courbe intégrale.
2. Notion d'équation homogène associée à une équation différentielle linéaire (d'ordre 1 ou 2).
3. Solutions de d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.
4. Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
5. Solutions de d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (cas réel et complexe)
6. Solutions de d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
7. Principe de superposition des solutions.
8. Problème de Cauchy pour les équations d'ordre 1 et d'ordre 2.