

CHAPITRE 10

PRIMITIVES ET
INTÉGRALES

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et non vide.

10.1 Primitive d'une fonction à valeurs réelles

10.1.1 Présentation

Définition 10.1 - Primitive.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. On appelle **primitive** de f toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.
On notera $\int^x f(t) dt$ une primitive de f .

Exemple 10.2. La fonction sin est une primitive de la fonction cos sur $\mathbf{R}$.

**ATTENTION**

Dans ce chapitre, on cherche toujours des primitives sur des intervalles. En travaillant sur une partie quelconque de $\mathbf{R}$, de nombreux problèmes se posent. Par exemple, une fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ et dont la dérivée est nulle sur $\mathbf{R}^*$ n'est pas nécessairement constante (elle peut valoir -1 sur $] -\infty ; 0[$ et 1 sur $] 0 ; +\infty[$ par exemple).

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. L'**intégrale** sera étudiée plus tard dans l'année et on donnera un sens au nombre $\int_a^b f(t) dt$ dès que f est continue sur $[a; b]$. On rappelle que dans cette notation, $f(t) dt$ est appelée **intégrande**. Pour l'instant, on se contente de quelques rappels des règles de calculs valables avec cette notation.

Théorème 10.3 - Théorème fondamental de l'analyse.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I , soit $a \in I$. La fonction

$$\begin{aligned} F_a : I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a . En particulier, F_a est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'_a(x) = f(x)$.

Démonstration.

Ce résultat, qui n'est pas évident, est admis pour l'instant. Il sera démontré ultérieurement. □

Corollaire 10.4 - Existence de primitive pour les fonctions continues.

Si une fonction est continue sur un intervalle, elle y admet des primitives.

Démonstration.

Proposition 10.5 - Primitives « à une constante près ».

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I , soit F une primitive de f sur I . Alors l'ensemble des primitives de f est

$$\{F + c : c \in \mathbf{R}\}.$$

Démonstration.

Exemple 10.6. La fonction $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une primitive de $\sin$, donc il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que,

$$x \longmapsto -\int_{\pi/4}^x \cos(t) \, dt$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \sin(x) + c$. De plus, F s'annule en $\frac{\pi}{4}$, donc $0 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + c$ puis $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Théorème 10.7 - Théorème fondamental de l'analyse - autre formulation.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a).$$

On note $\left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration.

10.3

10.5

Exemple 10.8. On a $\int_0^{2\pi} \sin(t) \, dt = \left[-\cos(t)\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = 0$.

10.1.2 Calculs « simples »

Quand on cherche une primitive, on peut reconnaître la dérivée d'une fonction usuelle. Vous trouverez ci-après le tableau de primitives qu'on obtient avec les dérivées étudiées jusqu'ici. Dans chaque ligne, F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et $x \in I$. Ces primitives sont uniques à une constante près, qui est notée C .

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	$\mathbf{R}$	$\lambda x + C$
x	$\mathbf{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n (n est un entier naturel)	$\mathbf{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}_-^*$ ou $\mathbf{R}_+^*$	$\ln(x) + C$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$ est un entier)	$\mathbf{R}_-^*$ ou $\mathbf{R}_+^*$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$\mathbf{R}$	$e^x + C$
$\sin(x)$	$\mathbf{R}$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\mathbf{R}$	$\sin(x) + C$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ où $k \in \mathbf{Z}$	$\tan(x) + C$
$\tan(x)$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ où $k \in \mathbf{Z}$	$-\ln(\cos(x)) + C$
$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$x \ln(x) - x + C$
x^α ($\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$)	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
a^x ($a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$)	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{\ln(a)} a^x + C$
$\operatorname{sh}(x)$	$\mathbf{R}$	$\operatorname{ch}(x) + C$
$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbf{R}$	$\operatorname{sh}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$	$\operatorname{Arcsin}(x) + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$	$\operatorname{Arccos}(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$	$\operatorname{Arctan}(x) + C$

Exercice d'application 10.9. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Calculer $\int_1^2 f(x) \, dx$.



Proposition 10.10 - Primitive et composée.

Soit I et J des intervalles de $\mathbf{R}$, et $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable, $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue dont on note F une primitive. On suppose que $u(I) \subset J$. Alors la fonction $F \circ u$ est une primitive de $u' \times (f \circ u)$ sur I .

Démonstration.

On peut ainsi généraliser les primitives écrites dans le tableau précédent. Par exemple, si u est une fonction dérivable, une primitive de $u'e^u$ est e^u . Une primitive de $u' \cos(u)$ est $\sin(u)$, etc.

Remarque 10.11 (♥). Si F est une primitive d'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, alors, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{a}F(at + b)$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax + b)$.

Par exemple, si α est un réel non nul, une primitive de $t \longmapsto \sin(\alpha t)$ est $t \longmapsto \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)$.

Exercice d'application 10.12.

1. Déterminer une primitive de $f : t \longmapsto \frac{1}{3t-6}$ sur $] -\infty ; 2[$.
2. Déterminer une primitive de $f : t \longmapsto \frac{1}{(3t-6)^2}$ sur $] -\infty ; 2[$.

➡

Exemple 10.13. On veut calculer $\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3} dt$. On remarque que, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\frac{t}{(t^2+1)^3} = t(t^2+1)^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot (t^2+1)^{-3} = \frac{1}{2} \cdot u'(t) \cdot u(t)^{-3},$$

où $u : t \longmapsto t^2 + 1$. On en déduit

$$\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3} dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{u(t)^{-3+1}}{-3+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{-2(t^2+1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{16}.$$

Exercice d'application 10.14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt;$
2. $\int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt;$
3. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt.$

➡

Proposition 10.15 - Linéarité de l'intégrale.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit f, g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt.$$

Démonstration.

10.1.3 Linéarisation d'expressions trigonométriques

Pour calculer la primitive d'une expression polynomiale en $\sin$ et $\cos$ (resp. en sh et ch), on commence par linéariser l'expression.

Exercice d'application 10.16. Calculer une primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sin^3(t) \end{array}$.

➡

Exercice d'application 10.17. Calculer une primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{ch}^2(t) \operatorname{sh}^2(t) \end{array}$.

➡

10.1.4 Primitives de fonctions rationnelles

Théorème 10.18 - Décomposition en éléments simples.

Soit b, c, p et q quatre réels.

1. Supposons que le trinôme $x^2 + bx + c$ ait deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$. Alors il existe $A, B \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, x_2\}, \quad \frac{px + q}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

2. Supposons que le trinôme $x^2 + bx + c$ ait une unique racine réelle x_0 , de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + bx + c = (x - x_0)^2$. Alors il existe $A, B \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{x_0\}, \quad \frac{px + q}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2}.$$

Démonstration.

Remarque 10.19. La preuve précédente est constructive : elle donne des méthodes pour déterminer en pratique les valeurs A et B .

**Méthode 10.20.** Trouver une primitive d'une fonction rationnelle

Soit b, c, p, q des réels. Supposons qu'on cherche la primitive d'une fonction f définie par $f(x) = \frac{px + q}{x^2 + bx + c}$. Notons Δ le discriminant du trinôme $x^2 + bx + c$.

1. Cas où $\Delta \geq 0$. On fait une décomposition en éléments simples (il y a deux formes suivant que $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$).
2. Cas où $\Delta < 0$. Soit $x \in \mathbf{R}$. On « force » l'apparition de $2x + b$ au numérateur (qui est l'expression de la dérivée du dénominateur). Ici, cela donne :

$$\frac{px + q}{x^2 + bx + c} = \frac{\frac{p}{2}(2x + b) - \frac{pb}{2} + q}{x^2 + bx + c} = \frac{p}{2} \cdot \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} + \left(q - \frac{pb}{2}\right) \cdot \frac{1}{x^2 + bx + c}.$$

Une fois la fraction « séparée », on peut calculer une primitive pour chacune des deux nouvelles fractions obtenues.

- Pour $x \mapsto \frac{2x + b}{x^2 + bx + c}$, on a immédiatement une primitive : cette fonction est de la forme $\frac{u'}{u}$, donc une primitive est $x \mapsto \ln(|x^2 + bx + c|)$.
- Pour déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + bx + c}$, on commence par écrire le dénominateur sous forme canonique puis on cherche à obtenir une forme du type $\frac{1}{(\dots)^2 + 1}$. Ici, cela donne pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{(x + \frac{b}{2})^2 + \frac{-\Delta}{4}} = \frac{4}{-\Delta} \cdot \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}x + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}})^2 + 1}.$$

(on rappelle que $\Delta < 0$, donc $-\Delta > 0$). Sous cette forme, on a immédiatement une primitive. En effet, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1 + (\alpha x + \beta)^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arctan}(\alpha x + \beta)$, si $\alpha \in \mathbf{R}^*$ et $\beta \in \mathbf{R}$ (cf. Remarque 10.11).

Exemple 10.21. Calculons $\int_3^4 \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 2} dx$.

Le trinôme $x^2 - 3x + 2$ possède deux racines distinctes, 1 et 2. Donc pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe A, B des réels tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$,

$$\frac{3x + 2}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$, $\frac{3x + 2}{x - 2} = A + (x - 1) \frac{B}{(x - 2)}$. En prenant la limite en 1, on obtient $A = -5$.

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$, $\frac{3x + 2}{x - 1} = A \frac{x - 2}{x - 1} + B$. En prenant la limite en 2, on obtient $B = 8$.

Donc,

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int_3^4 \left(\frac{-5}{x - 1} + \frac{8}{x - 2} \right) dx \\ &= [-5 \ln(|x - 1|) + 8 \ln(|x - 2|)]_3^4 \\ &= [-5 \ln(x - 1) + 8 \ln(x - 2)]_3^4 \\ &= -5 \ln(3) + 8 \ln(2) + 5 \ln(2) - 8 \ln(1) \\ &= 13 \ln(2) - 5 \ln(3). \end{aligned}$$

Exemple 10.22. Calculons $\int_2^3 \frac{3x + 2}{2x^2 - 4x + 2} dx$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$. Donc, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} \frac{3x + 2}{2(x - 1)^2} &= \frac{3(x - 1) + 5}{2(x - 1)^2} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

On déduit que $x \mapsto \frac{3}{2} \ln(|x-1|) - \frac{5}{2} \times \frac{1}{x-1}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{3x+2}{2x^2-4x+2}$ sur $[2; 3]$.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{3x+2}{2x^2-4x+2} dx &= \int_2^3 \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2} \ln(x-1) - \frac{5}{2} \frac{1}{x-1} \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} \ln(2) - \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln(1) + \frac{5}{2} \times \frac{1}{1} \\ &= \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Exemple 10.23. Calculons une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x+1}{2x^2+x+1}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{2x^2+x+1} &= \frac{\frac{3}{4} \times (4x+1) - \frac{3}{4} + 1}{2x^2+x+1} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{2x^2+x+1} \end{aligned}$$

On calcule alors séparément une primitive des deux termes. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\int^x \frac{4t+1}{2t^2+t+1} dt = \ln(|2x^2+x+1|) = \ln(2x^2+x+1)$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{\frac{7}{16}} \times \frac{1}{\frac{16}{7} \times \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{7} \times \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\int^x \frac{\frac{1}{4}}{2t^2+t+1} dt = \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \operatorname{Arctan} \left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$$

Finalement, une primitive sur $\mathbf{R}$ de $f : x \mapsto \frac{3x+1}{2x^2+x+1}$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{3}{4} \ln(2x^2+x+1) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \operatorname{Arctan} \left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$.

Exercice d'application 10.24. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{6t-11}{3t^2-12t+17}$ sur $\mathbf{R}$.

➡

Exercice d'application 10.25. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1}$ sur $] -1 ; 1[$.

↳

Exercice d'application 10.26. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{2t}{t^2 - 10t + 25}$ sur $]5 ; +\infty[$.

↳

10.2 Intégration par parties

Définition 10.27 - Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I . On notera $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur I .

Proposition 10.28 - Fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Les fonctions polynomiales, $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\exp$, $\ln$, ch , sh , Arctan sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition.
2. Les fonctions valeur absolue, Arccos , Arcsin et les fonctions puissances sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de dérivabilité (elles ne peuvent bien sûr pas être de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine où elles ne sont pas dérivables).

Démonstration.

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est $\text{Arctan}' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, donc Arctan' est continue sur $\mathbf{R}$. Ainsi, Arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

De même, $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $\ln' : x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est continue sur $]0; +\infty[$. Donc $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

Le reste de la démonstration est similaire. □

Proposition 10.29 - Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

La somme, le produit, le quotient (s'il est bien défini) et la composée (là où elle a un sens) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration.

Admis, mais pas très difficile : la démonstration utilise par exemple le fait qu'une somme de fonctions dérivables est dérivable et qu'une somme de fonctions continues est continues (ce qu'on établira un peu plus tard dans l'année). □

Exemple 10.30. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 10.31 - Formule d'intégration par parties (IPP).

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, u et v deux fonctions définies sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b u'(t) \cdot v(t) \, dt = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b u(t) \cdot v'(t) \, dt.$$

Démonstration.

Corollaire 10.32 - Formule d'intégration par parties pour les primitives.

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Alors une primitive de $u'v$ sur I est donnée par :

$$\forall x \in I, \quad \int^x u'(t) \cdot v(t) \, dt = [uv]^x - \int^x u(t) \cdot v'(t) \, dt$$

où $[uv]^x = u(x)v(x)$.

Démonstration.

Immédiat, puisque si $c \in [a; b]$, on a avec la formule du théorème précédent

$$\int_c^x u'(t) \cdot v(t) \, dt = [uv]_c^x - \int_c^x u(t) \cdot v'(t) \, dt.$$

□

Exercice d'application 10.33. Calculer $I = \int_1^2 t^2 \ln(t) \, dt$.

➡



Méthode 10.34. Quand on demande une IPP alors qu'il n'y a pas de produit

| Quand il n'y a pas de produit et qu'on demande une IPP, il faut écrire le 1 qui se cache !

Exercice d'application 10.35. ♥ Déterminer une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

➡



Méthode 10.36. Produit d'une fonction polynomiale par une exponentielle, un sinus, un cosinus

| On veut déterminer la primitive d'une fonction de la forme $t \mapsto P(t)e^{at}$, $t \mapsto P(t)\sin(at)$, ou $t \mapsto P(t)\cos(at)$, où P est une fonction polynomiale et a un réel.

| Pour cela, une méthode efficace consiste à faire une IPP en dérivant le polynôme afin de « faire baisser son degré ». On répète jusqu'à obtenir un polynôme constant.

Exemple 10.37. Déterminons la valeur de $\int_0^1 xe^{2x} \, dx$.

On pose $u : [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $v : [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$. Pour tout

$$x \longmapsto x \qquad x \longmapsto \frac{1}{2}e^{2x}$$

$x \in [0; 1]$,

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{2x}.$$

Ainsi, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x e^{2x} \, dx &= \int_0^1 u(x) v'(x) \, dx \\
 &= \left[u(x) v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) \, dx \\
 &= \left[x \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (e^2 - 1) \\
 &= \frac{e^2 + 1}{4}
 \end{aligned}$$

Exercice d'application 10.38. Calculer une primitive de $t \mapsto (t^2 + 1)e^{2t}$ sur $\mathbf{R}$.

➡

Exercice d'application 10.39. Déterminer la primitive de $x \mapsto x^2 \sin(x)$ s'annulant en 0.

➡

10.3 Changement de variable

Théorème 10.40 - Formule de changement de variable.

Soit I, J deux intervalles non vides et non réduits à un point, f une fonction continue sur J et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $\varphi(I) \subset J$.

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $u = \varphi(t)$.

Démonstration.

Corollaire 10.41 - Formule de changement de variable pour les primitives.

Soit I, J deux intervalles non vides et non réduits à un point, f une fonction continue sur J et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $\varphi(I) \subset J$. Alors une primitive de $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ sur I est donnée par :

$$\forall x \in I, \quad \int^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int^{\varphi(x)} f(u) du.$$



Méthode 10.42. Faire un changement de variable en pratique

Voici un plan de rédaction pour effectuer un changement de variable.

1. On donne le changement de variable que l'on utilise (même s'il est donné dans l'énoncé) en précisant que la fonction φ associée est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. On calcule les « nouvelles » bornes de l'intégrale. Suivant le sens dans lequel est donné le changement de variable, on peut être amené à résoudre une équation ici.
3. On calcule la différentielle $du = \varphi'(t) dt$.
4. On transforme l'intégrande $g(t) dt$ en $f(u) du$. Pour cela on commence toujours par faire apparaître $\varphi'(t) dt$ que l'on peut remplacer par du pour ne plus y toucher.
Dans ce qui reste, on transforme les « t » en « u » grâce à la formule de changement de variable.

**ATTENTION**

Une fois le changement de variable effectué, seule la nouvelle variable doit apparaître dans l'intégrande ! Il ne doit pas rester de mélange entre la nouvelle variable et l'ancienne.

Exemple 10.43 (Nouvelle variable exprimée en fonction de l'ancienne). Calculons l'intégrale $\int_0^2 \frac{e^t}{\text{ch}(t)} dt$ en effectuant le changement de variable $u = e^t$.

1. La fonction $t \mapsto e^t$ sur $[0; 2]$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc on peut effectuer le changement de variable $u = e^t$.
2. On a

Variable	t	u
Borne du haut	2	e^2
Borne du bas	0	1

3. On a $du = e^t dt$.
4. Remplaçons la variable dans l'intégrande. On détaille ici, pour $t \in [0; 2]$:

$$\frac{e^t}{\text{ch}(t)} dt = \frac{2}{e^t + e^{-t}} e^t dt = \frac{2}{e^t + \frac{1}{e^t}} e^t dt = \frac{2e^t}{(e^t)^2 + 1} e^t dt = \frac{2u}{u^2 + 1} du.$$

On peut maintenant utiliser la formule de changement de variable et conclure :

$$\int_0^2 \frac{e^t}{\text{ch}(t)} dt = \int_1^{e^2} \frac{2u}{u^2 + 1} du = \int_1^{e^2} \frac{2u}{u^2 + 1} du = \left[\ln(|u^2 + 1|) \right]_1^{e^2} = \ln(|e^4 + 1|) - \ln(|2|) = \ln(e^4 + 1) - \ln(2).$$

Le changement de variable peut aussi être donné dans l'autre sens, à savoir l'ancienne variable exprimée en fonction de la nouvelle :

Exemple 10.44 (Ancienne variable exprimée en fonction de la nouvelle). Calculons l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ en effectuant le changement de variable $t = \cos(u)$.

1. La fonction $u \mapsto \cos(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$, donc on peut effectuer le changement de variable $t = \cos(u)$.
2. Si $u \in [0; \pi]$, on a

$$\cos(u) = 0 \iff u = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos(u) = 1 \iff u = 0.$$

Donc :

Variable	t	u
Borne du haut	0	$\pi/2$
Borne du bas	1	0

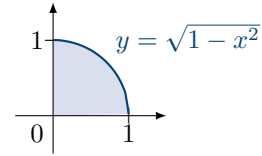
3. On a $dt = -\sin(u) du$.
4. Remplaçons la variable dans l'intégrande. On détaille ici, pour $t \in [0; 1]$,

$$\sqrt{1 - t^2} dt = \sqrt{1 - (\cos(u))^2} \times (-\sin(u) du) = -\sqrt{\sin^2(u)} \sin(u) du = -|\sin(u)| \sin(u) du.$$

On peut maintenant utiliser la formule de changement de variable et conclure :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt &= - \int_{\pi/2}^0 \underbrace{|\sin(u)|}_{\geq 0} \sin(u) du \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2u)) du \\ &= \frac{1}{2} \left[u - \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Cet exemple peut être retenu, ce calcul est très classique.
Le résultat n'est d'ailleurs pas surprenant, on retrouve
l'aire du quart de disque unité!



Remarque 10.45. Notons qu'on aurait pu procéder un peu différemment dans l'exemple précédent (et trouver le même résultat à la fin... ouf!) en choisissant pour les bornes de u les valeurs $\frac{3\pi}{2}$ et 2π .

Exercice d'application 10.46. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ définie sur $]0; +\infty[$ en posant $u = \sqrt{t}$.

➡

Exercice d'application 10.47. Calculer $\int_0^1 \frac{t+3}{\sqrt{3-2t-t^2}} dt$ en posant $t = u - 1$.



10.4 Primitives et intégrales d'une fonction réelle à valeurs complexes

Définition 10.48 - Intégrale d'une fonction réelle à valeurs complexes.

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbf{C}$. Soit a et b dans I . On définit l'**intégrale** de f entre a et b par :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (\Re(f))(x) dx + i \int_a^b (\Im(f))(x) dx.$$

Exemple 10.49. $\int_1^2 \left(e^x + \frac{i}{x} \right) dx = \int_1^2 e^x dx + i \int_1^2 \frac{1}{x} dx = e^2 - e + i \ln(2).$

Remarque 10.50. On reprend les notations de la définition précédente. La relation écrite entraîne que

$$\int_a^b \Re(f)(t) dt = \Re \left(\int_a^b f(t) dt \right) \quad \text{et} \quad \int_a^b \Im(f)(t) dt = \Im \left(\int_a^b f(t) dt \right).$$

Définition 10.51 - Primitive d'une fonction réelle à valeurs complexes.

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{C}$ et $F : I \rightarrow \mathbf{C}$. On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 10.52. $F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{C}$ est une primitive de $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{C}$.

$$\begin{array}{ccc} F :]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^x + i \ln(x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f :]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^x + i/x \end{array}$$

Proposition 10.53 - Primitive d'une exponentielle complexe.

Soit $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Une primitive de $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est la fonction $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} / \alpha \end{array}$$

Démonstration.

Notons $\alpha = a + ib$ la forme algébrique de α . On a

$$\int_a^x e^{\alpha t} dt = \int_a^x e^{at} \cos(bt) dt + i \int_a^x e^{at} \sin(bt) dt.$$

Notons $I = \int^x e^{at} \cos(bt) dt$ et $J = \int^x e^{at} \sin(bt) dt$.

Posons $u : t \mapsto \frac{e^{at}}{a}$ et $v : t \mapsto \cos(bt)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u' : t \mapsto e^{at}$ et $v' : t \mapsto -b \sin(bt)$. En intégrant par parties, on a

$$\int^x e^{at} \cos(bt) dt = \frac{1}{a} [e^{at} \cos(bt)]^x + \frac{b}{a} \int^x e^{at} \sin(bt) dt,$$

ce qui se réécrit

$$I = \frac{1}{a} (e^{ax} \cos(bx) + bJ).$$

De même, en considérant $u : t \mapsto \frac{1}{a} e^{at}$, $v : t \mapsto \sin(bt)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u' : t \mapsto e^{at}$ et $v' : t \mapsto b \cos(bt)$, on obtient après intégration par parties :

$$\int^x e^{at} \sin(bt) dt = \frac{1}{a} [e^{at} \sin(bt)]^x - \frac{b}{a} \int^x e^{at} \cos(bt) dt$$

ce qui se réécrit

$$J = \frac{1}{a} (e^{ax} \sin(bx) - bI)$$

On a donc obtenu $\begin{cases} aI - bJ &= e^{ax} \cos(bx) \\ bI + aJ &= e^{ax} \sin(bx) \end{cases}$. L'opération $bL_1 - aL_2$ conduit à $J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx))$.

L'opération $aL_1 + bL_2$ donne $I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int^x e^{\alpha t} dt &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + i \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \\ &= e^{ax} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} (\cos(bx) + i \sin(bx)) - \frac{ib}{a^2 + b^2} (\cos(bx) + i \sin(bx)) \right) \\ &= e^{ax} e^{ibx} \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= e^{ax} \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}. \end{aligned}$$

□

Exemple 10.54. La fonction $x \mapsto \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}$ est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto e^{(1+2i)x}$.



Méthode 10.55. Primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Pour trouver une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ (resp. de $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$), on calcule une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ et on considère la partie réelle (resp. imaginaire) du résultat obtenu.

Exemple 10.56. Calculons une primitive de $x \mapsto e^x \sin(2x)$ sur $\mathbf{R}$.

Une primitive de $x \mapsto e^{(1+2i)x}$ sur $\mathbf{R}$ est $x \mapsto \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}$.

Déterminons sa forme algébrique. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i} &= \frac{1}{5} (1-2i) e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \\ &= \frac{1}{5} e^x (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + \frac{i}{5} e^x (-2 \cos(2x) + \sin(2x)). \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto e^x \sin(2x)$ est $x \mapsto \frac{1}{5} e^x (-2 \cos(2x) + \sin(2x))$.

Exercice d'application 10.57. Trouver une primitive de $f : t \mapsto e^t \cos(t)$.

↳

Questions de cours

1. Donner la définition de primitive d'une fonction.
2. Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point et $a \in I$. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ admette une primitive. Le cas échéant, préciser l'unique primitive de f qui s'annule en a .
3. Tableau de primitives.
4. Énoncer la propriété de linéarité de l'intégrale.
5. Soit $b, c, p, q \in \mathbf{R}$. Donner la décomposition en élément simple de $\frac{px + q}{x^2 + bx + c}$ (il y a deux formules suivant le nombre de racines de $x^2 + bx + c$).
6. Donner la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
7. Énoncer la formule d'intégration par parties.
8. Soit I, J deux intervalles non vides et non réduits à un point, $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $\varphi(I) \subset J$. Soit $a, b \in I$. Énoncer la formule de changement de variable.
9. Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Définir l'intégrale de f entre a et b à l'aide d'intégrales de fonctions à valeurs réelles.