Chapitre 9 Équations et géométrie dans les complexes

9.1 Factorisation d'une expression polynomiale

Définition 9.1 - Fonction polynomiale.

On appelle **fonction polynomiale complexe** toute application P de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme

$$P: \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \end{array}$$

où n est un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes.

Exemple 9.2. La fonction $P: \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & 2iz^3 - \pi z^2 + 1 \end{array}$ est polynomiale.

Définition 9.3 - Racine d'une fonction polynomiale.

Soit P une fonction polynomiale complexe et $\alpha \in \mathbf{C}$. On dit que α est **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemple 9.4. -2 est racine de $P: \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z^3 - 2z + 4 \end{array}$ puisque $P(-2) = 0$.

Proposition 9.5 - Factorisation quand on connaît une racine.

Soit P une fonction polynomiale complexe et $\alpha \in \mathbf{C}$. Alors α est racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynomiale complexe Q telle que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ (cette dernière assertion signifie qu'on peut **factoriser** $P(z)$ par $z - \alpha$).

Démonstration ♨.

9.2 Équations du second degré à coefficients complexes

9.2.1 Racines carrées d'un complexe

Définition 9.6 - Racine carrée d'un complexe.

Soit Δ un nombre complexe. On appelle **racine carrée** de Δ tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

ATTENTION

La notation $\sqrt{x}$ est réservée aux nombres x qui sont réels et positifs ! On rappelle que $\sqrt{x}$ est alors l'unique racine carrée positive de x.

Exemple 9.7.
1. $e^{i\frac{\pi}{4}}$ est une racine carrée de i car $(e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
2. $2i$ et $-2i$ sont deux racines carrées de -4 puisque $(2i)^2 = -4$ et $(-2i)^2 = -4$.
3. Le nombre 0 est la seule racine carrée de 0.

Proposition 9.8 - Racines carrées d'un complexe sous forme trigonométrique.

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes dans $\mathbf{C}$ et ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre. Plus précisément, si $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$, les racines carrées de $\rho e^{i\theta}$ sont $\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.

Démonstration.

Exercice d'application 9.9. Déterminer les racines carrées de $-2i$. Vous donnerez la réponse sous forme algébrique.

➥

On peut aussi calculer les racines carrées d'un complexe donné sous forme algébrique.

Méthode 9.10. *Détermination de racines carrées sous forme algébrique* ♥♥♥

Soit $z, \delta \in \mathbf{C}$. On note $\delta = \alpha + i\beta$ la forme algébrique de δ. Alors,

$$\delta^2 = z \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^2 + \beta^2 & = & |z| \\ \alpha^2 - \beta^2 & = & \mathfrak{Re}(z) \\ 2\alpha\beta & = & \mathfrak{Im}(z) \end{array} \right.$$

Les deux premières équations permettent de déterminer α et β au signe près (on obtient donc quatre couples (α, β) de solutions possibles). La dernière équation permet de décider si α et β sont de même signe ou de signe opposé, ce qui permet de ne conserver que les deux couples (α, β) cherchés.

Démonstration.

Exercice d'application 9.11. Déterminer les racines carrées de $-3-4i$.

➥

9.2.2 Racines d'un trinôme

Théorème 9.12 - Racines d'un trinôme.

Soit a, b, c trois complexes avec a non nul, (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue complexe z. On appelle **discriminant** de (E) le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$. On a de plus la factorisation :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

2. Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ. On a de plus la factorisation :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Démonstration.

Exercice d'application 9.13. Résoudre l'équation $z^2 + (i-2)z + \frac{3}{2} = 0$ d'inconnue complexe z.

➥

Proposition 9.14 - Cas d'un trinôme à coefficients réels.

Soit a, b, c des réels avec $a \neq 0$. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. z_0 est solution de $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $\overline{z_0}$ est solution de cette même équation.

Démonstration.

Proposition 9.15 - Relations de Viète ou relations coefficients/racines.

Soit a, b, c des complexes avec $a \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les solutions (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c = 0$. Alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration.

Exercice d'application 9.16. ♨ On considère l'équation $2z^2 - iz + 1 + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. Calculer la somme des cubes des solutions de l'équation.

➥

Méthode 9.17. *Trouver rapidement les racines d'un trinôme avec les relations de Viète*

Pour trouver rapidement les racines d'un trinôme, on en cherche une « de tête » (on teste des valeurs simples : -1, 1, -2, 2, i, $-i$) et on obtient l'autre avec une relation de Viète.

Exercice d'application 9.18. Résoudre « de tête » l'équation $3z^2+(-6-15i)z-12+6i=0$ d'inconnue z complexe.

➥

Proposition 9.19 - Résolution des systèmes somme/produit.

Soit S et P deux complexes. Les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1+z_2 & = & S \\ z_1z_2 & = & P \end{array}\right.$$

d'inconnues z_1 et z_2 sont les racines de z^2-Sz+P.

Démonstration.

Supposons que z_1 et z_2 sont solutions du système. Alors la première ligne fournit $z_1=S-z_2$ puis en injectant cette quantité dans la deuxième ligne on obtient $(S-z_2)z_2=P$, puis $z_2^2-Sz_2+P=0$. De même, $z_1^2-Sz_1+P=0$. Donc z_1 et z_2 sont des racines de z^2-Sz+P.

Réciproquement, si z_1 et z_2 sont racines de P, alors les relations de Viète assure que $z_1+z_2=S$ et $z_1z_2=P$. □

Exercice d'application 9.20. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} z_1+z_2 & = & 5 \\ z_1z_2 & = & 6 \end{array}\right.$, d'inconnue $(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2$.

➥

9.3 Racines n-ièmes d'un complexe

9.3.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 9.21 - Racines n-ièmes de l'unité.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On appelle **racine n-ième de l'unité** toute solution de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue z complexe.
On note $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Remarque 9.22. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Les racines n-ièmes de l'unité sont toutes de module 1, donc $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{U}$.

Théorème 9.23 - Ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :

$$\mathbf{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{2i\frac{k\pi}{n}} \ : \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Cet ensemble contient n éléments distincts.

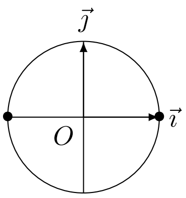
Démonstration.

Proposition 9.24 - Interprétation géométrique.

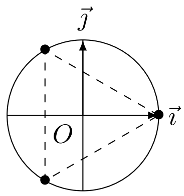
Soit $n \geqslant 3$ un entier. Les images des nombres complexes de l'ensemble $\mathbf{U}_n$ dessinent dans le plan complexe un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.

Exemple 9.25. On note usuellement $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

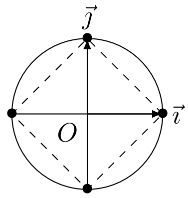
$\mathbf{U}_2 = \{1, -1\}$



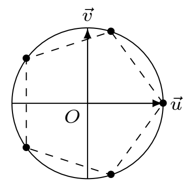
$\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}$



$\mathbf{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$



$\mathbf{U}_5$



Exercice d'application 9.26. Donner, sous forme exponentielle, toutes les racines 5-ièmes de l'unité.

➥

Proposition 9.27 - Somme des racines n-ièmes de l'unité.

Soit $n \geqslant 2$. La somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

Démonstration.

Exercice d'application 9.28. ♥ Soit $n \geqslant 2$. Déterminer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

➥

9.3.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe quelconque

Définition 9.29 - Racine n-ième d'un complexe.

Soit $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^\star$. Une **racine n-ième** de a est une solution de l'équation $z^n = a$.

Théorème 9.30 - Ensemble des racines n-ièmes.

Soit $a \in \mathbf{C}^\star$, $n \in \mathbf{N}^\star$. Puisque a est non nul, il existe $r > 0$ et $t \in \mathbf{R}$ tels que $a = re^{it}$. L'ensemble des racines n-ièmes de a est :

$$\left\{ r^{1/n} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} + \frac{it}{n} \right) \ : \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Cet ensemble contient n éléments distincts.
Notons que 0 admet une seule racine n-ième de l'unité, qui est 0.

Démonstration.

Exercice d'application 9.31. Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$.

➥

Remarque 9.32. Soit $a \in \mathbf{C}^\star$, $n \in \mathbf{N}^\star$. L'ensemble des racines n-ièmes de a s'écrit aussi

$$\left\{\omega e^{2ik\pi/n} \;:\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

où ω est une racine n-ième de a particulière. Ainsi, pour déterminer toutes les racines n-ièmes de a, il suffit d'en trouver une puis de multiplier celle-ci par toutes les n racines n-ièmes de l'unité pour obtenir les autres.

Démonstration.
Il existe $r > 0$ et $t \in \mathbf{R}$ tels que $a = re^{it}$. Puisque ω est une racine n-ième de a, il existe $p \in \mathbf{Z}$ tel que $\omega = r^{1/n}e^{2ip\pi/n+it/n}$. Commençons par démontrer que $\left\{r^{1/n}e^{2ik\pi/n+it/n} \;:\; k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\omega e^{2ik\pi/n} \;:\; k \in \mathbf{Z}\right\}$. Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} z \in \left\{r^{1/n}e^{2ik\pi/n+it/n} \;:\; k \in \mathbf{Z}\right\} &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, \quad z = r^{1/n}e^{2ik\pi/n+it/n} \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, \quad z = r^{1/n}e^{2ip\pi/n+it/n}e^{2i(k-p)\pi/n} \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, \quad z = \omega e^{2i(k-p)\pi/n} \\ &\iff z \in \left\{\omega e^{2ik\pi/n} \;:\; k \in \mathbf{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que $\left\{\omega e^{2ik\pi/n} \;:\; k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\omega e^{2ik\pi/n} \;:\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$. Pour cela, on peut s'inspirer de ce qui a été fait dans la démonstration du Théorème 9.23. □

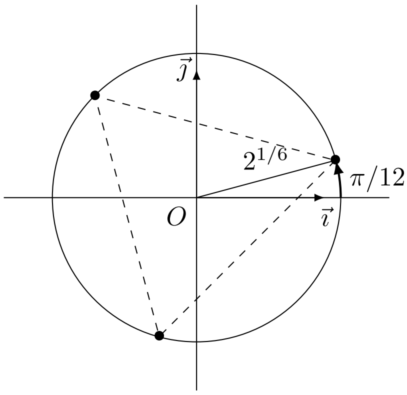
Exercice d'application 9.33. Déterminer les racines cubiques de $(7+8i)^3$.

➥

Proposition 9.34 - Interprétation géométrique.

Soit $n \geqslant 3$ un entier, $a \in \mathbf{C}^\star$. Il existe $r > 0$ et $t \in \mathbf{R}$ tels que $a = re^{it}$. Les images des racines n-ièmes de a dessinent dans le plan complexe un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $r^{1/n}$ et donc l'un des sommets est le point d'affixe $r^{1/n}e^{it/n}$.

Exemple 9.35. On a représenté ci-après les racines 3-ièmes de $1+i$:

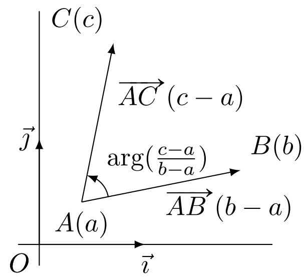


9.4 Nombres complexes et géométrie plane

9.4.1 Angles, alignement, orthogonalité

Proposition 9.36 - Lien entre angle et argument.

Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c.
Un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.



Démonstration.
On se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a, d'après la relation de Chasles sur les angles,

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{\imath}}) + (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{AC}}) - (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{AB}}).$$

L'affixe de $\overrightarrow{AC}$ est $c-a$, l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$. Notons θ un argument de $c-a$ et θ' un argument de $b-a$. Alors $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AC}}) \equiv \theta\ [2\pi]$ et $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta'\ [2\pi]$, donc $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \theta-\theta'\ [2\pi]$. Or $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(c-a)-\arg(b-a)\ [2\pi]$, puis $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \theta-\theta'\ [2\pi]$, ce qui montre qu'un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$. □

Corollaire 9.37 - Interprétation géométrique de l'écriture exponentielle de $\frac{c-a}{b-a}$.

Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. Soit $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$.

$$\frac{c-a}{b-a} = re^{i\theta} \iff \frac{AC}{AB} = r \quad \text{et} \quad \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Démonstration.

Corollaire 9.38 - Caractérisation de l'alignement, de l'orthogonalité.

Soit A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b et c.

1. A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un réel.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

Démonstration.

Exercice d'application 9.39. Soit A, B et C trois points distincts non alignés, d'affixes respectives a, b et c. On note A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Déterminer les affixes de A', B' et C'.

2. On note G le point d'affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$. Démontrer que G est le centre de gravité de triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des médianes de ABC (on rappelle que ce sont les droites (AA'), (BB') et (CC')).

➥

9.4.2 Transformations du plan

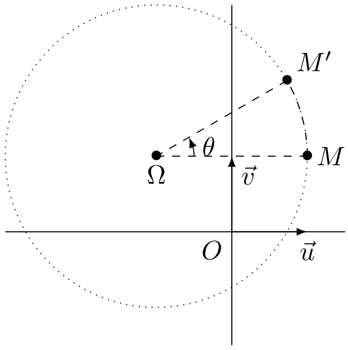
Définition 9.40 - Transformation du plan.

On appelle **transformation du plan complexe** toute application $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ bijective. On rappelle que cela signifie que pour tout point N du plan, il existe un unique point M tel que $f(M) = N$.

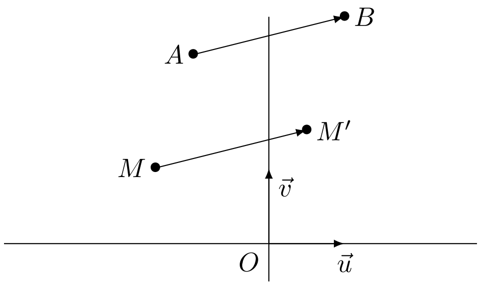
Définition 9.41 - Rotation, translation, homothétie.

1. Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :
   - $\Omega M = \Omega M'$;
   - si $M \neq \Omega$, une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$ vaut θ.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La **translation** de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.
3. Soit Ω un point du plan et k un réel. L'**homothétie** de centre Ω de rapport k est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

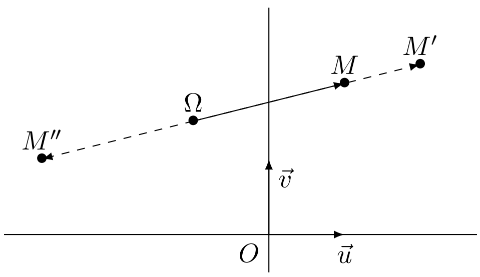
Exemple 9.42. Ω et M sont deux points du plan, et M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.



Exemple 9.43. A, B et M soit trois points du plan et M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exemple 9.44. Ω et M sont deux points du plan. M' (resp. M'') est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$ (resp. -1).



Proposition 9.45 - Écriture complexe de transformations du plan.

1. Si $\theta \in \mathbf{R}$, la transformation $z \longmapsto e^{i\theta} z$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure θ.
2. Si $b \in \mathbf{C}$, la transformation $z \longmapsto z + b$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$, où B est le point d'affixe b.
3. Si $k \in \mathbf{R}$, la transformation $z \longmapsto kz$ est l'homothétie de rapport k et de centre O.
4. La transformation $z \longmapsto \bar{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathbf{R}\vec{u}$ (l'axe des abscisses).

Démonstration.
Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbf{C}$.

1. Notons M' le point d'affixe $e^{i\theta} z$. Si $M = O$ (*i.e.* $z = 0$) alors $e^{i\theta} z = 0$, puis $M' = O$.
Supposons $M \neq O$. On a $OM' = |e^{i\theta} z| = |z| = OM$. D'autre part, d'après la Proposition 9.36, une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ est :
$$\arg\left(\frac{e^{i\theta} z - 0}{z - 0}\right) = \arg(e^{i\theta}),$$
ce qui entraîne qu'une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ vaut θ. Ainsi M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle de mesure θ.
2. Notons M' le point d'affixe $z + b$. Alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z + b - z = b$, donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OB}$, ce qui signifie que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
3. Notons M' le point d'affixe kz. Alors $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe kz et $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z, d'où
$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$
Ainsi M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.
4. Notons M' le point d'affixe $\bar{z}$. Le centre de $[MM']$ a pour affixe le nombre réel $\dfrac{z + \bar{z}}{2}$, donc il appartient à l'axe des abscisses. Par ailleurs,
$$\frac{\bar{z} - z}{1 - 0} \in i\mathbf{R},$$
donc les droites (OI) et (MM') sont perpendiculaires (où I est le point d'affixe 1). Ainsi M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses. □

Exemple 9.46. Déterminons la nature de la transformation complexe du plan f définie par $f(z) = -5z - 18$.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(f(z))$. Puisque le coefficient devant z est le réel -5, on reconnaît une homothétie de rapport -5. Notons $\Omega(\omega)$ le centre de l'homothétie. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ (dont on note $z_{\Omega\vec{M}'}$ l'affixe) est l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ (dont on note $z_{\Omega\vec{M}}$ l'affixe) par l'homothétie définie par f.

$$z_{\Omega\vec{M}'} = -5z_{\Omega\vec{M}}$$

se qui se réécrit
$$f(z) - \omega = -5(z - \omega)$$
donc $f(z) = \omega - 5(z - \omega) = -5z + (1 + 5)\omega = -5z + 6\omega$. En utilisant l'expression de f donnée, on obtient par identification $6\omega = -18$, puis $\omega = -3$.

Finalement, f correspond à l'homothétie de centre -3 et de rapport -5.

Exemple 9.47. Déterminons la nature de la transformation complexe du plan f définie par $f(z) = iz - 3i$.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(f(z))$. Puisque le coefficient devant z est $i = e^{i\pi/2}$ est un complexe de module 1, on reconnaît une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Notons $\Omega(\omega)$ le centre de la rotation. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ (dont on note $z_{\Omega\vec{M}'}$ l'affixe) est l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ (dont on note $z_{\Omega\vec{M}}$ l'affixe) par la rotation définie par f.

$$z_{\Omega\vec{M}'} = iz_{\Omega\vec{M}}$$

se qui se réécrit
$$f(z) - \omega = i(z - \omega)$$

donc $f(z) = \omega + i(z - \omega) = iz + (1 - i)\omega$. En utilisant l'expression de f donnée, on obtient par identification $1 - i = -3i$, puis $\omega = \dfrac{-3i}{1-i} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3i}{2}$.

Finalement, f correspond à la rotation de centre $\dfrac{3}{2} - \dfrac{3i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice d'application 9.48. Déterminer une expression de la fonction complexe f associée à la rotation du plan de centre $\Omega(2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

➥

Exercice d'application 9.49. Déterminer une expression de la fonction complexe f associée à l'homothétie de centre $\Omega(-2 + i)$ et de rapport 3.

➥

Questions de cours

1. Définir la notion de racine carrée d'un complexe.

2. Si $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$, quelles sont les racines carrées de $\rho e^{i\theta}$?

3. Soit $z, \delta \in \mathbf{C}$. On note $\delta = \alpha + i\beta$ la forme algébrique de δ. Compléter

$$\delta^2 = z \iff \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

4. Donner les formules permettant d'obtenir les racines d'un trinôme à coefficients complexes.

5. Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$. Si z_0 est une solution de $az^2 + bz + c = 0$, quelle est l'autre solution ?

6. Énoncer les relations de Viète (aussi appelées relations coefficients/racines).

7. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Définir la notion de racine n-ième de l'unité.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $z \in \mathbf{C}$. Compléter (on ne veut pas la définition de ce qu'est une racine n-ième de l'unité mais les formules permettant de les calculer) :

$$z \in \mathbf{U}_n \iff \dots$$

(la réponse attendue est $z \in \mathbf{U}_n \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = e^{2ik\pi/n}$, attention à la quantification de k !).

9. Que vaut la somme des racines n-ièmes de l'unité ?

10. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $z \in \mathbf{C}$, $r > 0$ et $t \in \mathbf{R}$. Compléter

$$z^n = re^{it} \iff \dots$$

(la réponse attendue est $z^n = re^{it} \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = r^{1/n} e^{2ik\pi/n + it/n}$, attention à la quantification de k !).

11. Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. Soit $r \in \mathbf{R}_+$, $\theta \in \mathbf{R}$. Compléter :

$$\frac{c-a}{b-a} = re^{i\theta} \iff \dots$$

12. Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. Caractériser l'alignement de A, B et C à l'aide de $\dfrac{c-a}{b-a}$.

13. Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. Caractériser l'orthogonalité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\dfrac{c-a}{b-a}$.

14. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Décrire géométriquement la transformation complexe $z \longmapsto e^{i\theta} z$.

15. Soit $b \in \mathbf{C}$. Décrire géométriquement la transformation complexe $z \longmapsto z + b$.

16. Soit $k \in \mathbf{R}_+$. Décrire géométriquement la transformation complexe $z \longmapsto kz$.