CHAPITRE 8 Bijections réelles et fonctions circulaires réciproques

8.1 Théorème de la bijection

Dans tout ce paragraphe D et E désignent des parties de $\mathbf{R}$.

8.1.1 Présentation

Définition 8.1 - Fonction bijective.

Soit $f : D \longrightarrow E$. On dit que f est une **bijection** ou que f est **bijective** si, pour tout $y \in E$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ admet une unique solution.

Exemple 8.2. Les fonctions suivantes sont des bijections.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$;
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$;
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$;
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [0 ; 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$.

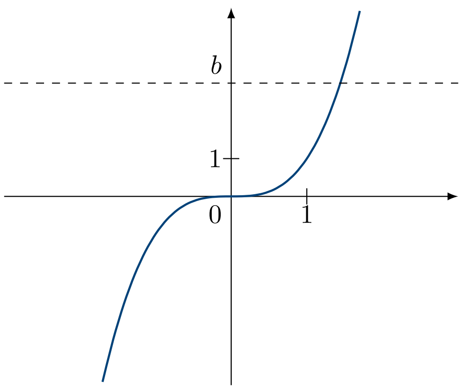
Les fonctions suivantes ne sont pas des bijections.

1. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$;
2. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

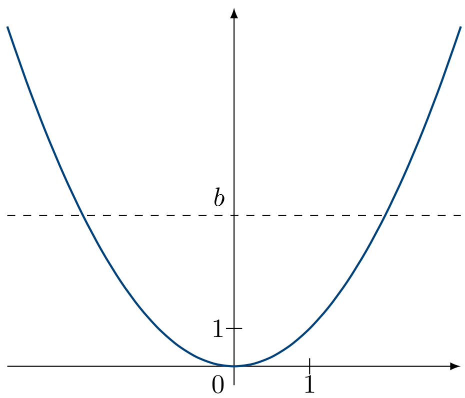
En effet, 1 a deux antécédents par f_5 (qui sont -1 et 1). De plus, -1 n'a pas d'antécédent par f_6.

Graphiquement, $f : D \longrightarrow E$ est une bijection si, et seulement si, pour tout $b \in E$, la droite horizontale d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de f en un unique point.

$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ est bijective



$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective



Définition 8.3 - Bijection réciproque.

Soit $f : D \longrightarrow E$ une bijection. On appelle **bijection réciproque** de f la fonction notée f^{-1} définie sur E et à valeurs dans D qui, à tout $y \in E$, associe l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$.

ATTENTION

$f^{-1} \neq 1/f$ en général !!

Exemple 8.4 (♥). La bijection réciproque de ln est $\ln^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^\star \\ y & \longmapsto & \mathrm{e}^y \end{array}$.

Exercice d'application 8.5. Démontrer que $f : \begin{array}{ccc} [-1\,;+\infty[& \longrightarrow &]0\,;1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{x+3} \end{array}$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

➥

Exercice d'application 8.6. Démontrer que $f : \begin{array}{ccc} [1\,;2] & \longrightarrow & [0\,;3] \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

➥

Proposition 8.7 - Composée d'une bijection et de sa bijection réciproque.

Soit $f : D \longrightarrow E$ une fonction bijective.

1. Pour tout $a \in D$, $f^{-1}(f(a)) = a$.

2. Pour tout $b \in E$, $f(f^{-1}(b)) = b$.

Démonstration. **1.** Soit $a \in D$. L'équation $f(x) = f(a)$ admet $f^{-1}(f(a))$ comme unique solution d'après la Définition 8.3. Or a est solution évidente de cette équation. Finalement, par unicité de la solution, $f^{-1}(f(a)) = a$.

2. Soit $b \in E$. Puisque f est bijective, l'équation $f(x) = b$ possède une unique solution, qui est $f^{-1}(b)$ d'après la Définition 8.3. Ainsi, $f(f^{-1}(b)) = b$. □

Définition 8.8 - Réalisation d'une bijection.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Soit $A \subset D$ et $B \subset \mathbf{R}$ tels que, pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$.
On dit que f **réalise une bijection** de A sur B lorsque la fonction

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une bijection (on rappelle que cela signifie que pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ possède une unique solution dans A).

Remarque 8.9. Une fonction qui réalise une bijection de A dans B n'est pas nécessairement bijective elle-même.

Exemple 8.10 (♥). **1.** La fonction exp réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^\star$.

2. La fonction cos réalise une bijection de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0\,;\,1]$.

Théorème 8.11 - Théorème de la bijection.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et soit $I \subset D$ un intervalle. On suppose que
- f est continue sur I ;
- f est strictement monotone sur I.

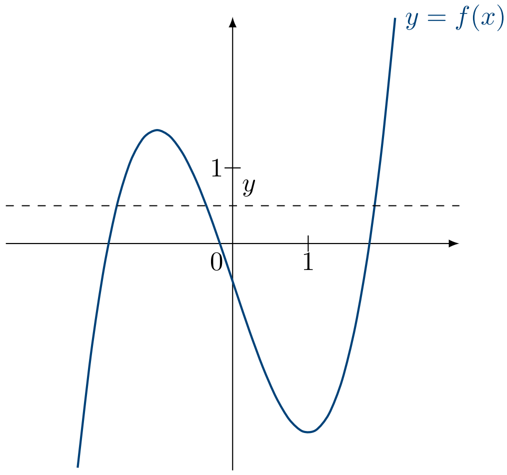
Alors f réalise une bijection de I sur un intervalle noté $f(I)$ et défini par le tableau ci-dessous :

I	$f(I)$: f est strictement croissante	$f(I)$: f est strictement décroissante
$[a\,;\,b]$	$[f(a)\,;\,f(b)]$	$[f(b)\,;\,f(a)]$
$[a\,;\,b[$	$\left[f(a)\,;\,\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\,f(a)\right]$
$]a\,;\,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\,f(b)\right]$	$\left[f(b)\,;\,\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a\,;\,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

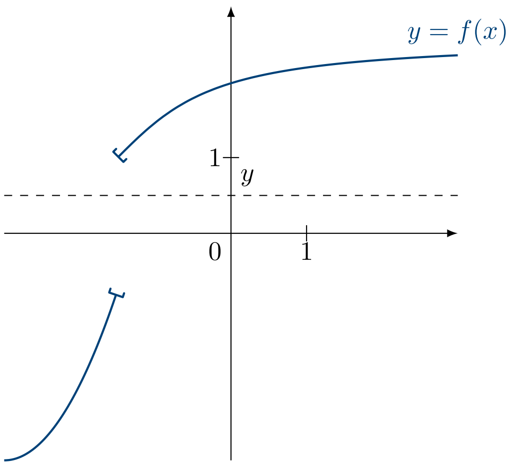
Dans ce tableau, a et b sont des réels, éventuellement égaux à $-\infty$ ou $+\infty$ lorsque cela a un sens.

Nous démontrerons plus tard ce théorème, mais nous pouvons tout de même illustrer l'intérêt des hypothèses.

1. Si f est continue sur I et si f n'est pas strictement monotone sur I, alors pour tout $y \in f(I)$ l'équation $f(x) = y$ admet une solution, mais celle-ci n'est pas nécessairement unique.
   En particulier f n'est pas bijective



2. Si f est strictement monotone sur I et si f n'est pas continue sur I, alors pour tout y dans l'intervalle image donné par le tableau du théorème, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution solution, mais pas toujours. En particulier f n'est pas bijective



Exercice d'application 8.12. Démontrer que la fonction suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} + 1 \end{array}$$

réalise une bijection de l'intervalle $[0\,;\,1[$ dans un intervalle que l'on déterminera.

➥

Exercice d'application 8.13. ♥ Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = 1 - \dfrac{1}{x}$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+^\star$.

➥

Exercice d'application 8.14. ♥ Démontrer que l'équation $2x^3 - 9x^2 + 12x = \dfrac{9}{2}$ d'inconnue x réelle admet exactement trois solutions sur $\mathbf{R}$.

➥

8.1.2 Propriétés des fonctions réciproques

Proposition 8.15 - Symétrie des courbes d'une fonction bijective et de sa réciproque.

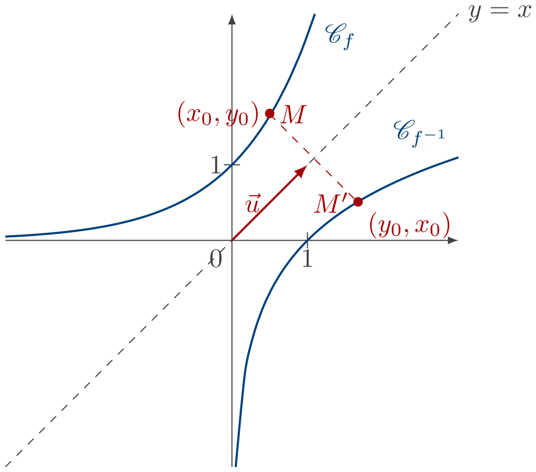
Soit $f : D \longrightarrow E$ une fonction bijective. La courbe représentative de f et celle de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).

Démonstration.
Notons $\mathscr{C}_f$ (resp. $\mathscr{C}_{f^{-1}}$) la courbe représentative de f (resp. f^{-1}). Soit $M \in \mathscr{C}_f$ de coordonnées (x_0, y_0). Soit M' de coordonnées (x', y') l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (d) d'équation $y = x$. Notons $\vec{u}$ de coordonnées $(1, 1)$ un vecteur directeur de (d). Le milieu de $[MM']$ de coordonnées $((x_0 + x')/2, (y_0 + y')/2)$ appartient à (d), et $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc :

$$\begin{cases} (y_0 + y')/2 &= (x_0 + x')/2 \\ (x' - x_0) + (y' - y_0) &= 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} -x' + y' &= x_0 - y_0 \\ x' + y' &= x_0 + y_0 \end{cases}.$$



Ainsi, après résolution du système, on obtient que M' a pour coordonnées (y_0, x_0).
On obtient alors :

$$M \in \mathscr{C}_f \iff y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0) \iff M' \in \mathscr{C}_{f^{-1}}.$$

□

Exercice d'application 8.16. Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque de

$$f : \begin{array}{ccc} [1\,; +\infty[& \longrightarrow & [-1\,; +\infty[\\ x & \longmapsto & (x-1)^2 - 1 \end{array}.$$

➥

Proposition 8.17 - Sens de variation de la bijection réciproque.

Soit $f : D \longrightarrow E$ une bijection. Si f est strictement monotone sur D, alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone sur E et de même monotonie que f.

Démonstration.

Proposition 8.18 - Continuité de la réciproque d'une bijection continue.

Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow f(I)$ une bijection.
Si f est continue sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

La démonstration de ce résultat sera vue plus tard dans le cours sur la continuité. On peut comprendre ce résultat graphiquement : puisque la courbe représentative de f^{-1} est obtenue par symétrie à partir de celle de f, qui peut être tracée « sans lever le crayon » , il en va de même pour celle de f^{-1}.

Théorème 8.19 - Dérivée d'une bijection réciproque.

Soit I, J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue strictement monotone. Soit $b \in J$. f^{-1} est dérivable en b si et seulement si f est dérivable en $f^{-1}(b)$ et $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Le cas échéant,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si f est dérivable en $f^{-1}(b)$ et si $f'(f^{-1})(b) = 0$, alors f n'est pas dérivable en b et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

On démontrera ce résultat plus tard, mais on peut comprendre le critère de dérivabilité graphiquement. Puisque les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice il en va de même pour leurs tangentes. Les pentes de ces tangentes sont donc inverses l'une de l'autre. En particulier, si la tangente à la courbe représentative de f en un point est horizontale, au point correspondant sur la courbe représentative de f^{-1}, la tangente est verticale (et donc la fonction f^{-1} n'est pas dérivable en ce point).

Proposition 8.20 - Limites de la fonction réciproque.

Soit $f :]a\,;\,b[\longrightarrow]c\,;\,d[$ une application strictement monotone, continue et bijective où a, b, c et d peuvent éventuellement être infinis. Alors $f^{-1} :]c\,;\,d[\longrightarrow]a\,;\,b[$ et on a de plus les résultats suivants.

- Si f est strictement croissante, $\lim\limits_{x \to c^+} f^{-1}(x) = a$ et $\lim\limits_{x \to d^-} f^{-1}(x) = b$.
- Si f est strictement décroissante, $\lim\limits_{x \to c^+} f^{-1}(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to d^-} f^{-1}(x) = a$.

On démontrera ce résultat un peu plus tard.

Exercice d'application 8.21. On a montré dans l'Exercice d'application 8.12 que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}+1 \end{array}$ réalise une bijection, qu'on note $\widetilde{f}$, de $[0\,;\,1[$ dans $[1\,;\,2[$ (cela signifie que la fonction $\widetilde{f} : [0\,;\,1[\longrightarrow [1\,;\,2[$ est bijective). Déterminer le tableau de variation de cette fonction.

➥

8.2 Fonctions circulaires réciproques

8.2.1 La fonction arctangente

La fonction tangente n'est pas bijective, car par exemple l'équation $\tan(x) = 0$, d'inconnue x réelle, admet une infinité de solutions. Par contre, la fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, donc elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim\limits_{x \to -\pi/2^+} \tan(x)\,;\,\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \tan(x)\right[=]-\infty\,;\,+\infty[$. Notons $\widetilde{\tan}$ cette nouvelle fonction.

Définition 8.22 - Fonction arctangente.

La fonction **arctangente**, notée Arctan, est la bijection réciproque de

$$\widetilde{\tan} : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

La fonction $\text{Arctan} : \mathbf{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ est en particulier une bijection.

Proposition 8.23 - Lien entre arctangente et tangente.

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$.
2. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la Proposition 8.7. □

ATTENTION

Si $x \notin \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ (avec x dans le domaine de définition de tangente), alors $\text{Arctan}(\tan(x)) \neq x$ (mais on peut tout de même calculer $\text{Arctan}(\tan(x))$).

Proposition 8.24 - Équations avec tangente : lien avec arctangente.

1. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et tout $y \in \mathbf{R}$, on a
$$\tan(x) = y \iff x = \text{Arctan}(y).$$
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\right\}$ et tout $y \in \mathbf{R}$,
$$\tan(x) = y \iff x \equiv \text{Arctan}(y)\ [\pi].$$

Démonstration.

Exemple 8.25 (♥). On a $\text{Arctan}(0) = 0$, $\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. En effet, $\tan(0) = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice d'application 8.26. Calculer $\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right)$.

➥

Proposition 8.27 - Imparité.

La fonction Arctan est impaire.

Démonstration.

Proposition 8.28 - Lien avec cosinus et sinus.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

1. $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

2. $\sin(\mathrm{Arctan}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Démonstration.

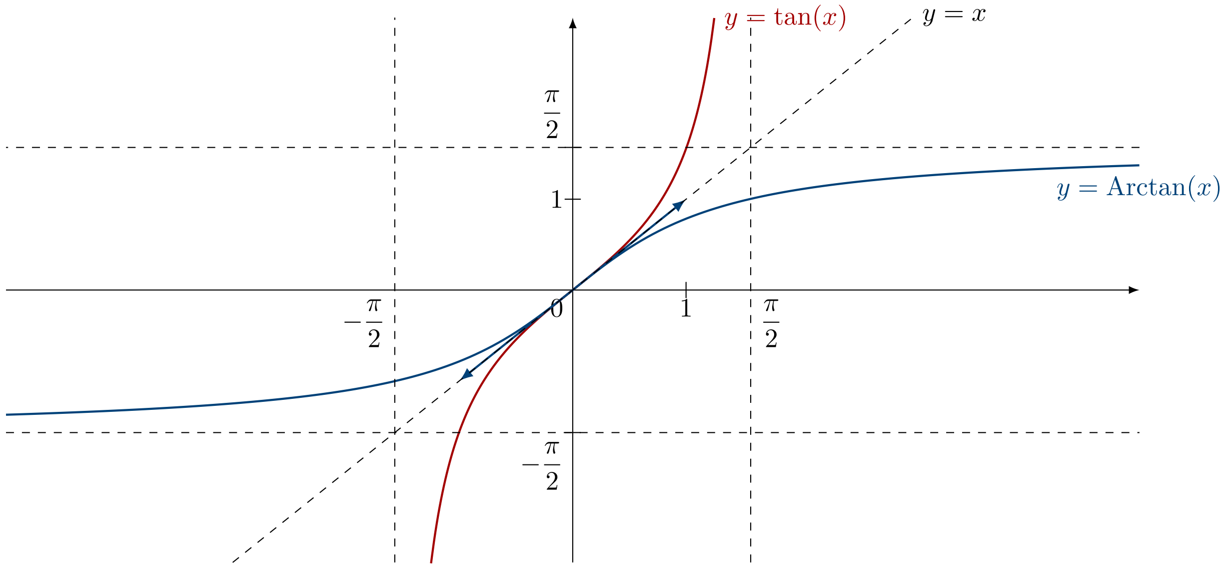
Proposition 8.29 - Régularité.

La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration.

Graphe de la fonction arctangente



8.2.2 La fonction arccosinus

La fonction cosinus n'est pas bijective, car par exemple l'équation $\cos(x) = 0$, d'inconnue x réelle, admet une infinité de solutions. Par contre, la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$, donc elle réalise une bijection de $[0\,;\,\pi]$ vers $\cos([0\,;\,\pi]) = [\cos(\pi)\,;\,\cos(0)] = [-1\,;\,1]$. Notons $\widetilde{\cos}$ cette nouvelle fonction.

Définition 8.30 - Fonction arccosinus.

La fonction **arccosinus**, notée Arccos, est la bijection réciproque de

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\cos} : & [0\,;\,\pi] & \longrightarrow & [-1\,;\,1] \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

La fonction $\text{Arccos} : [-1\,;\,1] \longrightarrow [0\,;\,\pi]$ est en particulier une bijection

Proposition 8.31 - Lien entre arccosinus et cosinus.

1. Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$.
2. Pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la Proposition 8.7. □

ATTENTION

Si $x \notin [0\,;\,\pi]$, alors $\text{Arccos}(\cos(x)) \neq x$ (bien que cette expression ait un sens). L'expression $\cos(\text{Arccos}(x))$ n'a de sens que si $x \in [-1\,;\,1]$ (donc il y a moins de risque de se tromper !).

Proposition 8.32 - Équations avec cosinus : lien avec arccosinus.

1. Si $y < -1$ ou si $y > 1$, l'équation $\cos(x) = y$, d'inconnue x réelle, n'a pas de solution.
2. Pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$ et tout $y \in [-1\,;\,1]$, on a
$$\cos(x) = y \iff x = \text{Arccos}(y).$$
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $y \in [-1\,;\,1]$,
$$\cos(x) = y \iff x \equiv \text{Arccos}(y)\ [2\pi] \text{ ou } x = -\text{Arccos}(y)\ [2\pi].$$

Démonstration. 1. Immédiat puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) \in [-1\,;\,1]$.
2. C'est la traduction du fait que $\widetilde{\cos} : [0\,;\,\pi] \longrightarrow [-1\,;\,1]$ est bijective.
3. Soit $x \in \mathbf{R}$, $y \in [-1\,;\,1]$.
$$\cos(x) = y \iff \cos(x) = \cos(\text{Arccos}(y)) \iff x \equiv \text{Arccos}(y)\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\text{Arccos}(y)\ [2\pi]$$
d'après cours de trigonométrie. □

Exemple 8.33 (♥). On a $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\text{Arccos}(1) = 0$.
En effet, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(0) = 1$ et $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, 0 \in [0\,;\,\pi]$.

Exercice d'application 8.34. Calculer $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right)$.

➥

Proposition 8.35 - Simplification de $\operatorname{Arccos}(-x)$.

Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$,

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x).$$

Démonstration ♥.

Corollaire 8.36 - Propriété de symétrie de la courbe.

La courbe représentative de Arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Démonstration.
Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de Arccos. Soit $M \in \mathscr{C}$ de coordonnées (x, y). Soit $M'(x', y')$ l'image de M par rapport à la symétrie de centre $\Omega\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Alors Ω est le milieu du segment $[MM']$, donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x+x'}{2} & = & 0 \\ \dfrac{y+y'}{2} & = & \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x \\ y' & = & \pi - y \end{array}\right.$$

On obtient alors

$$M \in \mathscr{C} \iff y = \mathrm{Arccos}(x) \iff \pi - y = \pi - \mathrm{Arccos}(x) \iff \pi - y = \mathrm{Arccos}(-x) \iff y' = \mathrm{Arccos}(x') \iff M' \in \mathscr{C}.$$

□

Proposition 8.37 - Lien avec sinus.

Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Démonstration.

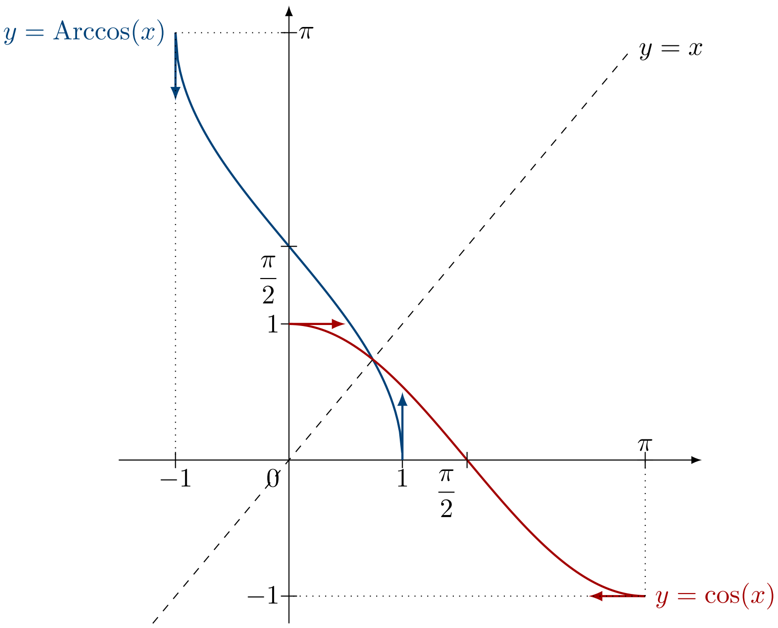
Proposition 8.38 - Régularité.

La fonction Arccos est continue sur $[-1\,;\,1]$ et dérivable sur $]-1\,;\,1[$. De plus,

$$\forall x \in \,]-1\,;\,1[\,,\quad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration.

Graphe de la fonction arccosinus



8.2.3 La fonction arcsinus

La fonction sinus n'est pas bijective, car par exemple l'équation $\sin(x) = 0$, d'inconnue x réelle, admet une infinité de solutions. Par contre, la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vers $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\,;\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1\,;\,1]$. Notons $\widetilde{\sin}$ cette nouvelle fonction.

Définition 8.39 - Fonction arcsinus.

La fonction **arcsinus**, notée Arcsin, est la bijection réciproque de

$$\widetilde{\sin} : \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;\,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

La fonction Arcsin : $[-1\,;\,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est en particulier une bijection

Proposition 8.40 - Lien entre arcsinus et sinus.

1. Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$.
2. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$.

Démonstration.

ATTENTION

Si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) \neq x$ (bien que cette expression ait un sens). L'expression $\sin(\mathrm{Arcsin}(x))$ n'a de sens que si $x \in [-1\,;\,1]$ (donc il y a moins de risque de se tromper !).

Proposition 8.41 - Équations avec sinus : lien avec arcsinus.

1. Si $y < -1$ ou si $y > 1$, l'équation $\sin(x) = y$, d'inconnue x réelle, n'a pas de solution.
2. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et tout $y \in [-1\,;\,1]$, on a
$$\sin(x) = y \iff x = \mathrm{Arcsin}(y).$$
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $y \in [-1\,;\,1]$,
$$\sin(x) = y \iff x \equiv \mathrm{Arcsin}(y)\ [2\pi] \text{ ou } x = \pi - \mathrm{Arcsin}(y)\ [2\pi].$$

Démonstration. **1.** Immédiat puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) \in [-1\,;\,1]$.

2. C'est la traduction du fait que $\widetilde{\sin} : \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1\,;\,1]$ est bijective.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$, $y \in [-1\,;\,1]$.

$$\sin(x) = y \iff \sin(x) = \sin(\mathrm{Arcsin}(y)) \iff x \equiv \mathrm{Arcsin}(y)\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \mathrm{Arcsin}(y)\ [2\pi]$$

d'après cours de trigonométrie. □

Exemple 8.42 (♥). On a $\mathrm{Arcsin}(0) = 0$, $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, $\mathrm{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
En effet, $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice d'application 8.43. Calculer $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{16\pi}{3}\right)\right)$.

➥

> **Proposition 8.44 - Imparité.**
>
> Arcsin est une fonction impaire.

Démonstration.
L'intervalle $[-1\,;\,1]$ est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in [-1\,;\,1]$. On a $\sin(\mathrm{Arcsin}(-x)) = -x$ et $\sin(-\mathrm{Arcsin}(x)) = -\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = -x$ par imparité de sin, donc $\sin(\mathrm{Arcsin}(-x)) = \sin(-\mathrm{Arcsin}(x))$. Puisque $\mathrm{Arcsin}(-x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $-\mathrm{Arcsin}(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit $\mathrm{Arcsin}(-x) = -\mathrm{Arcsin}(x)$. □

> **Proposition 8.45 - Lien avec cosinus.**
>
> Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in [-1\,;\,1]$. Puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a $\cos(\mathrm{Arcsin}(x))^2 = 1 - \sin(\mathrm{Arcsin}(x))^2 = 1 - x^2$. Or $x \in [-1\,;\,1]$, donc $1 - x^2 \geqslant 0$. De plus, $\mathrm{Arcsin}(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) \geqslant 0$. Ainsi, $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$. □

> **Proposition 8.46 - Régularité.**
>
> La fonction Arcsin est continue sur $[-1\,;\,1]$ et dérivable sur $]-1\,;\,1[$. De plus,
>
> $$\forall x \in \,]-1\,;\,1[\,,\quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration.
Puisque $\widetilde{\sin}$ est continue, Arcsin est aussi continue. De plus, sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\widetilde{\sin}' = \cos$. Or, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$,

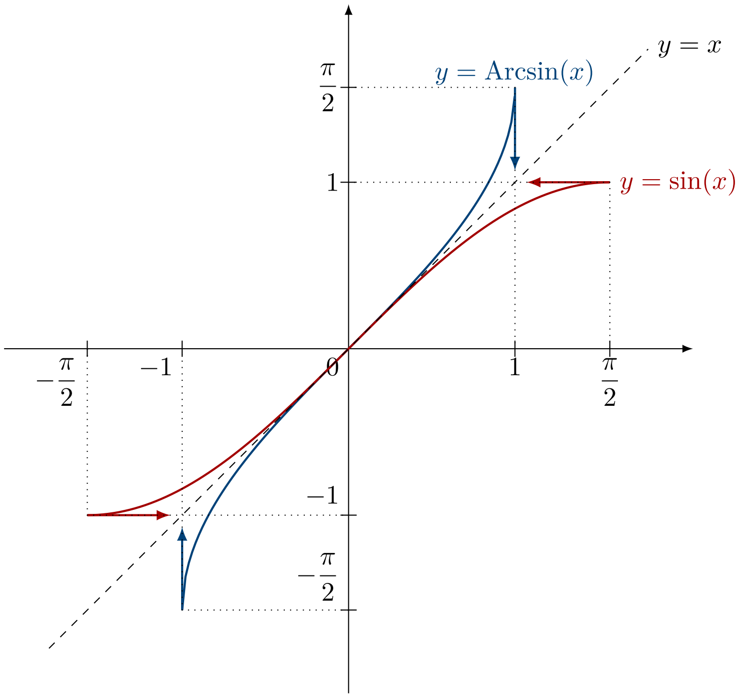
$$\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Arcsin}(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

donc Arcsin est dérivable sur $]-1\,;\,1[$. De plus, pour tout $x \in]-1\,;\,1[$,

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

d'après la proposition précédente. □

Graphe de la fonction arcsinus



Questions de cours

1. Donner la définition de fonction bijective.
2. Donner la définition de bijection réciproque.
3. Soit D, E deux ensembles, $f : D \longrightarrow E$. Compléter les formules suivantes :

   (a) Pour tout $a \in$ ..., $f^{-1}(f(a)) = \dots$ **(b)** Pour tout $b \in$ ..., $f(f^{-1}(b)) = \dots$
4. Énoncer le théorème de la bijection en précisant le tableau donnant l'intervalle image de la fonction.
5. Que peut-on dire du graphe d'une fonction bijective par rapport au graphe de sa fonction réciproque ?
6. Soit D, E deux ensembles, $f : D \longrightarrow E$ une fonction bijective strictement monotone. Que peut-on dire du sens de variation de f^{-1} ?
7. Soit I, J deux intervalles, $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective strictement monotone. Soit $b \in J$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f^{-1} soit dérivable en b et donner le cas échéant la formule permettant de calculer $(f^{-1})'(b)$.
8. Définir la fonction arctangente.
9. Compléter les formules suivantes :

   (a) Pour tout $x \in$ ..., $\tan(\operatorname{Arctan}(x)) = \dots$ **(b)** Pour tout $x \in$ ..., $\operatorname{Arctan}(\tan(x)) = \dots$
10. Compléter, pour tout $x \in \mathbf{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z} \right\}$ et tout $y \in \mathbf{R}$,
$$\tan(x) = y \Longleftrightarrow \dots$$
11. Compléter, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \dots \quad \text{et} \quad \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \dots$$
12. Définir la fonction arccosinus.
13. Compléter les formules suivantes :

   (a) Pour tout $x \in$ ..., $\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = \dots$ **(b)** Pour tout $x \in$ ..., $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = \dots$
14. Compléter, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $y \in [-1\,;\,1]$,
$$\cos(x) = y \Longleftrightarrow \dots$$
15. Compléter, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$,
$$\operatorname{Arccos}(-x) = \dots$$
16. Compléter, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$,
$$\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \dots$$
17. Définir la fonction arcsinus.
18. Compléter les formules suivantes :

   (a) Pour tout $x \in$ ..., $\sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = \dots$ **(b)** Pour tout $x \in$ ..., $\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = \dots$
19. Compléter, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $y \in [-1\,;\,1]$,
$$\sin(x) = y \Longleftrightarrow \dots$$
20. Compléter, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$,
$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \dots$$
21. Donner les domaines de dérivabilité ainsi que l'expression des dérivées des fonctions arctangente, arcsinus et arccosinus.
22. Quelle est la parité (s'il y en a une) des fonctions arctangente, arcsinus, arccosinus ?