Chapitre 7 Fonctions usuelles

7.1 Fonctions logarithmes

7.1.1 Logarithme népérien

On admet le résultat suivant, qui sera démontré plus tard dans l'année.

Proposition 7.1 - Existence d'une primitive pour une fonction continue.

Toute fonction réelle f continue sur un intervalle I possède une **primitive**. On rappelle que cela signifie qu'il existe une fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
Si F_0 est une primitive de f, alors toute primitive de f est de la forme $F_0 + c$, où $c \in \mathbf{R}$.
De plus, pour tout $a \in I$ et $b \in \mathbf{R}$, il existe une unique primitive de f qui vaut b en a.

Définition 7.2 - Logarithme népérien.

On appelle **logarithme népérien** et on note ln la primitive nulle en 1 de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}.$$

Proposition 7.3 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. Pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Démonstration.

Corollaire 7.4.

Pour tout $(x, n) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « $\ln(x^n) = n\ln(x)$. »
On a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$ donc H_0 est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x \cdot x^n) = \ln(x) + \ln(x^n) = \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x)$$

donc H_{n+1} est vraie. Donc le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Soit $n \in \mathbf{Z}_-$. On a

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x)$$

car $-n \in \mathbf{N}$ et on peut appliquer le résultat démontré plus haut par récurrence. □

Proposition 7.5 - Propriétés analytiques.

1. La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. En particulier, ln est une fonction strictement croissante.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration. **1.** Découle de la définition du logarithme népérien.

2. On justifiera que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ dans le chapitre *Bijections réelles et fonctions circulaires réciproques.*

Puisque pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ par composition de limites. □

Corollaire 7.6.

1. Soit I un intervalle et $u : I \longrightarrow]0\,;+\infty[$ une fonction dérivable. Alors $\ln \circ u = \ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.
2. Soit I un intervalle et $u : I \longrightarrow \mathbf{R}^\star$ une fonction dérivable. Alors $\ln \circ |u| = \ln(|u|)$ est dérivable et $(\ln(|u|))' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration.
Cela provient directement du théorème de dérivation d'une composée. □

Proposition 7.7 - Une limite à connaître.

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration.

Proposition 7.8 - Une inégalité à connaître.

Pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. On peut la réécrire et obtenir, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

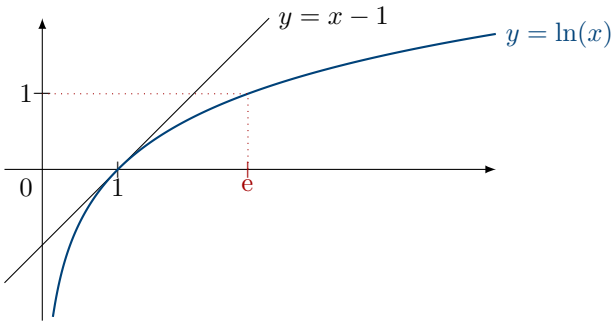
Démonstration.

Définition 7.9 - Nombre de Néper.

On appelle **nombre de Néper** et on note e l'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$. On peut mémoriser que $\mathrm{e} \approx 2,72$.

On donnera bientôt des arguments pour justifier qu'une telle équation admet une unique solution.

Graphe de la fonction logarithme népérien



7.1.2 Logarithme dans une base quelconque

Définition 7.10 - Logarithme en base a.

Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star \setminus \{1\}$. On appelle **logarithme en base** a l'application

$$\begin{array}{rccc} \log_a : & \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

Si $a = 2$, la fonction est appelée **logarithme binaire**. Si $a = 10$, la fonction est appelée **logarithme décimal**.

Remarque 7.11. Pour $a = \mathrm{e}$ dans la définition précédente, on retrouve le logarithme népérien.

Remarque 7.12.

1. Le logarithme décimal est couramment utilisé en chimie (notamment en pH-métrie), en acoustique (définition du décibel) et plus généralement dans différents domaines pour représenter sur des échelles logarithmiques des phénomènes variant de plusieurs ordres de grandeurs.
2. Le logarithme binaire est souvent utilisé en informatique. En effet, un nombre entier n s'écrit en binaire avec un nombre de chiffres qui est l'entier strictement supérieur à $\log_2(n)$. C'est le nombre de bits minimal qui sera nécessaire pour stocker n en mémoire.

   Par exemple 13 s'écrit en binaire 1101, et $\log_2(13) = \dfrac{\ln(13)}{\ln(2)} \approx 3,7$.

Proposition 7.13 - Principales propriétés des logarithmes.

Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star \setminus \{1\}$.

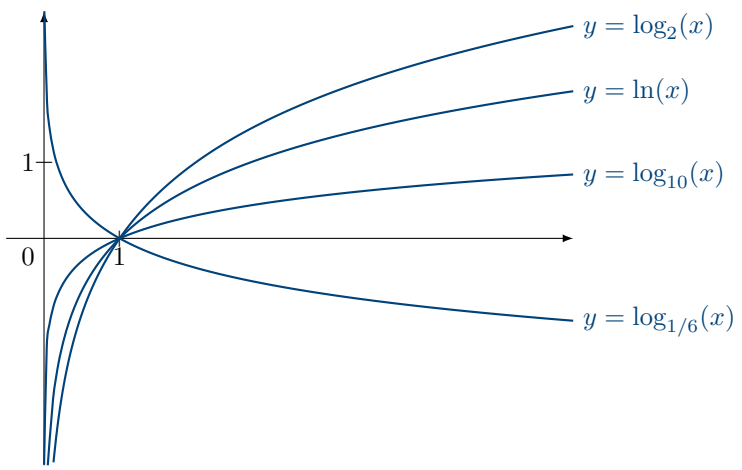
1. On a $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.
2. La fonction $\log_a$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $x > 0$, $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.
3. Pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
4. Pour tous $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $n \in \mathbf{Z}$, $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$.
5. Supposons $a > 1$.
   - $\log_a$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^\star$.
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty$.
   - Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $n \in \mathbf{N}$. On a l'équivalence $a^n \leqslant x < a^{n+1} \iff n \leqslant \log_a(x) < n+1$.
6. Supposons $a < 1$.
   - $\log_a$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^\star$.
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty$.
   - Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $n \in \mathbf{N}$. On a l'équivalence $a^{n+1} < x \leqslant a^n \iff n \leqslant \log_a(x) < n+1$.

Démonstration.
Ces propriétés découlent immédiatement de celles du logarithme népérien. □

Remarque 7.14. En particulier, pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$2^n \leqslant x < 2^{n+1} \iff n \leqslant \log_2(x) < n+1 \quad \text{et} \quad 10^n \leqslant x < 10^{n+1} \iff n \leqslant \log_{10}(x) < n+1.$$

Graphes de fonctions logarithmes



7.2 Fonction exponentielle

On admet le résultat suivant.

Définition 7.15 - Fonction exponentielle.

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette unique fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée exp.

Proposition 7.16 - Lien avec la fonction logarithme népérien.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\exp(\ln(x)) = x$.

Démonstration.

Remarque 7.17. On en déduit que

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b \quad \text{et} \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+^\star,\ \ln(a) = \ln(b) \iff a = b.$$

Proposition 7.18 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

Démonstration.

Ces propriétés ressemblent à celles sur les fonctions puissances (rappelées plus loin dans ce chapitre), ce qui justifie qu'on note, pour tout $x \in \mathbf{R}$, e^x au lieu de $\exp(x)$.

Corollaire 7.19 - Signe de la fonction exponentielle.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.

Démonstration.

Proposition 7.20 - Dérivée, sens de variation.

La fonction exp est dérivable et $\exp' = \exp$. En particulier, exp est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Démonstration.
Par définition, exp est dérivable et $\exp' = \exp$. Or on a obtenu avant que $\exp > 0$, donc exp est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. □

Corollaire 7.21.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $\exp \circ u = \exp(u)$ est dérivable sur I et $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$.

Démonstration.
Application directe du théorème de dérivation d'une composée. □

Proposition 7.22 - Une inégalité à connaître.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

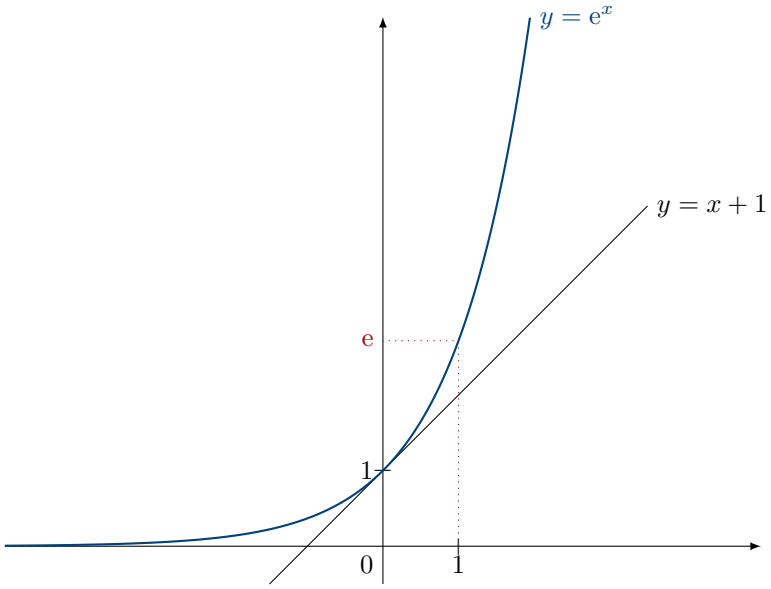
Démonstration.
On pourrait étudier le signe de $f : x \longmapsto \exp(x) - x - 1$. On peut faire un peu plus rapide puisqu'on sait que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$, donc en composant par la fonction exp croissante on en déduit $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. L'inégalité reste vraie pour $x \leqslant -1$ car $1 + x \leqslant 0 < \mathrm{e}^x$. □

Proposition 7.23 - Limites à connaître.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$; **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$; **3.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration.

Graphe de la fonction exponentielle



7.3 Fonctions puissances de nombres réels

7.3.1 Rappels sur les puissances entières

Définition 7.24 - Puissance entière.

Pour tout réel x et tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Pour tout réel x non nul et tout entier $n < 0$, on pose $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ (x^{-n} est défini avant puisque $-n > 0$).
Par convention, on pose pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^0 = 1$.

Définition 7.25 - Fonctions puissances de nombres entiers.

Soit $n \in \mathbf{Z}$. On appelle **fonction puissance** n la fonction $x \longmapsto x^n$.

- Si $n \geqslant 0$, cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$.
- Si $n < 0$, cette fonction est définie sur $\mathbf{R}^\star$.

Définition 7.26 - Puissance inverse.

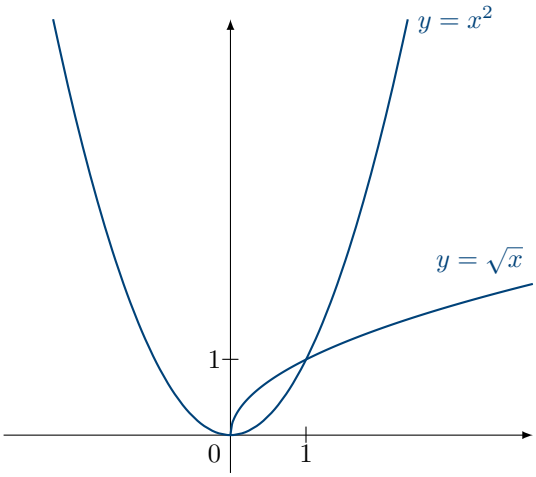
Soit $x \in \mathbf{R}$.

- Si $q > 0$ est un entier pair et $x \geqslant 0$, alors l'équation $y^q = x$ d'inconnue réelle y admet une unique solution positive. Cette solution est notée $\sqrt[q]{x}$.
  On peut ainsi définir une fonction $y \longmapsto \sqrt[q]{y}$ sur $\mathbf{R}_+$.
- Si $q > 0$ est un entier impair, alors l'équation $y^q = x$ d'inconnue réelle y admet un unique solution. Cette solution est notée $\sqrt[q]{x}$.
  On peut ainsi définir une fonction $y \longmapsto \sqrt[q]{y}$ sur $\mathbf{R}$.

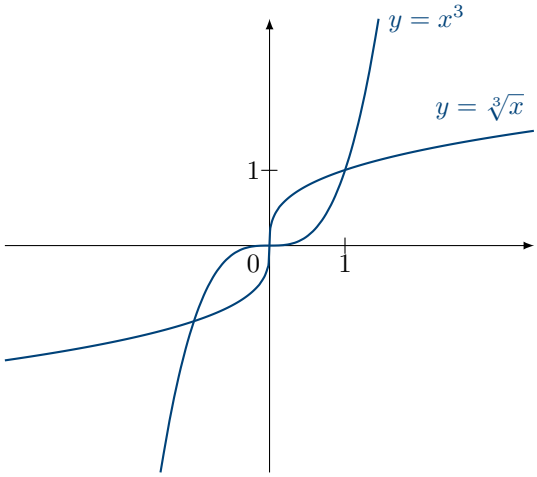
Exemple 7.27. **1.** On a $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$ et $2 \geqslant 0$.

2. On a $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$.

Graphe des fonctions carré et racine carrée



Graphe des fonctions cube et racine cubique



7.3.2 Puissances réelles quelconques

Définition 7.28 - Fonction puissance réelle.

Soit $a \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$. Pour tout $x > 0$, on note $x^a = \exp(a\ln(x))$.

- Si $a > 0$, la **fonction puissance d'ordre** a est définie par $\begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^a & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$.
- Si $a < 0$, la **fonction puissance d'ordre** a est définie par $\begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array}$.

Remarque 7.29. Soit $x > 0$. Si $n \in \mathbf{Z}$, la définition de x^n rappelée dans le paragraphe précédent coïncide avec la définition « sous forme exponentielle » donnée dans la définition précédente. En effet, $\exp(n\ln(x)) = \exp(\ln(x^n)) = x^n$.

Remarque 7.30. Soit $a \in \mathbf{N}^\star$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $x^{1/a} = \sqrt[a]{x}$.

En résumé, soit $a \in \mathbf{R}$,

- si $a \in \mathbf{N}$, $x \longmapsto x^a$ est définie sur $\mathbf{R}$;
- si $a \in \mathbf{Z}_-^\star$, $x \longmapsto x^a$ est définie sur $\mathbf{R}^\star$;
- si $a \in \mathbf{R}_+\backslash\mathbf{Z}$, $x \longmapsto x^a$ est définie sur $\mathbf{R}_+$;
- si $a \in \mathbf{R}_-\backslash\mathbf{Z}$, $x \longmapsto x^a$ est définie sur $\mathbf{R}_+^\star$.

Proposition 7.31 - Signe de x^a.

Pour tout $a \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$, pour tout $x > 0$, $x^a > 0$.

Démonstration.
Immédiat avec la définition d'une puissance réelle et en utilisant que $\exp > 0$. □

Proposition 7.32 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x, y, a) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2 \times \mathbf{R}$, $(x \times y)^a = x^a \times y^a$.
2. Pour tout $(x, a, b) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}^2$, $x^{a+b} = x^a \times x^b$.
3. Pour tout $(x, a, b) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}^2$, $(x^a)^b = x^{a\times b}$.

Démonstration.

Corollaire 7.33 - Extension des propriétés algébriques de $\ln$ et $\exp$.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$.
2. Pour tout $(x, a) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$, $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

Démonstration. **1.** Immédiat avec la proposition précédente, puisque $\mathrm{e} > 0$.
2. Soit $(x, a) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$. $\ln(x^a) = \ln(\exp(a\ln(x))) = a\ln(x) = \ln(x^a)$. □

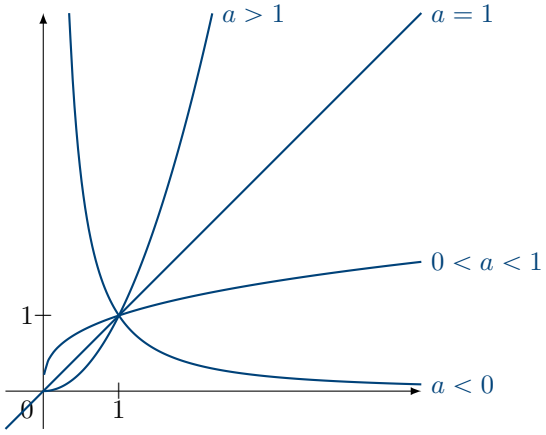
Proposition 7.34 - Propriétés analytiques.

Soit $a \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$. Notons $f_a : x \longmapsto x^a$.

1. f_a est continue sur son ensemble définition.
2. **(a)** Si $a > 1$, f_a est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$, $f_a'(x) = \begin{cases} ax^{a-1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
   (b) Si $a < 1$, f_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f_a'(x) = ax^{a-1}$.
3. **(a)** Si $a > 0$, la fonction f_a est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) Si $a < 0$, la fonction f_a est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
4. **(a)** Si $a < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$.
   (b) Si $a > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.

Démonstration.

Graphes de fonctions puissances a



ATTENTION

Pour étudier des limites, des dérivées avec les fonctions puissances (surtout quand la variable apparaît dans l'exposant !), il faut revenir à la forme exponentielle.

Exercice d'application 7.35. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et l'expression de la dérivée de $f : x \longmapsto 2^x$.

➥

Exercice d'application 7.36. ♥ Déterminer la limite en 0 de $f : x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

➥

Remarque 7.37. Puisque $\mathrm{e} > 0$, on peut définir la fonction « e puissance x » pour toute valeur de x réelle. Notons g cette fonction définie sur $\mathbf{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \exp(x\ln(\mathrm{e})) = \exp(x)$, ce qui justifie la notation $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

7.4 Comparaison asymptotique des fonctions introduites

Théorème 7.38 - Théorème des croissances comparées.

Soit $a, b > 0$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^b\,|\ln(x)|^a = 0$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}} = 0$;

4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^b\,\mathrm{e}^{ax} = 0$.

Démonstration. **1.**

- On commence par démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

  Soit $x > 0$. On a $\ln(x^{1/2}) \leqslant x^{1/2} - 1$ et a fortiori, on a $\ln(x) \leqslant x^{1/2}$, c'est-à-dire $\ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$. En divisant par x, on obtient pour tout $x > 1$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

  Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient avec le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

- Soit $x > 0$. Posons $X = x^{b/a}$. On a

$$\frac{\ln(x)^a}{x^b} = \frac{\ln(X^{a/b})^a}{(X^{a/b})^b} = \frac{(\frac{a}{b}\ln(X))^a}{X^a} = \left(\frac{a}{b}\right)^a \left(\frac{\ln(X)}{X}\right)^a.$$

  Comme $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et, par composition de limites, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \left(\frac{\ln(X)}{X}\right)^a = 0$ (car $a > 0$), on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$.

2.

- Commençons par démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.

  Soit $x > 0$. Posons $X = \dfrac{1}{x}$. On a

$$x\ln(x) = \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\ln(X)}{X}.$$

  Or $X \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln(X)}{X} = 0$ d'après **1.**.

- Soit $x > 0$.

$$x^b\,|\ln(x)|^a = (X^{a/b})^b \left|\ln(X^{a/b})\right|^a = X^a \left|\frac{a}{b}\ln(X)\right|^a = \left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} |X\ln(X)|^a.$$

  Or $X \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^b\,|\ln(x)|^a = \lim_{X\to 0^+} \left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} |X\ln(X)|^a = 0$ car $a > 0$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^x$. On a
$$\frac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}} = \frac{\ln(X)^b}{X^a}.$$
Or $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)^b}{X^a} = 0$ d'après **1.**

4. Soit $x \in \mathbf{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^x$. On a
$$|x|^b \mathrm{e}^{ax} = |\ln(X)|^b X^a.$$
Or $X \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^b \mathrm{e}^{ax} = \lim\limits_{X\to 0} |\ln(X)|^b X^a = 0$. □

On retiendra en particulier :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$$

Cette proposition exprime grossièrement que les exponentielles « l'emportent » sur les puissances qui « l'emportent » sur les logarithmes. Ce résultat, même s'il a l'air restrictif, permet de traiter tous les cas de produits ou quotients de fonctions du type précédent. Même si revenir à l'énoncé exact du théorème est un exercice de style, il faut savoir faire cette opération pour être convaincu de sa légitimité.

Exercice d'application 7.39. Étudier la limite en $+\infty$ de $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-3x} x^4 \ln(x)^2 \end{array}$.

➥

7.5 Fonctions hyperboliques

Proposition 7.40 - Partie paire, partie impaire d'une fonction.

Toute fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. La fonction paire est appelée **partie paire** de f et la fonction impaire est appelée **partie impaire** de f.

Démonstration ♥.

Définition 7.41 - Cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique.

On appelle **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** les parties paires et impaires de la fonction exponentielle.
D'après la démonstration de la proposition précédente, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Proposition 7.42 - Principales propriétés.

1. La fonction ch est paire et sh est impaire.
2. **Formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique**. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.
3. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbf{R}$. De plus, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}(x) > 0 \iff x > 0$.
5. On a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration.

Remarque 7.43. $\mathrm{ch}'' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{sh}'' = \mathrm{sh}$. Ces fonctions sont donc souvent rencontrées lors de la résolution d'équation différentielles d'ordre 2 et apparaissent naturellement en physique pour décrire la forme que prend une chaîne suspendue à ses extrémités et soumise à la gravité (le graphe de la fonction cosinus hyperbolique est d'ailleurs appelé **chaînette**).

Exemple 7.44. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On peut factoriser $\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$ et $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b$ en s'inspirant des méthodes étudiées dans le chapitre sur les nombres complexes. On a

$$\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{\frac{a}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} + \mathrm{e}^{b-\frac{a}{2}}) = \mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{\frac{b}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{b-a}{2}}),$$

ce qu'on peut encore simplifier en :

$$\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b = 2\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même, on peut montrer que

$$\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b = 2\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

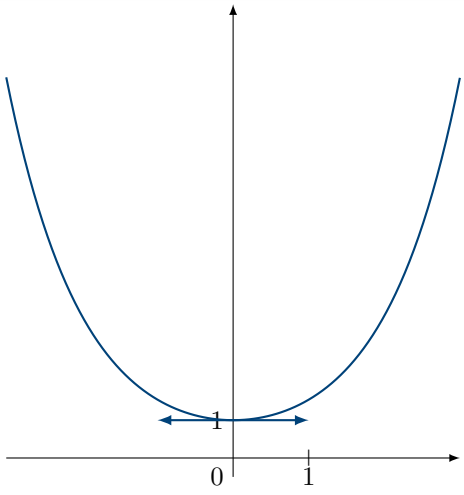
Méthode 7.45. *Résoudre une équation ou une inéquation avec* ch, sh

Pour résoudre une équation faisant intervenir ch, sh il peut être utile de revenir à la forme exponentielle.

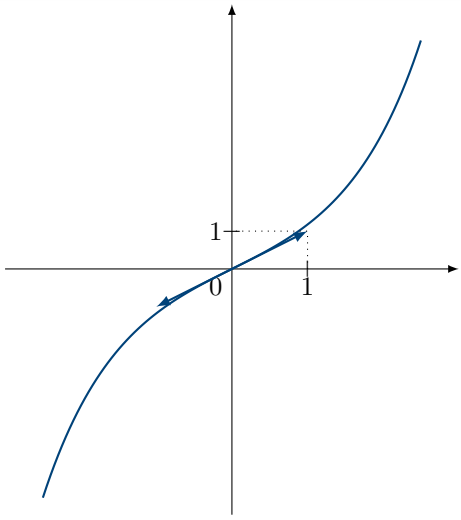
Exercice d'application 7.46. Résoudre $3\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{sh}(x) = 3$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

➥

Graphe de la fonction cosinus hyperbolique



Graphe de la fonction sinus hyperbolique



Question de cours

1. Donner les propriétés algébriques du logarithme népérien (avec produit et quotient).
2. Donner les valeurs des limites suivantes $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
3. Tracer le graphe de la fonction logarithme népérien.
4. Soit $a > 0$. Donner l'expression de $\log_a$.
5. Donner les propriétés algébriques de l'exponentielle (avec produit et quotient).
6. Donner les valeurs des limites suivantes $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
7. Tracer le graphe de la fonction exponentielle.
8. Soit $a \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$, $x > 0$. Définir x^a.
9. Énoncer le théorème des croissances comparées.
10. Définir les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.
11. Donner la formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique.
12. Tracer le graphe des fonctions hyperboliques.