

CHAPITRE 6

GÉNÉRALITÉS SUR LES
FONCTIONS

Dans tout ce chapitre, D désignera une partie de $\mathbf{R}$.

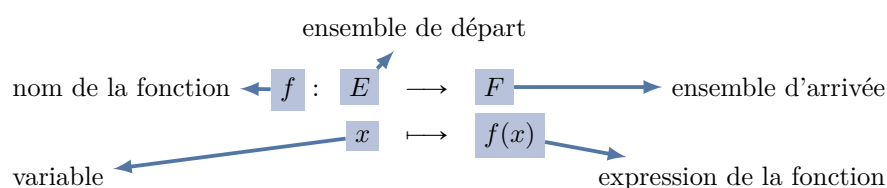
6.1 Présentation

Définition 6.1 - Fonction réelle à valeurs réelles.

Une **fonction** f d'une variable réelle à valeurs réelles est la donnée d'un couple (E, F) de deux parties de $\mathbf{R}$ et d'une correspondance qui à tout $x \in E$ associe un et un seul élément de F que l'on note $f(x)$.

- E est appelé l'**ensemble de départ** de f .
- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f .
- Pour tout $x \in E$, l'élément $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f (on dit aussi que $f(x)$ est l'**expression** de la fonction).
- Soit $y \in F$. Un élément x de E est **un antécédent** de y par f si, et seulement si, $f(x) = y$.

Pour introduire soigneusement une fonction, on écrira :



$x \mapsto f(x)$ se lit « x associe $f(x)$ », $E \rightarrow F$ se lit « E vers F ».

**ATTENTION**

Il ne faut pas confondre le réel $f(x)$ et la fonction f . Quand on veut décrire les propriétés relatives à une fonction (croissance, continuité, dérivabilité, etc.), il faut donc écrire f et pas $f(x)$. Par exemple, on n'écrira pas « $f(x)$ est croissante » (cela n'a pas de sens : un réel ne peut pas être croissant !), mais plutôt : « f est croissante ».

Une fonction n'est bien définie que lorsqu'on explicite à la fois ses ensembles de départ et d'arrivée ainsi que l'expression de la fonction. Il arrive cependant que les ensembles de départ et d'arrivée soient omis lors de la définition d'une fonction dont on ne donne que l'expression $f(x)$. Il faut alors trouver son ensemble de définition (cf ci-dessous) et l'on choisit par défaut $\mathbf{R}$ pour son ensemble d'arrivée.

Définition 6.2 - Ensemble de définition.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle dont on ne connaît que l'expression $f(x)$. On appelle **ensemble (ou domaine) de définition** de f , souvent noté $\mathcal{D}_f$, la plus grande partie de $\mathbf{R}$ (plus grande au sens de l'inclusion) telle que pour chacun de ses éléments x , on puisse donner un sens à l'expression $f(x)$. La fonction f est alors correctement définie par $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$.

$$x \mapsto f(x)$$

Proposition 6.3 - Quelques ensembles de définition.

1. Les fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbf{R}$.
2. La fonction inverse est définie sur $\mathbf{R}^*$.
3. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbf{R}_+$.
4. $\ln$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
5. $\exp$ est définie sur $\mathbf{R}$.

Remarque 6.4. On rappelle qu'on a déjà donné les domaines de définition des fonctions valeur absolue ($\mathbf{R}$), sinus ($\mathbf{R}$), cosinus ($\mathbf{R}$) et tangente ($\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$).

Définition 6.5 - Opérations sur les fonctions.

Soit $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g$ deux parties de $\mathbf{R}$, $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions.

1. On peut définir la **somme** de f et g sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par

$$\begin{aligned} f + g : \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

2. On peut définir le **produit** de f et de g sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par

$$\begin{aligned} f \times g : \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(x) \times g(x) \end{aligned}$$

Exemple 6.6. Considérons $f : x \longmapsto \frac{1}{x} \times (\ln(x) + e^x)$. On rappelle que le domaine de définition de la fonction inverse est $\mathbf{R}^*$, celui de $\ln$ est $\mathbf{R}_+^*$ et celui de $\exp$ est $\mathbf{R}$. Avec les opérations vues avant, on obtient que le domaine de définition de f est $\mathbf{R}^* \cap \mathbf{R}_+^* \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}_+^*$.

Définition 6.7 - Composée de deux applications.

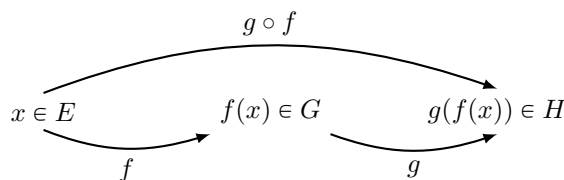
Soit E, F, G, H des parties de $\mathbf{R}$, $f : E \longrightarrow F$ et $g : G \longrightarrow H$.

Si pour tout $x \in E$, $f(x) \in G$, on peut définir la **composée** de f par g :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

$g \circ f$ se lit « g rond f ».

Si les ensembles de départ ne sont pas donnés et que $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g$ désignent les ensembles de définition respectifs de f et g , alors $g \circ f$ est définie sur $\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$.

**ATTENTION**

Soit f, g deux applications définies sur une partie E de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans E . Les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ existent, mais on n'a pas en général la relation $f \circ g = g \circ f$. Par exemple, si on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbf{R}$ par $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ et $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$.

Exercice d'application 6.8. Soit $f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$ et $g : x \longmapsto \ln(x)$.

1. Donner les domaines de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ de f et g .
2. Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$ puis son expression.

3. Même question pour $g \circ f$.



6.2 Courbe représentative d'une fonction

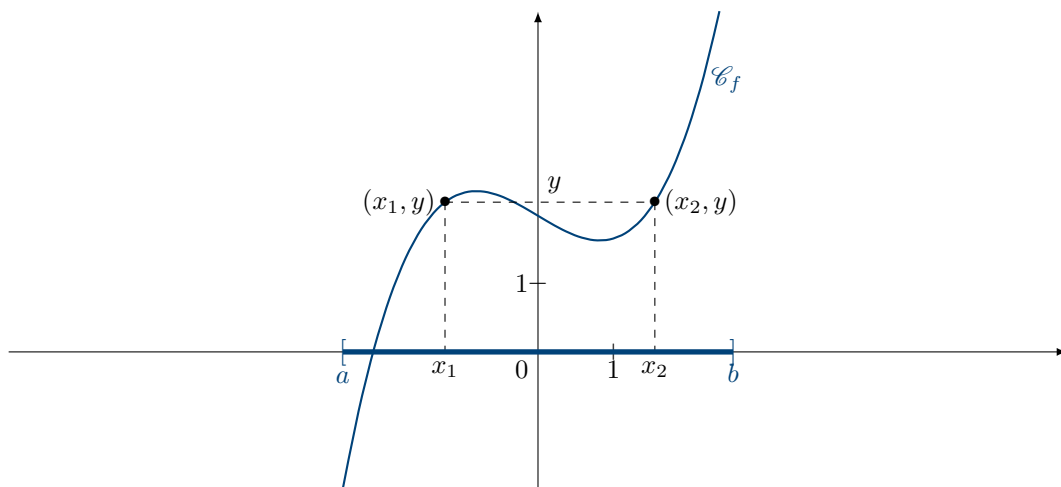
Définition 6.9 - Graphe, courbe représentative.

Soit E, F deux parties de $\mathbf{R}$ et $f : E \longrightarrow F$ une fonction réelle à valeurs réelles.

Le **graphe** de f est le sous-ensemble $\{(x, f(x)) : x \in E\}$ de $\mathbf{R}^2$.

La **courbe représentative** de f est la représentation de l'ensemble des points du graphe dans le plan.

Exemple 6.10. On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$. Les antécédents x_1 et x_2 d'une valeur de y apparaissent également. On dit que x_1 est un antécédent de y par f , ce qui revient à dire que l'image de x_1 par f est y .



Proposition 6.11 - Transformations de courbes du plan.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. La courbe de $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $a\vec{j}$.
2. La courbe de $x \longmapsto f(x + a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
3. La courbe de $x \longmapsto af(x)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport a (ce qui signifie que les ordonnées de la courbe de $x \longmapsto af(x)$ sont les images multipliées par a des ordonnées correspondantes sur la courbe de $\mathcal{C}_f$).

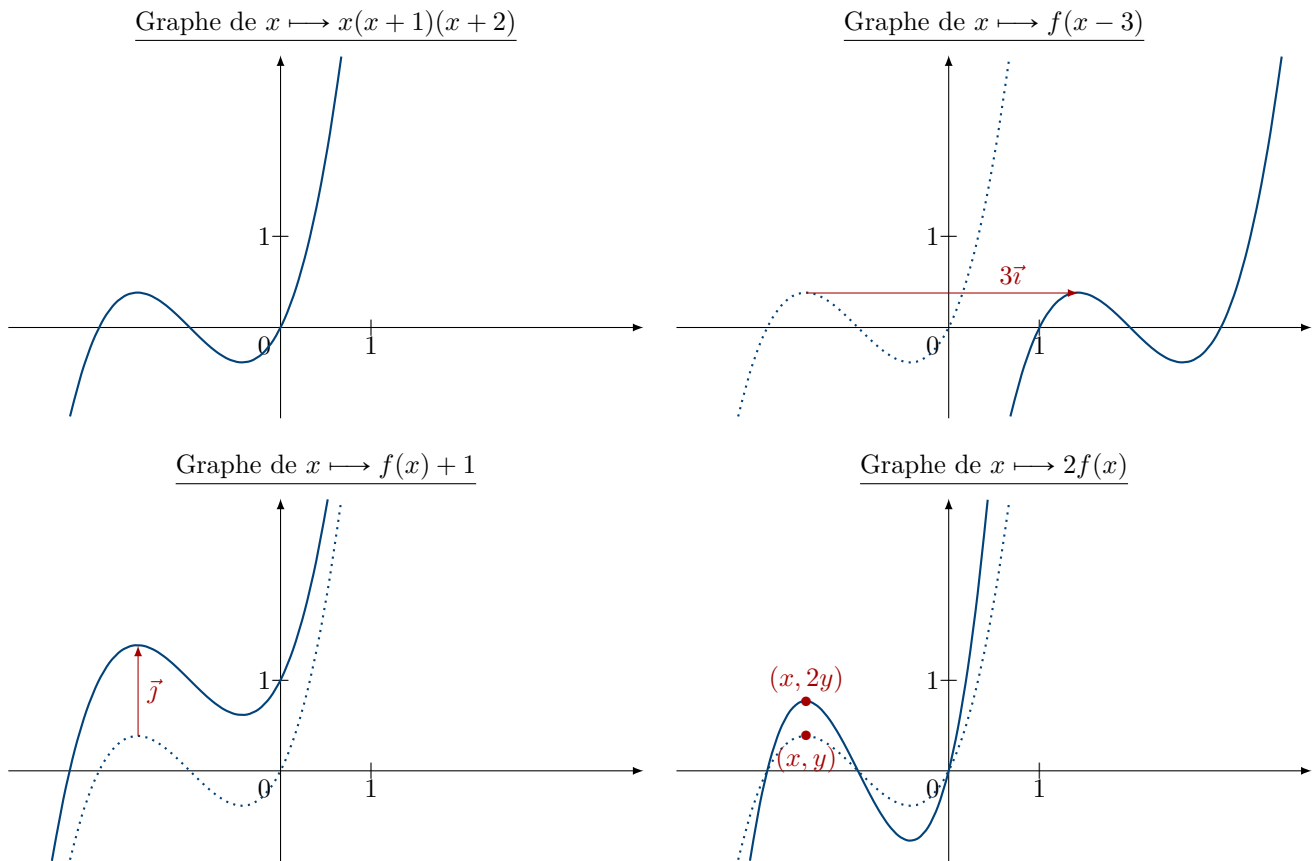
Démonstration.

On montre le point 1. (les autres s'obtiennent de manière similaire). Soit $M(x, y)$ un point du plan. Notons $g = f + a$

et $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in \mathcal{C}_f &\iff y = f(x) \\
 &\iff y = f(x) + a - a \\
 &\iff y = g(x) - a \\
 &\iff y + a = g(x) \\
 &\iff M'(x, y + a) \in \mathcal{C}_g \\
 &\iff M + a\vec{j} \in \mathcal{C}_g
 \end{aligned}$$

□



6.3 Parité, imparité, périodicité

Définition 6.12 - Ensemble symétrique par rapport à 0.

On dit que D est **symétrique par rapport à 0** si pour tout $x \in D$, on a aussi $-x \in D$.

Exemple 6.13. L'ensemble $D =]-3; -2[\cup [-1; 1] \cup]2; 3[$ est symétrique par rapport à 0. En effet, pour tout $x \in D$, $-x \in D$.



De même, l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$ est symétrique par rapport à 0.

Par contre, l'ensemble $D = [-1; 2]$ n'est pas symétrique par rapport à 0. Par exemple, $2 \in D$ et pourtant $-2 \notin D$.

**Définition 6.14 - Fonction paire, impaire.**

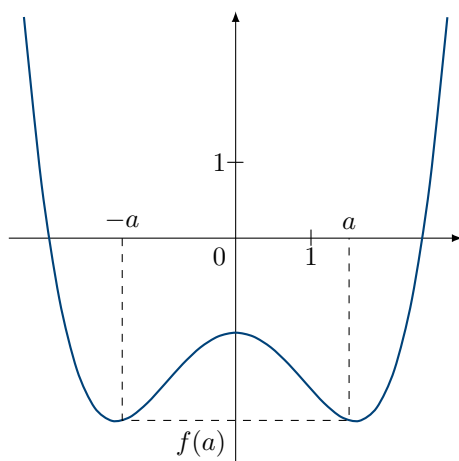
Soit D une partie de $\mathbf{R}$ symétrique par rapport à 0. Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f est

- **paire** si pour tout élément x de D , $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** si pour tout élément x de D , $f(-x) = -f(x)$.

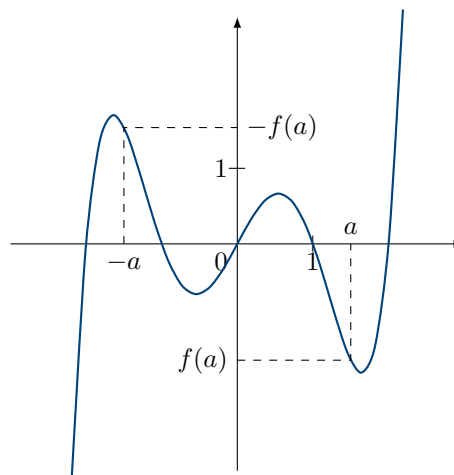
Proposition 6.15 - Propriété de symétrie pour le graphe d'une fonction paire, impaire.

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire



Remarque 6.16. Si $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ est impaire et si $0 \in D$, alors $f(0) = 0$ (on a $f(0) = -f(0)$, d'où le résultat). En particulier, si une fonction n'est pas nulle en 0, alors elle ne peut pas être impaire !

Exemple 6.17 (♥). 1. Les fonctions $\cos$, $x \longmapsto x^n$ où n est pair, valeur absolue sont paires.

2. Les fonctions $\sin$, $\tan$, $x \longmapsto x^n$ où n est impair, inverse sont impaires.

**ATTENTION**

Dire qu'une fonction est paire (resp. impaire) n'entraîne pas qu'elle n'est pas impaire (resp. paire). En effet, la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ avec D une partie de $\mathbf{R}$ symétrique par rapport à 0. La négation de « f est paire » est « il existe $x \in D$ tel que $f(x) \neq f(-x)$ » : le contraire d'être paire n'est donc pas être impaire pour une fonction. De plus, pour vérifier qu'une fonction n'est pas paire, il suffit de trouver un « contre-exemple », c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle $f(x) \neq f(-x)$ (il ne faut surtout pas démontrer que cette inégalité est vraie pour tout x).

Définition 6.18 - Fonction T -périodique.

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$ et $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est **T -périodique** si :

1. $\forall x \in D, x + T \in D$ et $x - T \in D$;
2. $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$.

Le cas échéant, T est appelé une **période** de f .

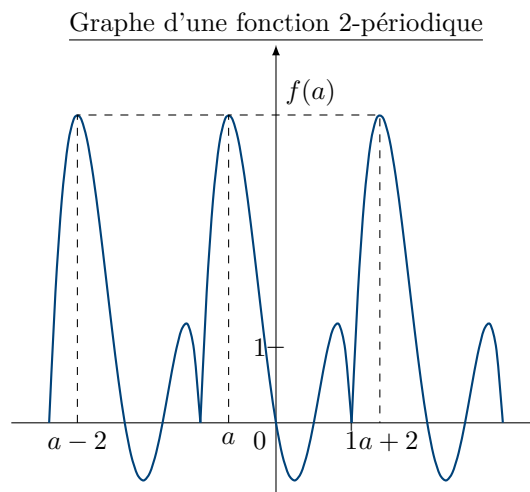
Définition 6.19 - Fonction périodique.

Une fonction f est dite **périodique** s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que f est T -périodique.

Exemple 6.20 (♥). Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques. La fonction tan est π -périodique.

Proposition 6.21 - Courbe d'une fonction périodique.

Si f est une fonction périodique de période $T \in \mathbf{R}_+^*$, son graphe, tracé dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est invariant la translation de vecteur $T\vec{i}$.

**Proposition 6.22 - Périodes d'une fonction périodique.**

Soit $T > 0$. Une fonction f est T -périodique est aussi nT -périodique, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Démonstration.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction T -périodique. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n : « f est nT -périodique ». H_1 est vraie puisque par hypothèse f est T -périodique. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que H_n soit vraie.

1. Soit $x \in D$. $x + (n+1)T = (x + nT) + T$. Or $x + nT \in D$ puisque H_n assure que f est nT -périodique. En particulier, le point 1. de la Définition 6.18 assure que $(x + nT) + T \in D$.
2. On montre de même que $x - (n+1)T \in D$.
3. Soit $x \in D$. $f(x + (n+1)T) = f((x + nT) + T) = f(x + nT)$ d'après le point 2. de la Définition 6.18, puisque f est T -périodique. Or f est aussi nT -périodique, donc ce même point assure que $f(x + nT) = f(x)$. On a donc montré $f(x + (n+1)T) = f(x)$.

Ainsi, H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence assure finalement que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f est nT -périodique. $\square$

La proposition entraîne qu'une fonction périodique admet une infinité de périodes. Lorsqu'un énoncé demande de trouver « la » période d'une fonction, cela signifie implicitement qu'on demande la plus petite période strictement positive (attention : pour une fonction qui n'est pas continue, rien ne garantit qu'une telle plus petite période existe!). Cependant, à moins que cela ne soit demandé, on ne s'attend pas à ce que vous montriez que la période exhibée est la plus petite.

Exercice d'application 6.23. ♥ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Justifier que $f : x \mapsto \cos(nx)$ est périodique (et préciser une période pour cette fonction).



Méthode 6.24. Réduire le domaine d'étude d'une fonction

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{R}$. Si on sait que f est paire ou impaire, on peut se contenter de l'étudier sur $D \cap \mathbf{R}_+$.

Soit $T > 0$. Si on sait que f est T -périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[-T/2; T/2]$.

On peut combiner les deux ! Si f est paire (ou impaire) et T -périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[0; T/2]$. On peut retrouver ses propriétés sur D avec les propriétés de symétrie de sa courbe.

Exercice d'application 6.25. Déterminer un domaine d'étude possible de $f : x \mapsto \cos(2x)$.



6.4 Monotonie

Définition 6.26 - Fonction (strictement) croissante, décroissante.

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{R}$.

- f est **croissante** si

$$\forall x, y \in D, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

- f est **décroissante** si

$$\forall x, y \in D, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

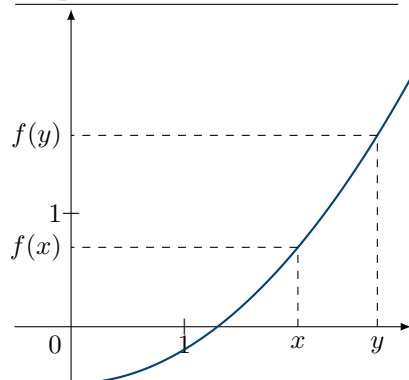
- f est **strictement croissante** si

$$\forall x, y \in D, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

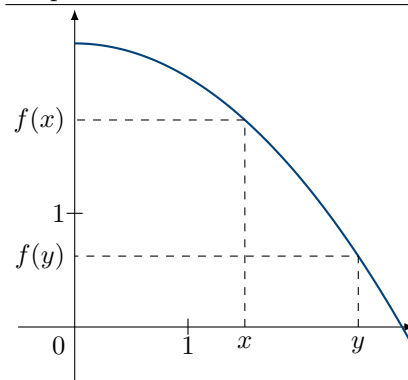
- f est **strictement décroissante** si

$$\forall x, y \in D, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

Graphe d'une fonction croissante



Graphe d'une fonction décroissante



Remarque 6.27. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

Définition 6.28 - Fonction (strictement) monotone.

Une fonction f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si et seulement si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exercice d'application 6.29. ☕ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les variations sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $\mathbb{R}_-$ de la fonction $f : x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$.

➡



ATTENTION



Une fonction croissante sur deux intervalles disjoints n'est pas nécessairement croissante sur la réunion de ces deux intervalles (cf. Exercice d'application suivant).

Exercice d'application 6.30. ♥ ☕ Démontrer que la fonction inverse f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

➡

Proposition 6.31 - Équivalences pour des fonctions strictement monotones.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

1. Si f est strictement croissante, alors pour tous $x, y \in D$, les équivalences suivantes sont vraies :
 - $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$; • $x < y \iff f(x) < f(y)$; • $x = y \iff f(x) = f(y)$.
2. Si f est strictement décroissante, alors pour tous $x, y \in D$, les équivalences suivantes sont vraies :
 - $x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$; • $x < y \iff f(x) > f(y)$; • $x = y \iff f(x) = f(y)$.

Démonstration.

On montre le point 1. Soit $x, y \in D$. Puisque f est strictement croissante, on a

$$y < x \implies f(y) < f(x) \quad (6.1)$$

- (a) Montrons que $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.

Puisque f est strictement croissante, elle est en particulier croissante, ce qui montre le sens direct. Pour obtenir le sens réciproque, il suffit de contraposer (6.1).

- (b) Montrons que $x = y \iff f(x) = f(y)$.

Le sens direct est immédiat. Réciproquement, supposons $f(x) = f(y)$. En particulier, $f(x) \geq f(y)$ donc, puisque f est croissante, le point (a) donne $x \geq y$. De même, $f(x) \leq f(y)$ et ainsi, par croissance de f , $x \leq y$. Finalement, $x = y$, et la réciproque est établie.

- (c) Montrons que $x < y \iff f(x) < f(y)$.

Le sens direct est vrai par définition d'une fonction strictement croissante. Réciproquement, supposons $f(x) < f(y)$. On a en particulier $f(x) \leq f(y)$, d'où avec (a), $x \leq y$. Or $f(x) \neq f(y)$, donc la négation de (b) permet d'en déduire que $x \neq y$. Ainsi, $x < y$ et la réciproque est démontrée. $\square$

**ATTENTION**

Aucune des équivalences de la proposition précédente n'est vraie pour une fonction monotone au sens large quelconque. Par exemple, pour une fonction f constante, $f(2) \leq f(1)$ et pourtant $2 > 1$.

Proposition 6.32 - Somme, produit de fonctions monotones.

1. La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est une fonction croissante (resp. décroissante).
2. La somme d'une fonction croissante et d'une fonction strictement croissante (resp. d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante) est une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante).
3. Le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) positives (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$) est une fonction croissante (resp. décroissante).
4. Le produit de deux fonctions strictement croissantes (resp. strictement décroissantes) positives (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$) est une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Démonstration.

On fait la démonstration pour des fonctions croissantes. Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions.

1. Supposons f et g croissantes. Soit $x \leq y$. On a $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$, donc en sommant ces inégalités on obtient $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$, puis $(f + g)(x) \leq (f + g)(y)$. Ainsi, $f + g$ est croissante.
2. Supposons f croissante et g strictement croissante. Soit $x < y$. On a $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) < g(y)$, donc en sommant ces inégalités on obtient $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$ (la somme d'une inégalité large et d'une inégalité stricte fournit une inégalité stricte), puis $(f + g)(x) < (f + g)(y)$. Ainsi, $f + g$ est strictement croissante.

3. Supposons f et g croissantes, positives. Soit $x \leq y$. On a $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$, donc en multipliant ces inégalités positives on obtient $f(x) \times g(x) \leq f(y) \times g(y)$, puis $(f \times g)(x) \leq (f \times g)(y)$. Ainsi, $f \times g$ est croissante.
4. Supposons f et g strictement croissantes, positives. Soit $x < y$. On a $f(x) < f(y)$ et $g(x) < g(y)$, donc en multipliant ces inégalités positives on obtient $f(x) \times g(x) < f(y) \times g(y)$, puis $(f \times g)(x) < (f \times g)(y)$. Ainsi, $f \times g$ est strictement croissante. $\square$

**ATTENTION**

En général, le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) n'est pas croissant : considérer par exemple le produit de $x \mapsto x$ (resp. $x \mapsto -x$) avec elle-même.

Proposition 6.33 - Composée de fonctions monotones.

Soit E, F deux parties de $\mathbf{R}$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : F \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que pour tout $x \in E$, $f(x) \in F$.

1. Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
2. Si f et g sont de monotonies différentes, alors $g \circ f$ est décroissante.
3. Si f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ est strictement monotone.

Démonstration.

Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \leq y$.

Supposons f croissante et g croissante. Puisque f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$ puis, comme g est croissante, $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Ainsi $g \circ f$ est croissante.

Il reste trois autres cas à étudier pour la monotonie large, qui se traitent de manière similaire. $\square$

Exercice d'application 6.34. Quelles sont les variations de $f : x \mapsto \ln(\cos(x))$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



6.5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 6.35 - Majorant, minorant.

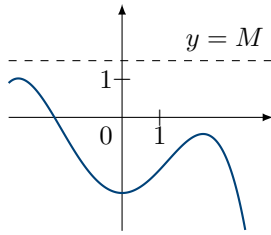
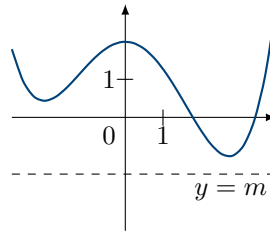
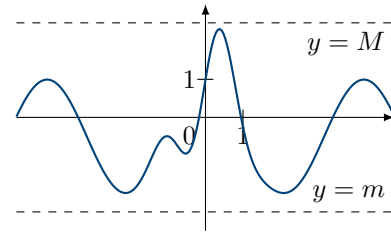
Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit m et M deux réels. On dit que f est :

- **majorée par M** ou que M est un **majorant** de f si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$;
- **minorée par m** ou que m est un **minorant** de f si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m$;
- **bornée par m et M** si pour tout $x \in D$, $m \leq f(x) \leq M$.

Proposition 6.36 - Propriété de la courbe d'une fonction majorée, minorée, bornée.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit m et M deux réels. Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f .

1. Si f est majorée par M , alors $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite d'équation $y = M$.
2. Si f est minorée par m , alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = m$.
3. Si f est bornée par m et M , alors $\mathcal{C}$ est entre les droites d'équation $y = m$ et $y = M$.

Fonction majorée par M Fonction minorée par m Fonction bornée par m et M **Définition 6.37 - Fonction majorée, minorée, bornée.**

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$.

- On dit que f est **majorée** si elle possède un majorant, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, \quad f(x) \leq M.$$

- On dit que f est **minorée** si elle possède un minorant, c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbf{R}, \forall x \in D, \quad f(x) \geq m.$$

- On dit que f est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Proposition 6.38 - Caractérisation des fonctions bornées avec la valeur absolue.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. f est bornée si et seulement si

$$\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, \quad |f(x)| \leq M.$$

Autrement dit, f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration. • Supposons que f est bornée. Ainsi il existe $m, M \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x) \leq M$. Soit $x \in D$. On a

$$f(x) \leq M \leq |M| \leq |M| + |m|$$

et, comme $|m| \geq -m$, on a $m \geq -|m|$ puis :

$$f(x) \geq m \geq -|m| \geq -|m| - |M|.$$

Ainsi, on a obtenu

$$-(|m| + |M|) \leq f(x) \leq |m| + |M|$$

d'où $|f(x)| \leq |m| + |M|$. Donc $|f|$ est majorée.

- Réciproquement, supposons qu'il existe M tel que, pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leq M$. Alors, pour tout $x \in D$, $-M \leq f(x) \leq M$, donc f est bornée par $-M$ et M . $\square$

Définition 6.39 - Maximum global, minimum global.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, soit $a \in D$.

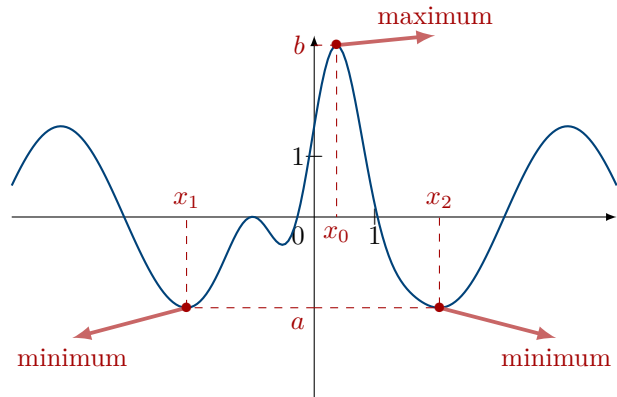
- On dit que f admet un **maximum global** en a si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum global** en a si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un **extremum global** en a si elle admet un minimum global ou un maximum global en a .

Le maximum (resp. minimum) global est unique, mais il peut être atteint en plusieurs points !

Exemple 6.40.

On a représenté ci-contre le graphe d'une fonction qui admet un minimum et un maximum global.

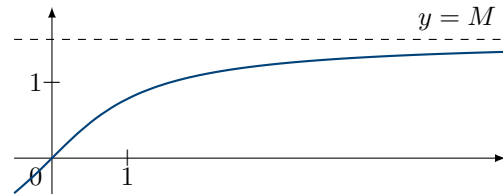
- Le maximum global vaut b , et il est atteint en x_0 .
- Le minimum global vaut a . Il est atteint en deux points : x_1 et x_2 .



ATTENTION



Une fonction peut être majorée (resp. minorée) sans pour autant avoir un maximum (resp. minimum). Sur l'exemple ci-contre, la fonction représentée est majorée par M (M est même le plus petit majorant) et pourtant cette fonction définie sur $\mathbf{R}$ n'admet pas de maximum (le plus petit majorant n'est jamais atteint).



6.6 Limites

Dans ce paragraphe, on se contente de rappeler succinctement les résultats sur les limites vus au lycée. On ne démontre rien (nous le ferons plus tard).

On résume dans les tableaux suivants les opérations sur les limites, où $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$. f et g désignent deux fonctions définies sur un intervalle I et a est un élément de I ou une extrémité de I .

FI signifie « **forme indéterminée** ». On rappelle que cette expression signifie que la limite peut être réelle, infinie voire ne pas exister. Il y a alors un travail (parfois important) à fournir pour « lever » cette forme indéterminée et calculer la limite (quand on aboutit à une forme indéterminée il ne faut donc surtout pas s'arrêter mais au contraire poursuivre ses efforts ☺).

Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	ℓ
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ℓ
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0	ℓ'
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$\ell \times \ell'$

la règle des signes donne le
signe de la limite du produit

Limite d'un inverse

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0 et $f(x) < 0$ à gauche et à droite de a	0 et $f(x) > 0$ à gauche et à droite de a
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	0	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 6.41. La limite d'un quotient s'obtient en combinant les deux derniers tableaux.

Remarque 6.42. Il y a quatre formes indéterminées à retenir (deux ne sont pas explicitement données dans les tableaux mais peuvent s'en déduire). Les notations suivantes sont un moyen mnémotechnique uniquement, il faut surtout ne jamais les écrire en devoir !

1. $+\infty - \infty$; 2. $0 \times \infty$; 3. $\frac{0}{0}$; 4. $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercice d'application 6.43. Déterminer, si elles existent, les limites en 0^+ , 1^- , 1^+ et e de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{x+1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

➡

Proposition 6.44 - Limite d'une composée.

Soit I et J deux intervalles. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Soit a un élément de I , soit b un élément de J .

Si f admet pour limite b en a , et si g admet pour limite ℓ en b (ℓ peut être soit réel soit égal à $+\infty$ ou $-\infty$), alors $g \circ f$ tend vers ℓ en a . Autrement dit, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \ell$.

Exemple 6.45. Considérons $f : x \longmapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$.



Méthode 6.46. Quelques réflexes pour lever une forme indéterminée

1. On simplifie le plus possible l'expression dont on cherche la limite.
2. Quand on a une FI en $-\infty$ ou $+\infty$, on peut chercher à factoriser les sommes par le terme « prépondérant » (typiquement, pour un polynôme, on factorise par le terme de plus haut degré).
3. Quand on a une différence de racines carrées $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (où $a, b \in \mathbf{R}_+^*$), on multiplie par la **quantité conjuguée** $\sqrt{a} + \sqrt{b}$:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Exercice d'application 6.47. Calculer, si elle existe, la limite de $f : x \longmapsto \ln(x^2 + 1) - \ln(x)$ en $+\infty$.

➡

Exercice d'application 6.48. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}$, puis calculer la limite de cette fonction en 1 si elle existe.

➡

6.7 Continuité

Pour l'instant, on ne donnera pas de définition exacte de la continuité. On se contente de : une fonction f est continue sur un domaine D lorsqu'en tout point a de D , on peut tracer localement autour de a la courbe représentative de f sans lever le crayon. Les résultats de ce paragraphe sont admis ou bien déjà vus en terminale. On y reviendra en détail plus tard dans l'année.

Proposition 6.49 - Fonctions continues usuelles.

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles (c'est à dire les quotients de deux fonctions polynomiales), les fonctions cosinus, sinus et tangente, la fonction valeur absolue, la fonction racine carrée, la fonction exponentielle et le logarithme sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Remarque 6.50. la fonction tangente n'est pas traçable sans lever le crayon. Cependant, on peut bien la tracer **localement** sans lever le crayon autour de chaque point où elle est définie. Elle est donc bien continue sur son intervalle de définition.

Proposition 6.51 - Opérations sur les fonctions continues.

Soit λ un réel, f, g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I .

1. Si f et g sont continues sur I , alors les fonctions $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I .
2. Si $\frac{1}{f}$ est définie sur I , c'est-à-dire si f ne s'annule pas sur I , et si f est continue sur I , alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur I .

Proposition 6.52 - Continuité de la composée de deux fonctions.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$. Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

Soit g une fonction définie J à valeurs réelles.

Si f est continue sur I et si g est continue sur J , alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

Pour justifier la continuité d'une fonction, on reconnaîtra des opérations sur des fonctions usuelles continues.

Exemple 6.53. La fonction $f : x \mapsto \exp(x^2 + 1)$ est continue sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de fonctions continues.

6.8 Dérivation

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $a \in I$. Comme pour la continuité, on se contente de faire quelques rappels et compléments du lycée sans faire de démonstration. On reviendra sur ces résultats plus tard.

6.8.1 Rappel des définitions et des premières propriétés

Définition 6.54 - Taux d'accroissement.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction

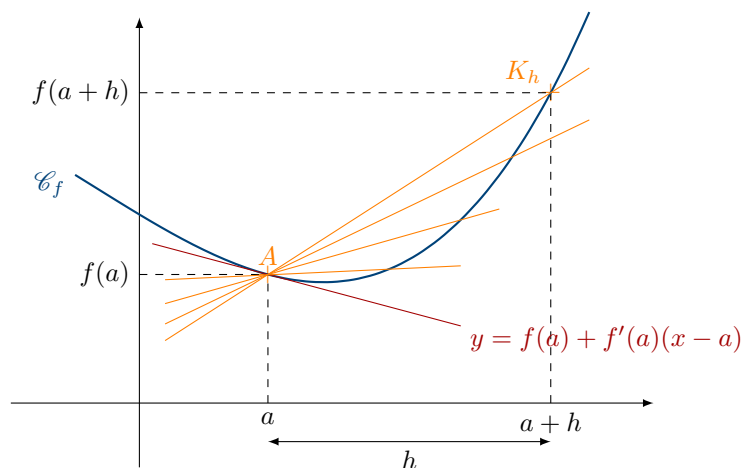
$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est appelée **taux d'accroissement** de f en a .

Définition 6.55 - Dérivabilité, nombre dérivé.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction f est dite **dérivable en** a si la fonction τ_a admet une limite finie ℓ en a . Le cas échéant, ℓ est appelée **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $A(a, f(a)) \in \mathcal{C}_f$. Notons K_h le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a+h, f(a+h))$. Alors AK_h est une corde de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont le coefficient directeur est donné par $\tau_a(a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. La fonction est dérivable si, lorsque h tend vers 0, la droite AK_h se « rapproche » d'une droite non verticale : cette droite limite est appelée **tangente** de f en a , et son coefficient directeur est $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(a+h) = \lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x) = f'(a)$. Une équation de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Définition 6.56 - Fonction dérivée.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction f est dite **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout point de I . On peut alors définir la **fonction dérivée** de f , notée f' et définie par :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

On donne ci-après les dérivées des fonctions usuelles (le domaine de dérivabilité est le plus grand ensemble sur lequel la fonction est dérivable) :

Expression de la fonction	Domaine de dérivabilité	Expression de la dérivée
λ (constante)	$\mathbf{R}$	0
x	$\mathbf{R}$	1
x^n (n est un entier naturel)	$\mathbf{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ (n est un entier naturel)	$\mathbf{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbf{R}$	e^x
$\sin(x)$	$\mathbf{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbf{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\left] \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$ où $k \in \mathbf{Z}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Proposition 6.57 - Opérations sur les fonctions dérivables.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- La fonction $f \cdot g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
- Si g ne s'annule pas sur I , les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Proposition 6.58 - Dérivée d'une composée.

Soit I, J deux intervalles, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J , alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Exemple 6.59 (♥). Soit $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I , soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. La fonction $x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur I , de dérivée $x \mapsto au'(ax + b)$.
2. La fonction u^n est dérivable sur I , de dérivée $nu'u^{n-1}$.
3. La fonction e^u est dérivable sur I , de dérivée $u'e^u$.
4. Si u est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I , de dérivée $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
5. Si u est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I , de dérivée u'/u .
6. Si u ne s'annule pas, alors la fonction $\ln(|u|)$ est dérivable sur I et $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$.

**ATTENTION**

Avant de dériver une fonction, il faut toujours justifier qu'elle est dérivable. En pratique, on reconnaît des opérations sur des fonctions usuelles dérivables.

**ATTENTION**

Le « prime » de la dérivation ne peut être placé qu'après une fonction ! Si f est une fonction dérivable sur I et $x \in I$, le nombre dérivé en x s'écrit $f'(x)$ et surtout pas $f(x)'$!! Donc si on veut dériver $f : x \mapsto x^2 + 1$, on n'écrit pas $(x^2 + 1)' = \dots$

Parfois, on peut avoir envie de dériver directement une expression. Dans ce cas on utilisera le symbole de dérivation $\frac{d}{dx}$ devant l'expression à dériver (ce symbole est dû à Leibniz) :

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$$

est une écriture correcte ! Elle est aussi très utile quand on a une expression avec plusieurs variables, pour préciser la variable par rapport à laquelle on dérive :

$$\frac{d}{dx}(xy^2 \cos(x)) = y^2(\cos(x) - x \sin(x)) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dy}(xy^2 \cos(x)) = 2xy \cos(x).$$

Exercice d'application 6.60. Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables et donner l'expression de leur dérivée.

$$1. \quad f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto (x^2 - x + 1)e^x$$

$$2. \quad f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{x+2}{x^2+3} \ln(x)$$



Exercice d'application 6.61. Préciser un ensemble sur lequel les fonctions suivantes sont dérivables puis l'expression de leurs dérivées.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} \times (\exp(x) + \sqrt{x}) ;$

2. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}.$

➡

Théorème 6.62 - Lien entre dérivabilité et continuité.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f est dérivable sur I , alors elle est continue sur I .



ATTENTION



La réciproque est fausse !! Par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbf{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

6.8.2 Étude des variations

Théorème 6.63 - Lien entre signe de la dérivée et variations.

Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$, $f'(x) = 0$), alors f est croissante (resp. décroissante, constante) sur I .
- Si f' est positive (resp. négative) ou nulle et ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I , alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

Exemple 6.64. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 3x^2$. Ainsi, f' est strictement positive sauf en 0 où elle s'annule : la fonction cube est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

6.8.3 Dérivées successives

Définition 6.65 - Dérivées successives.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Si f est n fois dérivable sur I , on peut définir de manière itérative la dérivée n -ième de f , notée $f^{(n)}$:

- on convient que $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \geq 1$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

On note souvent $f' = f^{(1)}$ et $f'' = f^{(2)}$.

Exemple 6.66. Considérons la fonction $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$:

$$x \longmapsto \ln(x) + x^2.$$

1. f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$.
2. f' est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$.
3. f'' est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$.

On pourrait continuer !

Proposition 6.67 - Dérivée n -ième de $x \longmapsto x^p$.

Soit $p \in \mathbf{N}$, $f_p : x \longmapsto x^p$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_p est n fois dérivable. De plus,

- si $n \leq p$, $f^{(n)} : x \longmapsto \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$.
- si $n > p$, $f^{(n)} = 0$.

Démonstration.

Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_n : \ll f_p \text{ est } n \text{ fois dérivable ; si } n \leq p, f^{(n)} : x \longmapsto \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}, \text{ tandis que si } n > p, \text{ alors on a plutôt } f^{(n)} = 0 \gg$.

f_p est 0 fois dérivable. $f^{(0)} = f$ par convention et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{p!}{(p-0)!} x^{p-0} = x^p = f(x)$, donc H_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n est vraie.

- Supposons $n \leq p-1$. Alors, d'après H_n , pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$, donc en dérivant cette expression on obtient $f^{(n+1)}(x) = \frac{p!(p-n)}{(p-n)!} x^{p-n-1} = \frac{p!}{(p-n-1)!} x^{p-n-1}$.
- Supposons $n = p$. Alors, d'après H_n , pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = n!$, d'où en dérivant cette expression, $f^{(n+1)} = 0$.
- Supposons $n \geq p+1$. Alors, d'après H_n , pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = 0$, donc $f^{(n+1)}(x) = 0$.

En résumé, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-(n+1))!} x^{p-(n+1)} & \text{si } n+1 \leq p \\ 0 & \text{si } n+1 > p \end{cases}$, ce qui signifie que H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure et la proposition est démontrée. $\square$

6.9 Plan d'étude d'une fonction

Dans ce paragraphe, on présente le plan d'étude d'une fonction f réelle. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

6.9.1 Recherche du domaine de définition

Si l'ensemble de départ de f n'est pas précisé dans l'énoncé, on détermine le domaine de définition de f .

On écrit pour cela toutes les conditions qui assurent l'existence de $f(x)$ et l'on détermine l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des réels x vérifiant toutes ces conditions.

6.9.2 Réduction du domaine d'étude

- Si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, il faut étudier la parité de f . Si f est paire ou impaire, alors on peut limiter l'ensemble d'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbf{R}_+$. On trace la représentation graphique de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbf{R}_+$ et on la complète par symétrie d'axe (Oy) si f est paire, et par symétrie par rapport à l'origine du repère si f est impaire.

- Si la fonction f est T -périodique, on limite l'étude de f à une période, c'est-à-dire à $\mathcal{D}_f \cap [\alpha; \alpha + T]$ où α est un réel, généralement $\mathcal{D}_f \cap [0; T]$ ou $\mathcal{D}_f \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$. On trace le graphe de f sur la période étudiée puis on le reproduit sur toutes les périodes représentées.
- On peut coupler ces deux propriétés : si f est périodique et paire (ou impaire), on limite l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \left[0; \frac{T}{2}\right]$ et on complète la représentation graphique par symétrie puis périodicité.

Il se peut que dans l'énoncé d'un exercice, pour une fonction f dont le domaine de définition est symétrique par rapport à un réel a , on vous demande de comparer $f(a+x)$ et $f(a-x)$. Dans ce cas :

- si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(a+x) = f(a-x)$, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$. On limite alors l'étude de f à $\mathcal{D}_f \cap [a; +\infty[$.
- Si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(a-x) = 2b - f(a+x)$ pour un certain réel b , alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b) . On limite alors l'étude de f à $\mathcal{D}_f \cap [a; +\infty[$.

6.9.3 Continuité et limites aux bornes du domaine d'étude

On utilise les théorèmes généraux de continuité pour déterminer sur quelle partie de $\mathcal{D}_f$ on est certain que f est continue.

Ensuite, on calcule les limites aux bornes ouvertes de l'intervalle d'étude ainsi qu'aux points où f ne serait pas continue.

6.9.4 Dérivabilité et calcul de la dérivée

On utilise les théorèmes généraux de dérivabilité pour déterminer sur quelle partie de $\mathcal{D}_f$ il est certain que f est dérivable et on calcule la dérivée de f .

6.9.5 Variations et tableau de variations

On étudie le signe de f' pour déterminer les variations de f .



ATTENTION



Pour étudier le signe de f' , il ne suffit pas de résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

Très souvent, le signe de f' se détermine facilement (par exemple avec un tableau de signes). Cependant, il se peut que l'on doive étudier les variations de f' pour déterminer son signe. Dans ce cas, on vérifie que l'on peut dériver f' et l'on calcule sa dérivée f'' . Le signe de f'' permet alors de tracer le tableau de variations de f' pour faciliter l'étude de son signe.

On pourra utiliser le résultat suivant : f étant continue sur un segment $[a; b]$, si f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $]a; b[$, alors f est aussi strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a; b]$.

On peut maintenant consigner l'ensemble des informations glanées jusqu'ici dans le tableau de variations de f . On prend soin d'y faire figurer les valeurs remarquables (limites, valeurs de f aux changements de monotonie ...), en indiquant des valeurs exactes, et l'on note bien les points où la dérivée de f s'annule.

Conventions :

1. dans un tableau de signes, $+$ signifie « strictement positif », et $-$ « strictement négatif ». Il ne faut donc pas oublier de faire apparaître les 0 ;
2. dans le tableau de variations de f , une flèche $\searrow$ signifie « strictement décroissante » et une flèche $\nearrow$ signifie « strictement croissante ».

6.9.6 Tangentes et asymptotes

- Si l'énoncé le demande on peut déterminer les équations de tangentes en certains points.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ présente en a une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ où $b \in \mathbf{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ a une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ où $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ alors $\mathcal{C}_f$ a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$. La recherche d'asymptotes obliques est souvent guidée par l'énoncé.

6.9.7 Représentation graphique

- On place les éventuelles asymptotes.
- On place les points et tangentes remarquables (en particulier toutes les tangentes horizontales, qui sont situées aux points où la dérivée s'annule).
- On trace la courbe sur le domaine d'étude de f puis, le cas échéant, on la complète sur $\mathcal{D}_f$ en utilisant les propriétés de parité, de périodicité ou/et les symétries.

Exercice d'application 6.68. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$ et tracer son graphe. Vous ferez apparaître la tangente aux points d'abscisses 2 et -2 (vous pourrez utiliser $\ln(3) \approx 1,1$).



6.10 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, on étudie toujours des fonctions définies sur une partie D de $\mathbf{R}$, mais qui sont cette fois à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Définition 6.69 - Fonction partie réelle, partie imaginaire.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$. Les fonctions

$$\begin{aligned} \Re(f) : D &\longrightarrow \mathbf{R} & \text{et} & \quad \Im(f) : D \longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \Re(f(x)) & & \quad x \longmapsto \Im(f(x)) \end{aligned}$$

sont appelées respectivement **fonction partie réelle** et **fonction partie imaginaire** de f .

Exercice d'application 6.70. Écrire les fonctions partie réelle et partie imaginaire de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(x)}{ix + x + 1} \end{aligned}$$

➡

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point.

Définition 6.71 - Dérivabilité, dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs complexes et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** si les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables en a . Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé** de la fonction f au point a le nombre noté $f'(a)$ défini par

$$f'(a) = (\Re(f))'(a) + i (\Im(f))'(a).$$

On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I . Alors, la fonction dérivée f' de f est la fonction de I dans $\mathbf{C}$ définie par $f' = (\Re(f))' + i (\Im(f))'$.

Exercice d'application 6.72. Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée sur cet intervalle.

➡

Proposition 6.73 - Opérations sur les fonctions dérivables en un point à valeurs complexes.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$. Soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a , alors

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda \times f'(a)$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Démonstration.

Les deux premiers points sont immédiats. Montrons le troisième.

Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (\Re(f)(x) + i \Im(f)(x)) \times (\Re(g)(x) + i \Im(g)(x)) \\ &= [\Re(f)(x) \Re(g)(x) - \Im(f)(x) \Im(g)(x)] + i [\Im(f)(x) \Re(g)(x) + \Re(f)(x) \Im(g)(x)]\end{aligned}$$

Si f et g sont dérivables en a , alors $\Re(f)$, $\Im(f)$, $\Re(g)$, $\Im(g)$ sont dérivables en a . Donc fg est dérivable en a et :

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= [(\Re(f))'(a) \Re(g)(a) + \Re(f)(a) (\Re(g))'(a) - (\Im(f))'(a) \Im(g)(a) - \Im(f)(a) (\Im(g))'(a)] \\ &\quad + i [(\Im(f))'(a) \Re(g)(a) + \Im(f)(a) (\Re(g))'(a) + (\Im(g))'(a) \Re(f)(a) + \Im(g)(a) (\Re(f))'(a)] \\ &= \Re(f)(a) [(\Re(g))'(a) + i (\Im(g))'(a)] + \Im(f)(a) [i (\Re(g))'(a) - (\Im(g))'(a)] \\ &\quad + \Re(g)(a) [(\Re(f))'(a) + i (\Im(f))'(a)] + \Im(g)(a) [i (\Re(f))'(a) - \Im(f)(a)] \\ &= \Re(f)(a) g'(a) + \Im(f)(a) \times i g'(a) + \Re(g)(a) f'(a) + \Im(g)(a) \times i f'(a) \\ &= [\Re(f)(a) + i \Im(f)(a)] g'(a) + [\Re(g)(a) + i \Im(g)(a)] f'(a) \\ &= f(a) g'(a) + g(a) f'(a)\end{aligned}$$

□

On peut étendre ces résultats à l'ensemble de définition de f et g :

Proposition 6.74 - Opérations sur les fonctions dérivables à valeurs complexes.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$. Si f et g sont dérivables sur I , alors

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$,
2. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda \times f'$,
3. fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
4. Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 6.75 - Exponentielle complexe.

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs complexes et $a \in I$.

On considère l'application $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$:

$$t \longmapsto \exp(\varphi(t))$$

Si φ est dérivable en a , alors f l'est aussi et $f'(a) = \exp(\varphi(a)) \varphi'(a)$.

Si φ est dérivable sur I , alors f l'est aussi et pour tout $t \in I$, $f'(t) = \exp(\varphi(t)) \varphi'(t)$.

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, la fonction $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$t \longmapsto e^{\alpha t}$$

$$g'(t) = \alpha e^{\alpha t}.$$

Démonstration.

Supposons que φ soit dérivable en a .

On note $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbf{R}$ les parties réelles imaginaires de φ . Donc pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$. Ainsi, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(u(x) + iv(x)) \\ &= \exp(u(x)) \times \exp(iv(x)) \\ &= \exp(u(x)) \times (\cos(v(x)) + i \sin(v(x))) \\ &= \exp(u(x)) \cos(v(x)) + i \exp(u(x)) \sin(v(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, $\Re(f) = (\exp \circ u) \times (\cos \circ v)$ et $\Im(f) = (\exp \circ u) \times (\sin \circ v)$.

u et v sont dérivables en a par hypothèse. $\exp$ est dérivable en $u(a)$ et $\cos$ et $\sin$ sont toutes deux dérivables en $v(a)$. Donc $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables en a par composition, et l'on en déduit que f est dérivable en a . De plus :

$$\begin{aligned} f'(a) &= (\Re(f))'(a) + i(\Im(f))'(a) \\ &= [u'(a) \exp(u(a)) \cos(v(a)) - \exp(u(a))v'(a) \sin(v(a))] \\ &\quad + i[u'(a) \exp(u(a)) \sin(v(a)) + \exp(u(a))v'(a) \cos(v(a))] \\ &= \exp(u(a)) [u'(a) \cos(v(a)) - v'(a) \sin(v(a)) + iu'(a) \sin(v(a)) + iv'(a) \cos(v(a))] \\ &= \exp(u(a)) \{u'(a) [\cos(v(a)) + i \sin(v(a))] + v'(a) [-\sin(v(a)) + i \cos(v(a))]\} \\ &= \exp(u(a)) \{u'(a) \exp(iv(a)) + iv'(a) \exp(iv(a))\} \\ &= \exp(u(a)) \exp(iv(a)) \varphi'(a) \\ &= \exp(u(a) + iv(a)) \varphi'(a) \\ &= \exp(\varphi(a)) \varphi'(a) \end{aligned}$$

□

Exemple 6.76. 1. La fonction $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g'(t) = (1+2i)e^{(1+2i)t}$.

2. La fonction $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $h'(\theta) = ie^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$.

**ATTENTION**

Dans tout ce chapitre, on a uniquement étudié les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

Cela ne permet PAS de dériver les fonctions de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

Questions de cours

- Définir les notions d'image et d'antécédent d'un réel par une fonction (attention à la formulation!).
- Définir la composée de deux applications (attention aux ensembles!).
- Soit D une partie de $\mathbf{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan. Soit $a \in \mathbf{R}$.
 - Expliquer comment obtenir la courbe de $x \longmapsto f(x) + a$ à partir de $\mathcal{C}_f$.
 - Expliquer comment obtenir la courbe de $x \longmapsto f(x + a)$ à partir de $\mathcal{C}_f$.
- Définir la notion de fonction paire (resp. impaire) (attention à ne pas oublier de préciser que l'ensemble de définition doit être symétrique par rapport à 0).
- Que peut-on dire du graphe d'une fonction paire (resp. impaire)?
- Soit $T > 0$, D une partie de $\mathbf{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Définir « f est T -périodique ».
- Définir la notion de fonction croissante (resp. décroissante, resp. strictement croissante, resp. strictement décroissante).
- Définir la notion de fonction monotone (resp. strictement monotone).
- Soit D une partie de $\mathbf{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Donner une condition sur la monotonie de f pour que l'équivalence suivante soit vraie :

$$x < y \iff f(x) < y$$

- Que peut-on dire de la somme de deux fonctions croissantes? Énoncer un résultat similaire pour le produit (attention à ne pas oublier que les fonctions doivent être positives).
- Soit f, g deux fonctions à valeurs réelles définies sur une partie de $\mathbf{R}$ telles que $g \circ f$ existe. Si f est croissante (resp. décroissante) et g est croissante (resp. décroissante), quel est le sens de variation de $g \circ f$?
- Donner la définition de fonction majorée (resp. minorée, resp. bornée).
- Donner une condition nécessaire et suffisante avec la valeur absolue pour traduire le fait qu'une fonction est bornée.
- Donner la définition de maximum (resp. minimum, resp. extremum) global d'une fonction.
- Tableaux des limites (le tableau vous sera fourni et sera à compléter).
- Soit $a, b > 0$. Transformer l'expression suivante en quotient à l'aide de la quantité conjuguée :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dots$$

- Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Définir le taux d'accroissement de f en a .
- Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Définir « f est dérivable en a » ainsi que le nombre dérivé de f en a .
- Tableaux des dérivées (le tableau vous sera fourni et sera à compléter).
- Soit I un intervalle, $f, g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables sur I , soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Donner la dérivée de $f + g$, de λf , de fg et de $\frac{f}{g}$ dans le cas où g ne s'annule pas sur I .
- Soit I, J deux intervalles, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Compléter :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = \dots$$

- Quel est le lien entre continuité et dérivabilité pour une fonction?
- Énoncer le théorème donnant le lien entre sens de variation et signe de la dérivée pour une fonction.
- Soit $n, p \in \mathbf{N}$. Quelle est la dérivée n -ième de $f_p : x \longmapsto x^p$?
- Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Compléter, à l'aide des fonctions partie réelle et partie imaginaire :

$$f'(a) = \dots$$

- Soit I un intervalle, $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction dérivable, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(t) = e^{\varphi(t)}$. Compléter :

$$f'(a) = \dots$$