Chapitre 5 Calcul de sommes et de produits

Dans tout ce cours, n et m sont des entiers non nuls avec $n \leqslant m$.

5.1 Calcul de sommes finies

5.1.1 Notation

Soit E un ensemble fini d'entiers et pour tout $k \in E$, soit a_k un complexe. La somme de tous les éléments de $\{a_k \ : \ k \in E\}$ se note $\sum\limits_{k \in E} a_k$ (se lit « somme des a_k où k est élément de E »).

Dans le cas où $E = [\![n, m]\!]$, alors on note :

indice de fin de somme

$$\sum_{k \in [\![n,m]\!]} a_k = \sum_{\boxed{k} = \boxed{n}}^{\boxed{m}} a_k = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m$$

indice de sommation

indice de début de somme

La somme du milieu se lit : « somme de k égal n à m des a_k ».

Remarque 5.1. Lorsque E est vide, on convient que $\sum\limits_{k \in E} a_k = 0$. En particulier, si $n > m$, alors $[\![n, m]\!] = \varnothing$ et donc $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k = 0$.

Remarque 5.2. Dans les notations $\sum\limits_{k \in E} a_k$ ou $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$, la lettre « k » est une variable muette. Cela signifie en particulier qu'on peut la remplacer par une autre lettre sans changer la valeur de l'expression :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \sum_{j=n}^{m} u_j$$

(par contre ici n et m ne sont pas muets : ils désignent les indices de début et de fin de la somme, donc ils sont fixés et ne peuvent être changés).

ATTENTION

La remarque précédente entraîne en particulier que la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ ne peut pas dépendre de k !

Exemple 5.3.

1. Si on note $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$ et $a_3 = -2$, on a $\sum\limits_{k=0}^{3} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$.
2. On a $\sum\limits_{k=2}^{5} 2^k = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.
3. On peut noter $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n)$ sous la forme $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k)$.

On peut parfois écrire des contraintes en français en dessous du symbole somme pour préciser l'ensemble sur lequel on somme. Par exemple, si E désigne l'ensemble des nombres pairs inférieurs ou égaux à 10,

$$\sum_{k\in E}\frac{k}{2}=\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{10}\frac{k}{2}=\frac{2}{2}+\frac{4}{2}+\frac{6}{2}+\frac{8}{2}+\frac{10}{2}=15.$$

5.1.2 Sommes de référence

Proposition 5.4 - Nombre de termes dans $[\![n,m]\!]$.

Soit n et m deux entiers non nuls avec $n \leqslant m$.
Dans l'ensemble $[\![n,m]\!]$, il y a $m-n+1$ éléments.

Proposition 5.5 - Sommes de référence.

Soit n un entier naturel. Soit $a \in \mathbf{C}$.

1. **Somme de termes constants.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a=(n+1)a$.
2. **Somme des premiers entiers.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.
3. **Somme des carrés des premiers entiers positifs.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. **Somme géométrique.**
   - Si $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.
   - Si $a=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k=n+1$.

Démonstration.

Exercice d'application 5.6. Pour tout $n \geqslant 3$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Soit $n \geqslant 3$. Déterminer les quantités suivantes (en fonction de n).

1. S_{n+2} ; **2.** S_{n^2} ; **3.** S_{4n}.

➥

Exercice d'application 5.7. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ suivant la parité de n un entier fixé.

➥

Remarque 5.8. La formule **1.** peut être adaptée pour déterminer une somme quelconque d'une constante : on multiplie le nombre de termes de la somme par la constante.

Exercice d'application 5.9. Déterminer le nombre de termes de la somme $S = \sum_{k=5}^{27} 2$. En déduire la valeur de cette somme.

➥

Remarque 5.10. Dans la proposition précédente, on a $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k$ (puisque le premier terme de la somme de gauche est nul ; par contre ces quantités sont différentes de $\sum_{k=2}^{n} k$). De même, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Attention, pour les autres sommes de référence, changer l'indice de début change la valeur de la somme !

5.1.3 Principales propriétés

Proposition 5.11 - Linéarité de la somme.

Soit n et m deux entiers avec $n \leqslant m$. Soit $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_m, \lambda \in \mathbf{C}$. Alors :

1. $\sum_{k=n}^{m} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=n}^{m} a_k$ (on peut mettre en facteur une constante) ;
2. $\sum_{k=n}^{m} (a_k + b_k) = \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=n}^{m} b_k$ (on peut « scinder » une somme).

Démonstration.

Remarque 5.12. Les formules de la proposition précédentes restent valables si on somme sur un ensemble fini E.

ATTENTION

Il n'y a pas de règles aussi simples pour simplifier la somme d'un produit : $\sum_{k=n}^{m} (a_k \times b_k) \neq \left(\sum_{k=n}^{m} a_k\right) \times \left(\sum_{k=n}^{m} b_k\right)$.

Un résultat existe tout de même pour un cas plus particulier (voir Corollaire 5.67).

Exemple 5.13. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(2\times 3^{k+2}+\frac{k}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(2\times 3^{k+2}+\frac{k}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n} 2\times 3^2\times 3^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\times k && \text{on « scinde » la somme}\\
&= 18\times\sum_{k=0}^{n}3^k+\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n}k && \text{on factorise par les termes constants}\\
&= 18\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} && \text{on reconnaît des sommes de référence}\\
&= 9(3^{n+1}-1)+\frac{n(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 5.14. Calculer les sommes suivantes. On donnera le résultat sous forme factorisée.

1. $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+12k^2)$; **2.** $S_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{k+4}$; **3.** $S_3=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2k-5}{6}$.

➥

Méthode 5.15. *Repérer une somme télescopique*

Quand on somme la différence de termes consécutifs d'une même suite, on a les simplifications suivantes (où $n \leqslant m$ sont des entiers, $a_n, a_{n+1}\dots, a_m, a_{m+1}$ des complexes) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1}-a_k) &= (a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+3}-a_{n+2})+\cdots+(a_m-a_{m-1})+(a_{m+1}-a_m)\\
&= \cancel{a_{n+1}}-a_n+\cancel{a_{n+2}}-\cancel{a_{n+1}}+\cancel{a_{n+3}}-\cancel{a_{n+2}}+\cdots+\cancel{a_m}-\cancel{a_{m-1}}+a_{m+1}-\cancel{a_m}\\
&= -a_n+a_{m+1}.
\end{aligned}$$

Tous les termes de la somme se simplifient, sauf un au début et un à la fin (il est vivement conseillé d'écrire les premiers termes de la somme et les derniers pour voir quels sont les deux termes qui restent, et avec quel signe devant). On dit que la somme est **télescopique**.

Exemple 5.16. Soit $n \geqslant 3$. Simplifions $S=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(\mathrm{e}^{k+1}-\mathrm{e}^k)$. On a

$$\begin{aligned}
S &= \mathrm{e}^4-\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^4+\mathrm{e}^6-\mathrm{e}^5+\cdots+\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{n-1}+\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}^n && \text{on développe}\\
&= \cancel{\mathrm{e}^4}-\mathrm{e}^3+\cancel{\mathrm{e}^5}-\cancel{\mathrm{e}^4}+\cancel{\mathrm{e}^6}-\cancel{\mathrm{e}^5}+\cdots+\cancel{\mathrm{e}^n}-\cancel{\mathrm{e}^{n-1}}+\mathrm{e}^{n+1}-\cancel{\mathrm{e}^n}\\
&= -\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^{n+1} && \text{on simplifie par télescopage}
\end{aligned}$$

Exercice d'application 5.17. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

➥

5.1.4 Découpage de sommes

Proposition 5.18 - Découpage d'une somme.

Soit E une partie finie de $\mathbf{N}$ et E_1 et E_2 une **partition** de E c'est-à-dire deux parties de E telles que

$$E_1 \cup E_2 = E \qquad \text{et} \qquad E_1 \cap E_2 = \varnothing.$$

Pour tout $k \in E$, a_k est un nombre complexe. Alors :

$$\sum_{k \in E} a_k = \sum_{k \in E_1} a_k + \sum_{k \in E_2} a_k.$$

Voici les découpage de sommes les plus fréquents :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{ici } E_1 = \{0\} \text{ et } \sum_{k \in E_1} a_k = a_0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n \qquad \text{ici } E_2 = \{n\} \text{ et } \sum_{k \in E_2} a_k = a_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=\underline{\mathbf{m+1}}}^{n} a_k \qquad \text{pour tout } m \in [\![0, n]\!] \text{ (cette relation est appelée } \textbf{relation de Chasles}\text{)}$$

$$\sum_{k \in E} a_k = \sum_{\substack{k \in E \\ k \text{ pair}}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k \in E \\ k \text{ impair}}}^{n} a_k$$

Remarque 5.19. La proposition précédente est écrite avec une partition de E en deux sous-ensembles mais, bien-sûr, cette proposition reste valable pour des partitions de E en un nombre quelconque de sous-ensembles (il faut que la réunion des sous-ensemble soit égale à E et que les sous-ensembles soient deux à deux disjoints).

Exemple 5.20. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculons $\sum_{k=10}^{n} k^2$. On a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \sum_{k=10}^{n} k^2$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=10}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{9 \times (9+1) \times (2 \times 9 + 1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{9 \times 10 \times 19}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 15 \times 19 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 285.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 5.21. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $m \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} |k - m|$.

➥

5.1.5 Décalage d'indice

Proposition 5.22 - Décalage d'indice (parfois appelé changement de variable).

Soit n, m, p trois entiers avec $n \leqslant m$. Pour tout $k \in [\![n, m]\!]$, a_k désigne un nombre complexe. On a :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{j=n+p}^{m+p} a_{j-p}.$$

Démonstration.

Remarque 5.23. Étant donné que les indices sont muets, on peut écrire la relation de la proposition précédente

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=n+p}^{m+p} a_{k-p}.$$

Exercice d'application 5.24. En faisant un décalage d'indice, calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(k-2)^2$.

➥

Exemple 5.25. Pour justifier plus formellement la simplification d'une somme télescopique (mais ça n'est pas obligatoire ; en pratique l'utilisation de ... est amplement suffisante), on pourra faire un changement de variable. Par exemple, notons $S = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. On a,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} && \text{on a fait un décalage sur la seconde somme} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) && \text{on a enlevé le premier terme de la première somme} \\
& && \text{et le dernier de la seconde somme} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} && \text{on simplifie}
\end{aligned}$$

5.1.6 Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 5.26 - Factorisation de $a^n - b^n$.

Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Démonstration.

Exemple 5.27 (♥). Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. On pourra retenir les identités remarquables suivantes :

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2. $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$;
3. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Les égalités **1.** et **3.** proviennent directement de la proposition. Pour **2.** et **4.**, on remarque que $a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2$ et $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3$ respectivement.

Exercice d'application 5.28. Soit $(x, y) \in \mathbf{C}^2$. Factoriser $x^4 - y^4$ et $x^5 + y^5$.

➥

5.2 Calcul de produits finis

5.2.1 Notations

Soit E un ensemble fini d'entiers et pour tout $k \in E$, soit a_k un complexe. Le produit de tous les éléments de $\{a_k \,:\, k \in E\}$ se note $\displaystyle\prod_{k \in E} a_k$ (se lit « produit des a_k où k est élément de E »).

Si $E = [\![n, m]\!]$, alors on note :

indice de fin de somme

$$\prod_{k \in [\![n,m]\!]} a_k = \prod_{\boxed{k} = \boxed{n}}^{\boxed{m}} a_k = a_n \times a_{n+1} \times \cdots \times a_m$$

indice de sommation

indice de début de somme

Le produit du milieu se lit : « produit de k égal n à m des a_k ».

Remarque 5.29. Lorsque E est vide, on convient que $\displaystyle\prod_{k \in E} a_k = 1$. En particulier, si $n > m$, alors $[\![n, m]\!] = \varnothing$ et donc $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} a_k = 1$.

Remarque 5.30. Dans les notations $\displaystyle\prod_{k \in E} a_k$ ou $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} a_k$, la lettre « k » est une variable muette.

Exercice d'application 5.31. Calculer $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{3} (k^2 + 1)$.

➥

5.2.2 Techniques de calcul

Proposition 5.32 - Produit de termes constants.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $a \in \mathbf{C}$. On a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a = a^{n+1}$.

Démonstration.

Proposition 5.33 - « Sortir » une constante d'un produit, scinder un produit.

Soit n et m deux entiers avec $n \leqslant m$. Soit $a_n, a_{n+1}, \dots, a_m, b_n, b_{n+1}, \dots, b_m, \lambda \in \mathbf{C}$. Alors :

1. $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} \lambda a_k = \lambda^{m-n+1} \prod_{k=n}^{m} a_k$;
2. $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=n}^{m} b_k\right)$ (on peut « scinder » un produit).

Démonstration.

Proposition 5.34 - Découpage d'un produit.

Soit E une partie finie de $\mathbf{N}$, $\{E_1, E_2\}$ une partition de E et pour tout $k \in E$, $a_k \in \mathbf{C}$. Alors :

$$\prod_{k \in E} a_k = \prod_{k \in E_1} a_k \times \prod_{k \in E_2} a_k.$$

Méthode 5.35. *Repérer un produit télescopique*

Quand on fait le produit du quotient de termes consécutifs d'une même suite, on a les simplifications suivantes (où $n \leqslant m$ sont des entiers, $a_n, a_{n+1}, \dots, a_m, a_{m+1}$ des complexes non nuls) :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=n}^{m} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \times \cdots \times \frac{a_m}{a_{m-1}} \times \frac{a_{m+1}}{a_m} \\
&= \frac{\cancel{a_{n+1}} \times \cancel{a_{n+2}} \times \cdots \times \cancel{a_{m-1}} \times \cancel{a_m} \times a_{m+1}}{a_n \times \cancel{a_{n+1}} \times \cancel{a_{n+2}} \times \cdots \times \cancel{a_{m-1}} \times \cancel{a_m}} \\
&= \frac{a_{m+1}}{a_n}.
\end{aligned}$$

De tels produits sont dits **télescopiques**.

Exemple 5.36. Soit $n \geqslant 2$. Simplifions $P = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1)}{\ln(k)}$. On a

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\ln(3) \times \ln(4) \times \cdots \times \ln(n) \times \ln(n+1)}{\ln(2) \times \ln(3) \times \cdots \times \ln(n-1) \times \ln(n)} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 5.37. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

➥

5.3 Formule du binôme de Newton

5.3.1 Factorielle et coefficients binomiaux

Définition 5.38 - Factorielle.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle **factorielle** de n, et on note $n!$, le produit des n premiers entiers non nuls :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Avec les conventions sur un produit où l'indice de départ est supérieur strictement à l'indice d'arrivée, on obtient :

$$0! = 1.$$

Proposition 5.39 - Relation de récurrence.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$.
On peut généraliser : pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $(n+p)! = n! \times (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+p)$.

Démonstration.

Exercice d'application 5.40. ♥ Calculer $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$ et $6!$.

➥

Remarque 5.41. Les factorielles deviennent (très) rapidement (très très) grands ! Pour comparaison :

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \quad \text{et} \quad \exp(20) \approx 485\,165\,195.$$

Définition 5.42 - Coefficient binomial.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{Z}$. On appelle **coefficient binomial « p parmi n »** le nombre

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 5.43 - Coefficients binomiaux utiles.

Certains coefficients bien utiles sont à connaître par cœur ! Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. $\binom{n}{0} = 1$;

2. $\binom{n}{1} = n$;

3. $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$;

4. $\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$.

et on peut généraliser ainsi de suite : si $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

Démonstration.

Proposition 5.44 - Symétrie des coefficients binomiaux.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $p \in \mathbf{Z}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Démonstration.

Proposition 5.45 - Formule de Pascal.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $p \in \mathbf{Z}$, on a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

Démonstration.

La formule de Pascal, associée au fait que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, permet de calculer tous les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ de proche en proche. Le tableau obtenu ci-après est connu sous le nom de **triangle de Pascal.**

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

On lit par exemple que $\binom{5}{3} = 10$.

Exercice d'application 5.46. Déterminer tous les $\binom{6}{k}$, où $k \in [\![0, 6]\!]$.

➥

Corollaire 5.47.

Les coefficients binomiaux sont tous des entiers naturels.

Démonstration.

Proposition 5.48 - Formule du capitaine.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{Z}^\star$.

$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

Démonstration ♥.

5.3.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 5.49 - Formule du binôme de Newton.

Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$

Démonstration.

Exemple 5.50 (♥). Soit $(a,b) \in \mathbf{C}^2$.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Les relations **1.** et **3.** s'obtiennent directement à partir de la formule du binôme. Les formules **3.** et **4.** s'en déduisent en remarquant que $a+b = a-(-b)$.

Exercice d'application 5.51. Soit $(a,b) \in \mathbf{C}^2$. Développer $(a+b)^4$ à l'aide de la formule du binôme.

➥

Exercice d'application 5.52. ♥ Soit $n \in \mathbf{N}$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$;

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

➥

Exercice d'application 5.53. ♥ Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$.

1. Développer l'expression $f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

2. Dériver de deux manières différentes la fonction f et en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

➥

Exemple 5.54. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $a \in \mathbf{C}$. Calculons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-1}{k} 2^k a^{n-k}$. On a une somme avec un coefficient binomial, donc on essaie de faire apparaître la formule du binôme de Newton. La somme est mal indicée. Comme on a un terme $\displaystyle\binom{n-1}{k}$, on va chercher à écrire la formule du binôme de Newton au rang $n-1$.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^k a^{n-k} - \binom{n-1}{0} 2^0 a^{n-0} - \binom{n-1}{n-1} 2^{n-1} a^{n-(n-1)} && \text{on s'organise pour avoir une somme bien indicée} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^k a^{n-k} - a^n - 2^{n-1} a \\
&= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^k a^{n-1-k} - a^n - 2^{n-1} a && \text{on s'organise pour avoir les bonnes puissances dans la somme} \\
&= a(2+a)^{n-1} - a^n - 2^{n-1} a && \text{avec la formule du binôme}
\end{aligned}$$

Exercice d'application 5.55. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.

➥

5.4 Linéarisation de polynômes trigonométriques

Méthode 5.56. *Linéariser une expression trigonométrique*

Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de fonctions trigonométriques en une somme de telles fonctions. Pour cela, on effectue les étapes suivantes :

1. on remplace chaque occurrence des fonctions cosinus et sinus par leur expression en nombres complexes à l'aide des formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i};$$

2. on développe, à l'aide de la formule du binôme, les différents produits qui apparaissent dans l'expression ;

3. on réutilise les formules d'Euler pour revenir aux fonctions circulaires.

Exemple 5.57. Linéarisons $\cos^3(\theta)\sin(2\theta)$, c'est-à-dire exprimons cette quantité en fonction de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ avec $k \geqslant 1$.

On a

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta)\sin(2\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}{2i}\right) && \text{avec les formules d'Euler}\\
&= \left(\frac{e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}}{8}\right) \times \left(\frac{e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}{2i}\right) && \text{avec le binôme de Newton}\\
&= \frac{1}{16i}\left(e^{5i\theta}-e^{i\theta}+3e^{3i\theta}+3e^{-i\theta}+3e^{i\theta}-3e^{-3i\theta}+e^{-i\theta}-e^{-5i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{8}\times\frac{e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}}{2i}+\frac{3}{8}\times\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}+\frac{1}{4}\times\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} && \text{on réorganise}\\
&= \frac{1}{8}\sin(5\theta)+\frac{3}{8}\sin(3\theta)+\frac{1}{4}\sin(\theta) && \text{avec les formules d'Euler}
\end{aligned}$$

Remarque 5.58. Cette technique est utile pour déterminer des primitives. Avec l'exemple précédent, on obtient qu'une primitive de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos^3(x)\sin(2x)$ est la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = -\frac{1}{40}\cos(5x) - \frac{1}{8}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(x)$.

Remarque 5.59. Les formules trigonométriques de transformation de produits en sommes peuvent être retrouvées facilement à partir d'une linéarisation : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]\\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]\\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]
\end{aligned}$$

Exercice d'application 5.60. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Linéariser les expressions $\cos^2(\theta)$ puis $\sin^2(\theta)$ (sans utiliser le formulaire de trigonométrie !).

➥

5.5 Transformation de $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ en polynômes en $\cos(x)$, $\sin(x)$

Méthode 5.61. *Transformer $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ en polynômes en $\cos(x)$, $\sin(x)$*

Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Pour transformer $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ en polynômes en $\cos(x)$, $\sin(x)$, on procède ainsi :

1. on transforme e^{inx} en puissance à l'aide de la formule de De Moivre :
$$e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos(x) + i\sin(x))^n;$$
2. on développe avec la formule du binôme de Newton ;
3. on conclut en considérant la partie réelle de l'expression obtenue (pour obtenir $\cos(nx) = \mathfrak{Re}(e^{inx})$) ou la partie imaginaire (pour obtenir $\sin(nx) = \mathfrak{Im}(e^{inx})$).

En remarquant que $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on peut toujours écrire $\cos(nx)$ comme un polynôme en $\cos(x)$. De même, en utilisant $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on peut toujours écrire $\sin(nx)$ comme produit de $\cos(x)$ par un polynôme en $\sin(x)$.

Exercice d'application 5.62. Soit $x \in \mathbf{R}$.

1. Exprimer $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

2. Exprimer $\sin(4x)$ comme produit de $\cos(x)$ par un polynôme en $\sin(x)$. et $\sin(4x)$ comme des polynômes en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

➥

5.6 Calcul de sommes de fonctions trigonométriques

Exemple 5.63 (♥). Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculons $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Re}(e^{ikx}) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) && \text{par linéarité de la partie réelle} \\ &= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k\right) && \text{formule de De Moivre} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme géométrique.

- Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $e^{ix} = 1$. Donc $S = n + 1$.
- Si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ (c'est-à-dire si $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi \ :\ k \in \mathbf{Z}\}$), alors $e^{ix} \neq 1$. Donc

$$\begin{aligned} S &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{e^0 - e^{i(n+1)x}}{e^0 - e^{ix}}\right) && \text{formule de De Moivre} \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{2ie^{i(n+1)x/2}\sin((n+1)x/2)}{2ie^{ix/2}\sin(x/2)}\right) && \text{factorisation par l'angle moitié} \\ &= \mathfrak{Re}\left(e^{inx/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right) && \text{simplification} \\ &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Notons qu'en considérant la partie imaginaire, on obtient plutôt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) &= \mathfrak{Im}\left(e^{inx/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right) \\ &= \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Remarque 5.64 (♥). On peut retrouver les formules trigonométriques pour passer d'une somme à un produit en utilisant les mêmes idées. Si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\cos(a) + \cos(b) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{ia}) + \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{ib}) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib}) = \mathfrak{Re}\left(2\mathrm{e}^{i(a+b)/2}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même,

$$\sin(a) + \sin(b) = \mathfrak{Im}\left(2i\mathrm{e}^{i(a+b)/2}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

5.7 Sommes doubles

5.7.1 Sommes rectangulaires

Dans tout ce paragraphe, n et m sont deux entiers strictement positifs et, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $a_{i,j}$ est un complexe.

Tous les résultats seront écrits pour des sommes dont l'indice de départ est égal à 1 : on pourra généraliser aisément pour des sommes avec un indice de départ différent.

On notera $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}$. Si $n = m$, on note plus simplement $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

Expliquons sur un exemple comment calculer une telle somme, pour $n = 2$ et $m = 3$. On peut représenter les valeurs à sommer dans un tableau (par convention, le premier indice désigne la ligne et le second la colonne) :

$$\begin{array}{|c|c|c|cl}
\hline
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{1,j} \\
\hline
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{2,j} \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & & \\
\multicolumn{1}{c}{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,1}} & \multicolumn{1}{c}{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,2}} & \multicolumn{1}{c}{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,3}} & &
\end{array}$$

On peut commencer par faire la somme de chaque ligne, puis ajouter les résultats obtenus. On obtient alors :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\1\leqslant j\leqslant 3}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j} + \sum_{j=1}^{3} a_{2,j} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\right).$$

On aurait aussi pu sommer chaque colonne en premier, puis ajouter les résultats obtenus. On obtient une autre formule :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\1\leqslant j\leqslant 3}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{2} a_{i,1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i,2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i,3} = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{i,j}\right).$$

Une généralisation de cette approche est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 5.65 - Calcul de sommes doubles rectangulaires.

Soit $n, m \in \mathbf{N}^\star$, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)\end{aligned}$$

Exemple 5.66. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculons

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(ni+\sum_{j=1}^{n}j\right)\\
&= n\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)+n\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)\\
&= 2n\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\\
&= 2n\frac{n(n+1)}{2}\\
&= n^2(n+1).
\end{aligned}$$

Corollaire 5.67 - Produit de sommes finies.

Soit n, m deux entiers strictement positifs, $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ deux familles de nombres complexes. Alors

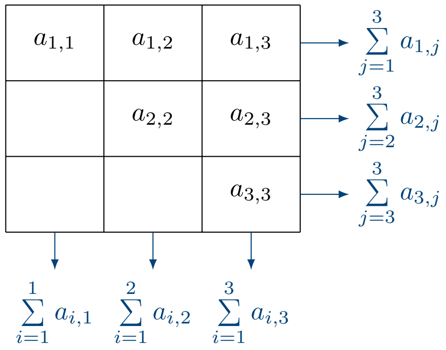
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}a_i\times b_j.$$

Démonstration.

5.7.2 Sommes triangulaires

On reprend les notations du paragraphe précédent. On note $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\leqslant j}}a_{i,j}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{i,j}$.

Expliquons sur un exemple comment calculer une telle somme, pour $n=3$. On peut représenter les valeurs à sommer dans un tableau (par convention, le premier indice désigne la ligne et le second la colonne) :



On peut commencer par faire la somme de chaque ligne, puis ajouter les résultats obtenus. On obtient alors :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j} + \sum_{j=2}^{3} a_{2,j} + \sum_{j=3}^{3} a_{3,j} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=i}^{3} a_{i,j}\right).$$

On aurait aussi pu sommer chaque colonne en premier, puis ajouter les résultats obtenus. On obtient une autre formule :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{1} a_{i,1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i,2} + \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).$$

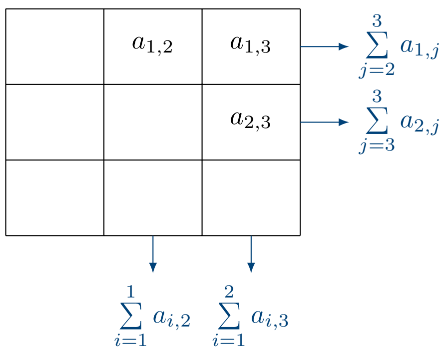
Une généralisation de cette approche est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 5.68 - Calcul de sommes doubles triangulaires larges.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \leqslant j$, $a_{i,j}$ est un nombre complexe. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).\end{aligned}$$

Intéressons-nous à des sommes où l'inégalité sur les indices est stricte. On note $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i<j}} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}$.



On peut commencer par faire la somme de chaque ligne, puis ajouter les résultats obtenus. On obtient alors :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{3} a_{1,j} + \sum_{j=3}^{3} a_{2,j} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=i+1}^{3} a_{i,j}\right).$$

On aurait aussi pu sommer chaque colonne en premier, puis ajouter les résultats obtenus. On obtient une autre formule :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{1} a_{i,2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i,3} = \sum_{j=2}^{3}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right).$$

Une généralisation de cette approche est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 5.69 - Calcul de sommes doubles triangulaires strictes.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$, $a_{i,j}$ est un nombre complexe. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right)\\ &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right).\end{aligned}$$

Exercice d'application 5.70. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer $S = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)$.

➥

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Soit $a, b \in \mathbf{C}$. Compléter :
   - **(a)** $\sum_{k=0}^{n} a = \dots.$
   - **(b)** $\sum_{k=1}^{n} k = \dots.$
   - **(c)** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dots.$
   - **(d)** Si $a \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} a^k = \dots.$
   - **(e)** Si $a = 1$, $\sum_{k=0}^{n} a^k = \dots.$
   - **(f)** $a^n - b^n = \dots.$
2. Soit $a, b \in \mathbf{C}$. Compléter :
   - **(a)** $a^2 - b^2 = \dots\,;$
   - **(b)** $a^2 + b^2 = \dots\,;$
   - **(c)** $a^3 - b^3 = \dots\,;$
   - **(d)** $a^3 + b^3 = \dots.$
3. Soit $n, m \in \mathbf{Z}$ avec $n \leqslant m$. Soit $a_n, \dots, a_m, b_n, , \dots, b_m, \lambda \in \mathbf{C}$. Compléter :
   - **(a)** $\sum_{k=n}^{m} \lambda a_k = \dots\,;$
   - **(b)** $\sum_{k=n}^{m} (a_k + b_k) = \dots.$

4. Soit $n, m \in \mathbf{Z}$ avec $n \leqslant m$ et $a_n, a_{n+1} \dots, a_m, a_{m+1} \in \mathbf{C}$. Simplifier :

$$\sum_{k=n}^{m} (a_{k+1} - a_k) = \dots$$

5. Soit n, m, p trois entiers avec $n \leqslant m$. Pour tout $k \in [\![n, m]\!]$, a_k désigne un nombre complexe. Faites le décalage d'indice $j = k + p$ sur la somme suivante :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \dots.$$

6. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $a \in \mathbf{C}$. Compléter :

(a) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a = \dots$;

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = \dots.$

7. Soit $n, m \in \mathbf{Z}$ avec $n \leqslant m$. Soit $a_n, \dots, a_m, b_n, , \dots, b_m, \lambda \in \mathbf{C}$. Compléter :

(a) $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} \lambda a_k = \dots$;

(b) $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} (a_k b_k) = \dots.$

8. Soit $n, m \in \mathbf{Z}$ avec $n \leqslant m$ et $a_n, a_{n+1} \dots, a_m, a_{m+1} \in \mathbf{C}^\star$. Compléter :

$$\prod_{k=n}^{m} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \dots.$$

9. Donner la définition de coefficient binomial.

10. Soit $n \in \mathbf{N}$. Simplifier les coefficients binomiaux suivants.

(a) $\displaystyle\binom{n}{0} = \dots$;

(b) $\displaystyle\binom{n}{1} = \dots$;

(c) $\displaystyle\binom{n}{2} = \dots$;

(d) $\displaystyle\binom{n}{3} = \dots.$

11. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{Z}$. Compléter la formule de symétrie :

$$\binom{n}{n-p} = \dots.$$

12. Donner la formule de Pascal.

13. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{Z}^\star$. Compléter la formule du capitaine :

$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \dots.$$

14. Tracer le triangle de Pascal et y lire $\displaystyle\binom{10}{3}$ (on peut vous demander une autre valeur ☺).

15. Énoncer la formule du binôme de Newton.

16. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. Compléter les identités remarquables suivantes :

(a) $(a + b)^2 = \dots$;

(b) $(a - b)^2 = \dots$;

(c) $(a + b)^3 = \dots$;

(d) $(a - b)^3 = \dots.$

17. Soit $n, m \in \mathbf{N}^\star$, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ une famille de nombres complexes. Compléter (on attend deux formules) :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} = \dots$$

18. Soit $n, m \in \mathbf{N}^\star$ et, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \leqslant j$, $a_{i,j}$ est un nombre complexe. Compléter (on attend deux formules) :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \dots.$$

19. Soit $n, m \in \mathbf{N}^\star$ et, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$, $a_{i,j}$ est un nombre complexe. Compléter (on attend deux formules) :

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \dots$$