Chapitre 4 Nombres complexes

4.1 Présentation

Dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, seuls les nombres positifs ont une racine carrée, puisque tous les carrés sont positifs et certaines équations du second degré (comme par exemple $2X^2 + X + 2$) n'ont pas de racine.

Dans l'optique de résoudre les équations du troisième degré, l'idée est née au XVIe siècle d'autoriser temporairement l'utilisation de racines carrées de nombres négatifs. Cette approche a depuis été raffinée et formalisée jusqu'à obtenir ce qu'on appelle aujourd'hui les **nombres complexes**.

Le principe fondamental est d'autoriser l'usage d'un nouveau nombre, **non réel**, noté i, dont le carré est -1. Les calculs impliquant des i se font comme dans l'ensemble des réels.

Comme vous le verrez, l'usage de ces nombres complexes permet d'obtenir des racines carrées de tous les nombres réels (et même complexes), de trouver des solutions à toutes les équations du second degré, de résoudre des problèmes de géométrie, de modéliser les interactions de certains composants électriques, et d'autres choses encore...

4.1.1 Ensemble $\mathbf{C}$ et opérations

Définition 4.1 - Opérations avec des complexes.

L'ensemble $\mathbf{C}$ des **nombres complexes** est l'ensemble des nombres qui s'écrivent de manière unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels, muni des opérations suivantes.

- Addition : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$,
- Multiplication : $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Remarque 4.2. La règle de multiplication fournit en particulier $i^2 = -1$.

ATTENTION

On n'écrit JAMAIS $\sqrt{-1}$!!! Il existe deux nombres complexes dont le carré vaut -1 (i et $-i$) et il est impossible d'utiliser une notation qui pourrait avoir deux sens différents ! Si cette notation était acceptée, on aurait de plus des contradictions, du type :

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Les calculs dans $\mathbf{C}$ s'effectuent exactement comme dans $\mathbf{R}$ en remplaçant chaque occurrence de i^2 par -1.

Définition 4.3 - Partie réelle, partie imaginaire, forme algébrique.

Si $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels, alors a et b sont appelés respectivement la **partie réelle** et la **partie imaginaire** de z. On les note $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$. L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe, où a et b sont deux nombres réels, est appelée **la forme algébrique** de z.

ATTENTION

La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel ! Par exemple, $\mathfrak{Im}(3+5i)=5$.

Définition 4.4 - Imaginaires purs, réels.

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle (c'est-à-dire de la forme ib où $b \in \mathbf{R}$) sont appelés les **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbf{R}$. On a $i\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
De même, les nombres complexes dont la partie imaginaire est nul peut être assimilé à $\mathbf{R}$. Donc $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

ATTENTION

Il est impossible d'établir un ordre sur $\mathbf{C}$ qui prolonge l'ordre sur $\mathbf{R}$ et qui obéisse aux mêmes règles. Il ne faut donc jamais écrire une inégalité entre nombres complexes (sauf si ce sont des nombres réels).

Exercice d'application 4.5. On considère $z_1 = 2-5i$ et $z_2 = 1+3i$. Écrire sous forme algébrique les nombres z_1+z_2 et z_1z_2.

➥

Proposition 4.6 - Unicité de l'écriture sous forme algébrique.

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : pour tous nombres complexes z et z',

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \\ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z'). \end{cases}$$

Cela traduit que l'écriture sous forme algébrique est unique.

Exercice d'application 4.7. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $(E) : 3z+1-i = 7+3i$.

➥

Exercice d'application 4.8. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $z = a+2i$. Déterminer a pour que z^2 soit un imaginaire pur.

➥

Exercice d'application 4.9. Soit a un nombre complexe et z le nombre complexe $z = a^2 + i(a+1)$. Quelles sont les parties réelle et imaginaire de z ?

➥

Proposition 4.10 - Linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire dans R.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

1. $\mathfrak{Re}(\lambda z + z') = \lambda\,\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z')$;

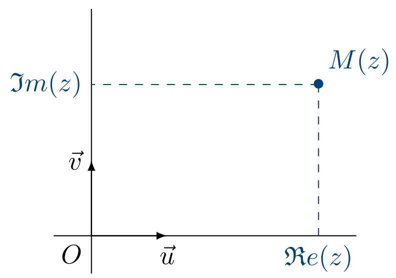
2. $\mathfrak{Im}(\lambda z + z') = \lambda\,\mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(z')$.

Démonstration.

4.1.2 Le plan complexe

Définition 4.11 - Plan complexe, affixe, image.

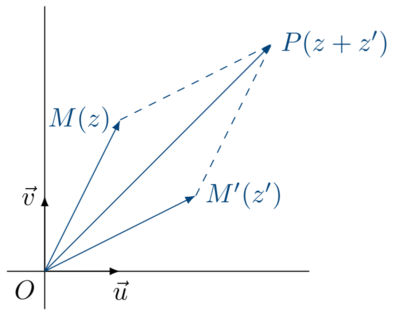
On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M du plan, de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $x + iy$, dit **affixe** de z. Réciproquement, pour tout nombre complexe $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, le point M du plan de coordonnées (x, y) est l'unique point d'affixe z : on l'appelle **image** de z. On appelle **plan complexe** (ou **plan de Cauchy**) cette représentation du plan euclidien par les nombres complexes.



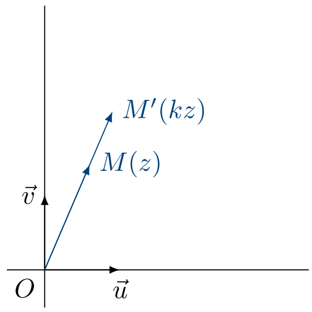
Dans cette représentation, l'axe des abscisses est appelé **axe des réels** tandis que l'axe des ordonnées est l'**axe des imaginaires purs**. Si M est l'image d'un complexe z, on dit aussi que z est l'**affixe** de $\overrightarrow{OM}$ et que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z.

Dans la suite, pour définir un point ou un vecteur à l'aide de son affixe z, on écrira « soit le point $M(z)$ » ou « soit le vecteur $\vec{u}(z)$ ».

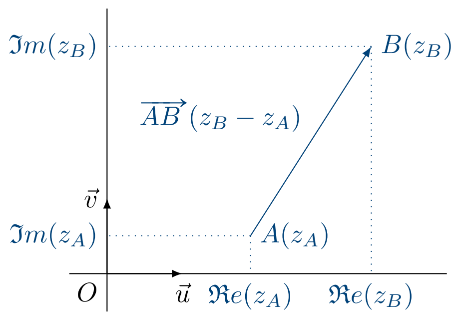
- **Somme de deux nombres complexes**. Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe. Alors le point P d'affixe $z+z'$ est défini par $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.



- **Produit d'un complexe par un réel.** Soit $M(z)$ un point du plan complexe, soit $k \in \mathbf{R}$. Alors le point M' d'affixe kz est l'image de l'homothétie de centre O et de rapport k. Autrement dit, M' est l'unique point tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



- **Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$.** Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.



Proposition 4.12 - Affixe du milieu d'un segment.

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. Alors l'affixe du milieu de $[AB]$ est $\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

Démonstration.

Exercice d'application 4.13. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et z_A, z_B, z_C, z_D les affixes respectives des sommets A, B, C et D. On note I, J, K et L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

➥

4.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

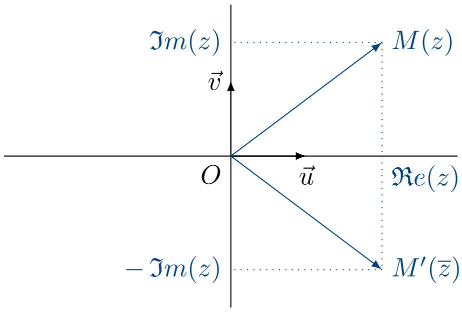
Définition 4.14 - Conjugué.

Soit $z \in \mathbf{C}$. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le complexe

$$\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z).$$

Interprétation géométrique :

Considérons un point $M(z)$ du plan complexe. Le point $M'(\overline{z})$ est le symétrique par rapport à l'axe réel de M.



Proposition 4.15 - Expression de la partie réelle, imaginaire avec le conjugué.

Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Démonstration.

Proposition 4.16 - Caractérisation des réels et imaginaires purs avec le conjugué.

Soit $z \in \mathbf{C}$.

- z est un nombre réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Démonstration.

Proposition 4.17 - Principales propriétés du conjugué.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\mathfrak{Im}(z)$;
3. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
4. $\overline{-z} = -\overline{z}$;
5. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
6. si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.
7. pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et $z \neq 0$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration.

ATTENTION

Dans le dernier point de la démonstration précédente, on ne peut pas montrer directement la propriété sur $\mathbf{Z}$: il est interdit de faire une récurrence sur cet ensemble !

Proposition 4.18 - Produit d'un complexe avec son conjugué.

Soit $z \in \mathbf{C}$. Notons $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$. Alors

$$z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

Démonstration.

Méthode 4.19. *Écrire un quotient sous forme algébrique*

Pour écrire un quotient sous forme algébrique, la première étape consiste à multiplier dénominateur et numérateur par la forme conjuguée du dénominateur (de façon à ce que le numérateur de la nouvelle fraction soit un réel) :

$$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ \forall z' \in \mathbf{C}, \quad \frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{z'\overline{z}}{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}.$$

Exercice d'application 4.20. Écrire le nombre complexe $z = \dfrac{1-i}{2+3i}$ sous forme algébrique.

➥

4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

4.2.1 Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbf{C}$. Puisque $z\overline{z} = \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2$, on a $z\overline{z} \in \mathbf{R}_+$. On peut donc poser :

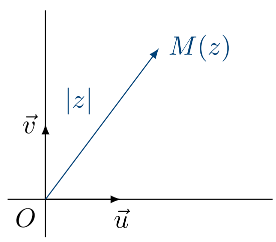
Définition 4.21 - Module.

Soit $z \in \mathbf{C}$, $a = \mathfrak{Re}(z)$, $b = \mathfrak{Im}(z)$. On appelle **module** de z et on note $|z|$ le réel positif

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

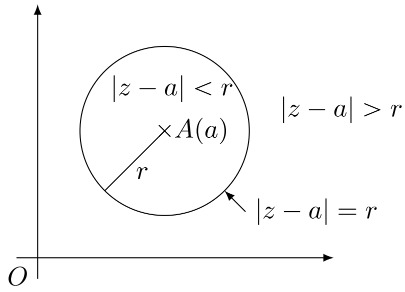
Interprétation géométrique :

Soit $z \in \mathbf{C}$. On considère M d'affixe z. Alors $|z|$ est la longueur du segment $[OM]$.



Proposition 4.22 - Lien entre module et distance.

1. Soit M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'. Alors
$$MM' = |z - z'| = |z' - z|.$$
2. Soit $a \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathbf{R}_+$. L'ensemble $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| = r\}$ (resp. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| \leqslant r\}$, resp. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| < r\}$) est le cercle (resp. disque fermé, resp. disque ouvert) de centre a et de rayon r.



Démonstration.
Notons $a = \mathfrak{Re}(z)$, $b = \mathfrak{Im}(z)$, $a' = \mathfrak{Re}(z')$ et $b' = \mathfrak{Im}(z')$. On a $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$, donc
$$|z' - z| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$$
et donc $|z' - z| = MM'$. Le point **2.** s'en déduit immédiatement. □

Exercice d'application 4.23. Représenter l'ensemble des points du plan $M(z)$ dont l'affixe z satisfait $|z + 1| \leqslant 2$.

➥

Lemme 4.24.

Si $z \in \mathbf{R}_+$, alors $|z| = z$.

Démonstration.

Remarque 4.25. Le lemme précédent assure que la notation du module, identique à celle de la valeur absolue sur les réels, n'est pas ambiguë.

Proposition 4.26 - Principales propriétés du module.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|-z| = |z|$;
2. $|\overline{z}| = |z|$;
3. $|z| = 0 \iff z = 0$;
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$;
5. si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$;
6. si $n \in \mathbf{Z}$, $z \neq 0$, $|z^n| = |z|^n$.

Démonstration.

ATTENTION

Le module ne conserve pas les sommes !

Proposition 4.27 - Développer le module d'une somme, d'une différence.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$;

2. $|z-z'|^2 = |z|^2 - 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$.

Démonstration.

Lemme 4.28.

Soit $z \in \mathbf{C}$.

1. $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z|$;

2. $|\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration.

Lemme 4.29.

Soit $z \in \mathbf{C}$. Si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$, alors $\mathfrak{Im}(z) = 0$.

Démonstration.

Théorème 4.30 - Inégalités triangulaires.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On a :

1. Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
2. Cas d'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z' = 0$ ou s'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $z = kz'$.
3. Seconde inégalité triangulaire : $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$.

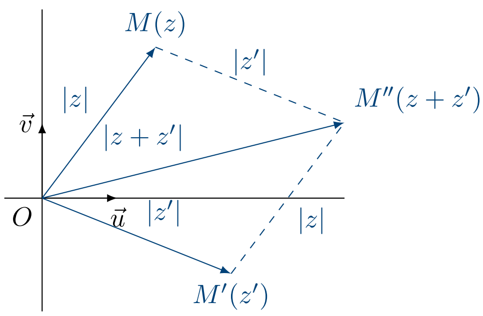
Démonstration.

Interprétation géométrique :

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On considère les points $M(z)$, $M'(z')$ et $M''(z + z')$ du plan complexe. L'inégalité triangulaire peut se traduire par :

$$OM'' \leqslant OM + OM'$$

avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et de même sens.



Corollaire 4.31 - Inégalité triangulaire généralisée.

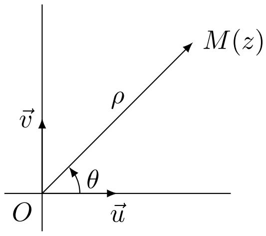
Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$,

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| .$$

Démonstration.
Une récurrence permet de conclure (c'est la même que celle faite dans le chapitre *Inégalités, équations, inéquations*). □

4.2.2 Argument d'un complexe et écriture trigonométrique

Un point M du plan complexe peut être repéré grâce à son affixe z (cela revient à donner un couple $(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$ de coordonnées cartésiennes). On peut aussi le repérer grâce à un couple (ρ, θ), où ρ est une distance et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ (ce couple est appelé couple de **coordonnées polaires** de M).



Définition 4.32 - Argument d'un nombre complexe.

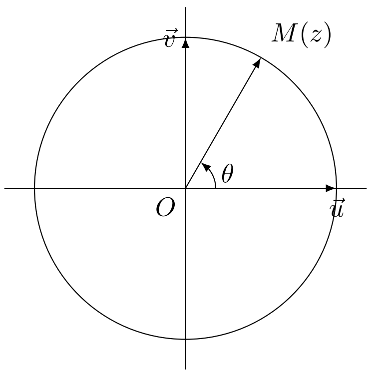
Pour tout nombre complexe z non nul, on appelle **argument** de z toute mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$, où M est le point d'affixe z dans le plan complexe. On note $\arg(z)$ un argument de z.

Remarque 4.33. On ne peut pas attribuer un argument au nombre 0, car il est impossible de définir un angle formé avec le vecteur nul.

Remarque 4.34. L'argument d'un nombre complexe est défini à 2π près (il n'est donc pas unique !). Si θ et θ' désignent deux arguments d'un complexe non nul, alors $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$ (on dit que deux arguments sont égaux à 2π près).

Soit z un nombre complexe de module 1. Alors $M(z)$ est situé sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie qu'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que les coordonnées cartésiennes de M soient $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Cela entraîne que

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$



Plus généralement, si z est un nombre complexe non nul, alors $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 et de même argument que z. En notant θ un argument de z, on a alors $\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, puis

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right).$$

Théorème 4.35 - Écriture trigonométrique.

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

avec ρ un réel strictement positif et θ un réel. On a alors $\rho = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Exercice d'application 4.36. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z de module 2 et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{3}$.

➥

Méthode 4.37. *Déterminer la forme trigonométrique d'un complexe*

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul sous forme algébrique. On cherche la forme trigonométrique $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ de z. On a déjà :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pour déterminer θ, on peut :

- Utiliser :
$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
et en déduire la valeur de θ avec le cercle trigonométrique.
- Si $a \neq 0$, utiliser :
$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$
et en déduire la valeur de θ, à π près. On utilise ensuite le signe de a (on de b) pour décider si on choisit θ ou $\theta + \pi$.

Exercice d'application 4.38. Écrire sous forme trigonométrique le complexe $z = 1 + \sqrt{3}i$.

➥

Dans l'écriture trigonométrique, le module est unique mais l'argument ne l'est pas.

Proposition 4.39 - Égalité de nombres sous forme $\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$.

Soit ρ, ρ' deux réels et soit θ, θ' deux réels. Alors

$$\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = \rho'(\cos(\theta')+i\sin(\theta')) \iff \begin{cases} \rho &= 0 \\ \rho' &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \rho &= \rho' \\ \theta &\equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \rho &= -\rho' \\ \theta &\equiv \pi+\theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration.

Exemple 4.40. Déterminons l'ensemble $\left\{ (\rho,\theta) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = 1+i \right\}$.

Soit $(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = 1+i &\iff \rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &\iff \begin{cases} \rho &= \sqrt{2} \\ \theta &\equiv \pi/4 \ [2\pi] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \rho &= -\sqrt{2} \\ \theta &\equiv \pi+\pi/4 \ [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est finalement égal à $\left\{ \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \,:\, k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \left(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) \,:\, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

4.2.3 Notation exponentielle

Définition 4.41 - Notation exponentielle d'un complexe de module 1.

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$.
Le nombre $e^{i\theta}$ est donc l'unique nombre complexe de module 1 dont un argument est θ.
On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbf{U} = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \} = \left\{ e^{i\theta} \,:\, \theta \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ e^{i\theta} \,:\, \theta \in [0\,;\,2\pi[\right\}.$$

Proposition 4.42 - Principales propriétés de l'exponentielle complexe de module 1.

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$.

1. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;

2. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;

3. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Démonstration.

ATTENTION

Si $\rho < 0$, $\rho e^{i\theta}$ n'est pas la forme exponentielle d'un nombre complexe ! Dans cette situation, il faut écrire

$$-\rho \times (-1) \times e^{i\theta} = -\rho \times e^{i\pi} \times e^{i\theta} = \underbrace{-\rho}_{>0} \times e^{i(\pi+\theta)}.$$

Exercice d'application 4.43. Donner la forme trigonométrique de $-2e^{i\pi/8}$.

➥

Proposition 4.44 - Égalité de nombres sous la forme $\rho e^{i\theta}$.

Soit ρ, ρ' deux réels et θ, θ' deux réels. Alors

$$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \rho & = & 0 \\ \rho' & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{lcl} \rho & = & \rho' \\ \theta & \equiv & \theta' \ [2\pi] \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{lcl} \rho & = & -\rho' \\ \theta & \equiv & \pi + \theta' \ [2\pi] \end{array} \right.$$

Démonstration.
C'est une réécriture de la Proposition 4.39. □

Corollaire 4.45 - Principales propriétés de l'argument.

Soit z, z' deux nombres complexes non nuls.

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;

2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;

3. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration.

Proposition 4.46 - Caractérisation des réels et imaginaires purs à l'aide de l'argument.

Soit z un complexe non nul.

1. z est un réel si et seulement si $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$.

2. z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Démonstration.

Exercice d'application 4.47. Notons $z = 1 - i$. Déterminer tous les entiers n pour lesquels $z^n \in \mathbf{R}$.

➥

4.2.4 Applications de l'exponentielle complexe

Proposition 4.48 - Formules d'Euler.

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,

1. $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$;

2. $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration.

Proposition 4.49 - Factorisation par l'angle moitié.

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$.

1. $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\dfrac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i(\theta+\theta')/2}$;

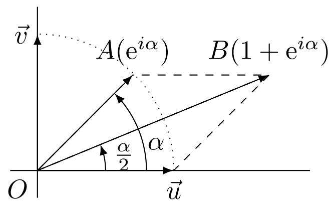
2. $e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i\sin\left(\dfrac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i(\theta+\theta')/2}$.

Démonstration ♥.

Exercice d'application 4.50. ♥ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Trouver le module et un argument de $1 + \mathrm{e}^{i\alpha}$.

➥

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\cos(\alpha/2) > 0$. On considère les points $A(\mathrm{e}^{i\alpha})$ et $B(1+\mathrm{e}^{i\alpha})$.
L'exercice précédent assure que dans le losange $OIBA$ (où I est le point d'affixe 1), les diagonales sont également les bissectrices des angles internes.



Proposition 4.51 - Formule de De Moivre.

Soit $n \in \mathbf{Z}$, $\theta \in \mathbf{R}$.
$$(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta},$$
qui peut aussi s'écrire
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration.

Exercice d'application 4.52. Calculer $(1+i)^7$.

➥

4.2.5 Exponentielle d'un complexe quelconque

Définition 4.53 - Exponentielle d'un complexe quelconque.

Soit $z \in \mathbf{C}$. On note $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$. On définit l'**exponentielle complexe** par

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Proposition 4.54.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z)\ [2\pi]$.

2. $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

3. $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Démonstration.

Exercice d'application 4.55. Résoudre l'équation $e^z = 3(1+\sqrt{3}i)$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

➥

Définition 4.56 - Fonction exponentielle complexe.

On appelle **fonction exponentielle complexe** la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array}$.

Proposition 4.57 - Écriture d'un complexe non nul sous forme exponentielle.

Pour tout complexe y non nul, il existe un antécédent par la fonction exponentielle complexe. Si z_0 est un antécédent de y, tous les antécédents sont de la forme $z_0 + 2ik\pi$, où $k \in \mathbf{Z}$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbf{C}^\star$. Soit $z \in \mathbf{C}$. Notons $a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$. On note également $r = |y|$ et θ un argument de y.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = y &\iff \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = r\mathrm{e}^{i\theta} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{e}^a & = & r \\ b & \equiv & \theta\ [2\pi] \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de y par la fonction exponentielle complexe est $\{\ln(r) + i\theta + 2ik\pi\ :\ k \in \mathbf{Z}\}$. $\square$

Questions de cours

1. Définir la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

2. Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. Quelle est l'affixe du milieu du segment $[AB]$?

3. Définir le conjugué d'un complexe.

4. Soit $z \in \mathbf{C}$. Exprimer $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ à l'aide de z et $\overline{z}$.

5. Donner la caractérisation des réels et des imaginaires purs avec le conjugué.

6. Soit $z, z' \in \mathbf{C}$. Compléter les formules suivantes :

- **(a)** $\overline{\overline{z}} = \dots$;
- **(b)** $\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \dots$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\dots$;
- **(c)** $\overline{z + z'} = \dots$;
- **(d)** $\overline{-z} = \dots$;
- **(e)** $\overline{zz'} = \dots$;
- **(f)** si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dots$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dots$.

7. Soit $z \in \mathbf{C}$. À l'aide des parties réelle et imaginaire de z, compléter : $z\overline{z} = \dots$.

8. Définir le module d'un nombre complexe.

9. Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe. Exprimer MM' à l'aide du module.

10. Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. Compléter :

- **(a)** $|-z| = \dots$;
- **(b)** $|\overline{z}| = \dots$;
- **(c)** $|z| = 0 \iff \dots$;
- **(d)** $|z \times z'| = \dots$;
- **(e)** si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dots$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dots$;
- **(f)** si $n \in \mathbf{Z}$, $z \neq 0$, $|z^n| = \dots$.

11. Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. Compléter :

- **(a)** $|z + z'|^2 = \dots$;
- **(b)** $|z - z'|^2 = \dots$.

12. Dans les complexes, donner l'inégalité triangulaire, le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et la seconde inégalité triangulaire.

13. Définir l'écriture trigonométrique d'un complexe.

14. Soit $z = a + ib$ un complexe non nul sous forme algébrique et on note $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ sa forme trigonométrique. Compléter :

$$\rho = \dots \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \dots \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \dots$$

15. Soit $z \in \mathbf{C}$. Donner la forme algébrique de e^z.

16. Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. Compléter :

- **(a)** $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \dots$.
- **(b)** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \dots$.
- **(c)** $|\mathrm{e}^z| = \dots$ et $\arg(\mathrm{e}^z) \equiv \dots$.

17. Soit z, z' deux nombres complexes non nuls. Compléter :

- **(a)** $\arg(zz') \equiv \dots$;
- **(b)** $\arg(\overline{z}) \equiv \dots$;
- **(c)** $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv \dots$;
- **(d)** $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \dots$.

18. Donner la caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide de l'argument.

19. Énoncer les formules d'Euler.

20. Énoncer et démontrer les formules de factorisation par l'angle moitié.

21. Énoncer la formule de De Moivre.

22. Soit ρ, ρ' deux réels et θ, θ' deux réels. Compléter :

$$\rho\mathrm{e}^{i\theta} = \rho'\mathrm{e}^{i\theta'} \iff \dots$$