

CHAPITRE 3

TRIGONOMÉTRIE

3.1 Présentation

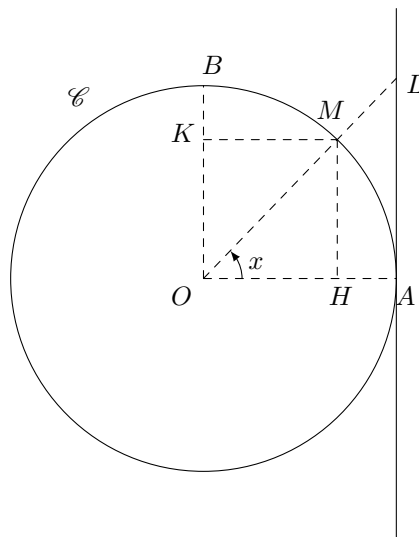
Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K , projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB) , et le point L intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A .

On oriente la droite (OA) (resp. (OB) , (OL)) par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OL}$).

Si x désigne une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, on sait que :

$$\cos(x) = \overline{OH}, \quad \sin(x) = \overline{OK}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AL},$$

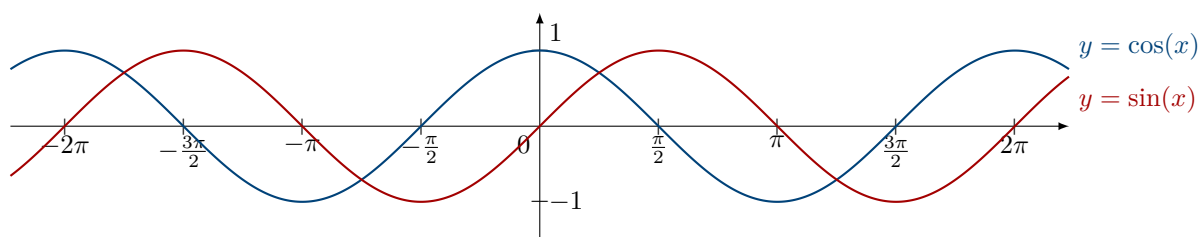
la tangente de x étant définie si et seulement si L existe, c'est-à-dire si le point M n'est pas sur la droite (OB) , c'est-à-dire si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.



Puisqu'on est capable de définir $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour tout x réel, on peut en déduire deux fonctions **cosinus** et **sinus** :

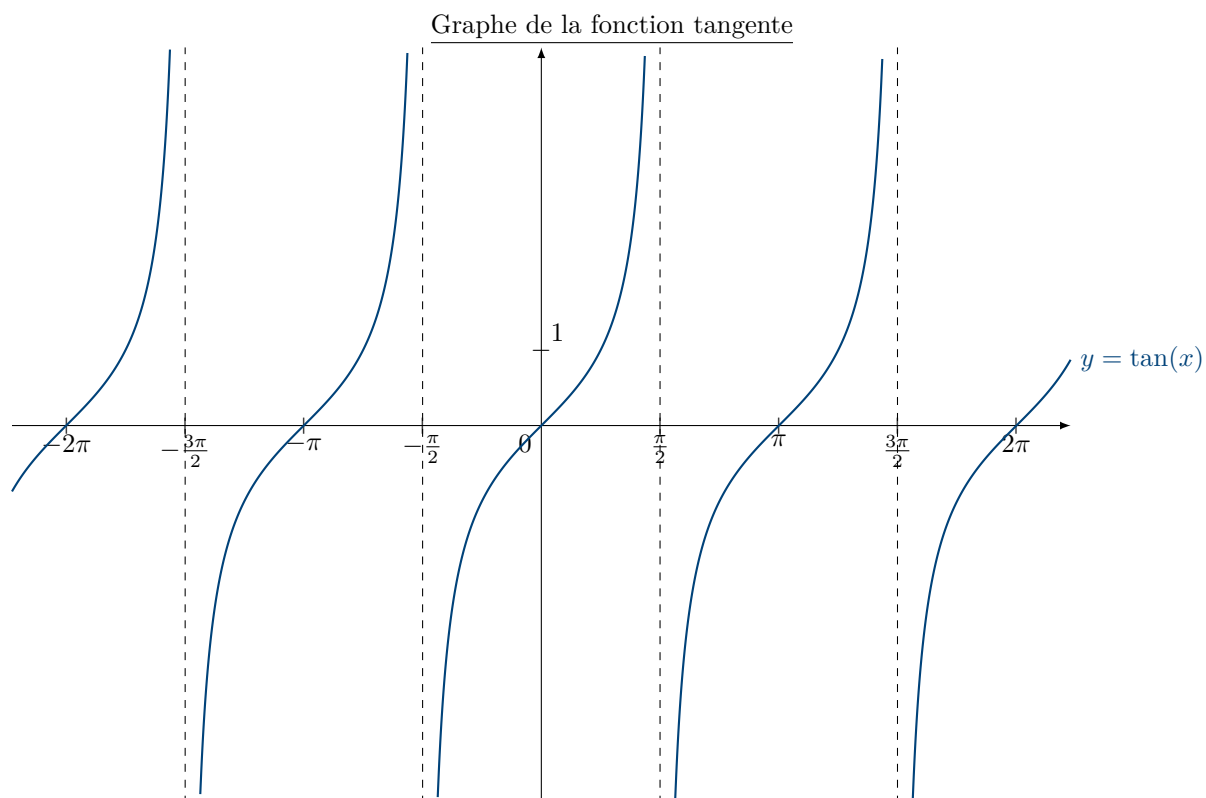
$$\begin{array}{ccc} \cos : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \sin : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Graphe des fonctions cosinus et sinus



De la même manière, on peut introduire une fonction **tangente**, construite comme le quotient de la fonction sinus par la fonction cosinus :

$$\begin{array}{ccc} \tan : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$



3.2 Formulaire de trigonométrie

Proposition 3.1 - Formule fondamentale de la trigonométrie.

Pour tout x réel,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Démonstration.

Corollaire 3.2.

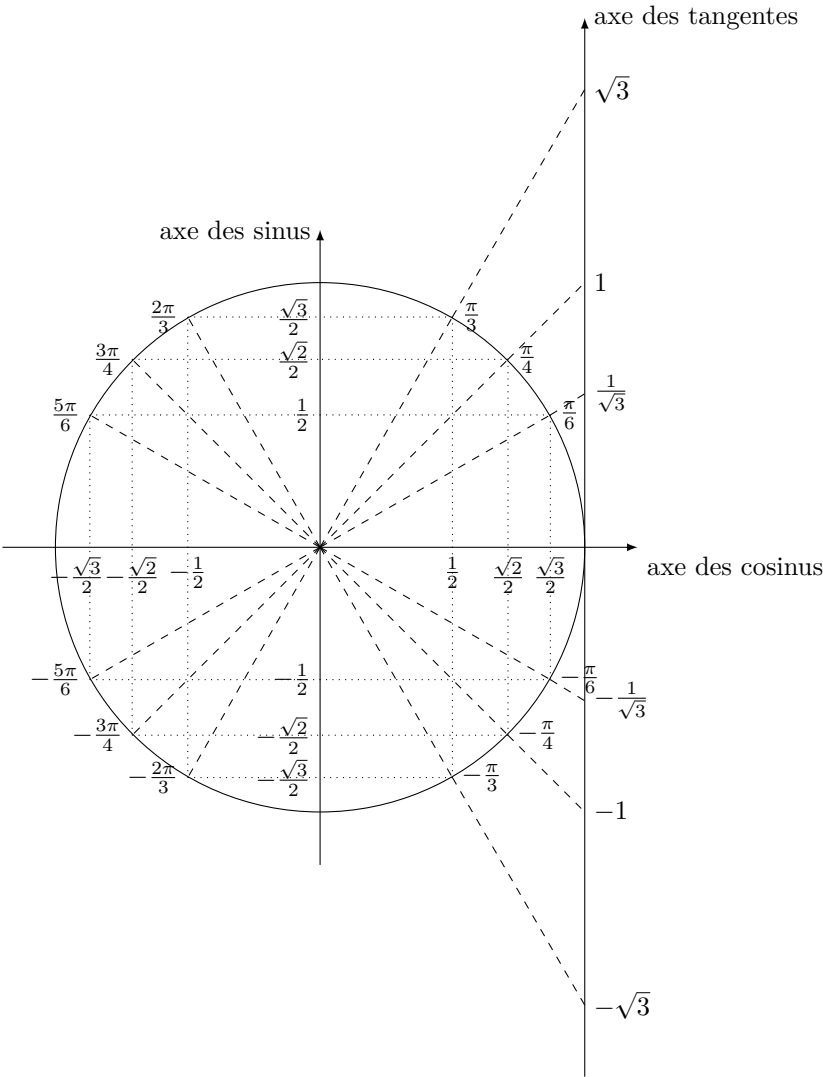
Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} k \in \mathbf{Z}$. On a

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}.$$

Démonstration.

On retiendra les valeurs remarquables suivantes.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

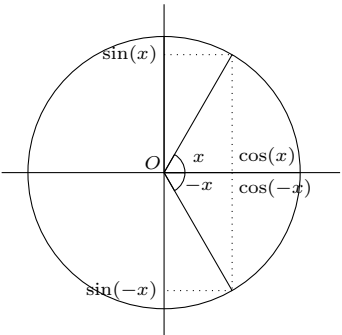


Proposition 3.3 - Parité, imparité.

Pour tout réel x (avec $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$ pour la dernière formule),

- 1. $\cos(-x) = \cos(x)$;
- 2. $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- 3. $\tan(-x) = -\tan(x)$.

En particulier, la fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires.



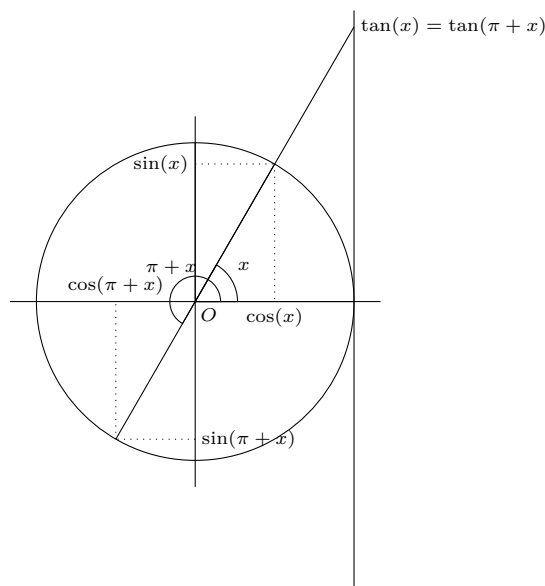
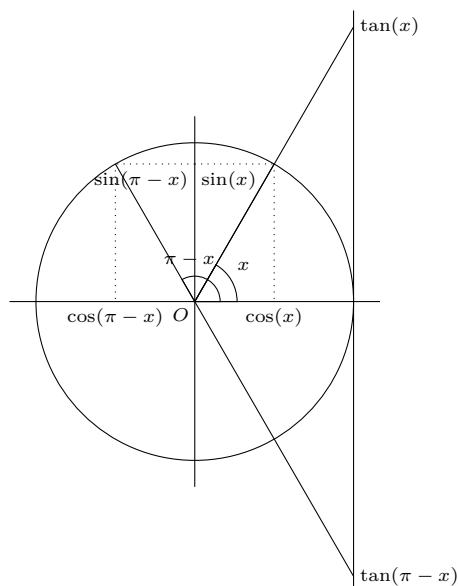
Proposition 3.4 - Cosinus, sinus, tangente en $\pi - x$, $\pi + x$.

Pour tout réel x ,

1. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$;
2. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$;
3. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$;
4. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$,

1. $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$;
2. $\tan(\pi + x) = \tan(x)$.

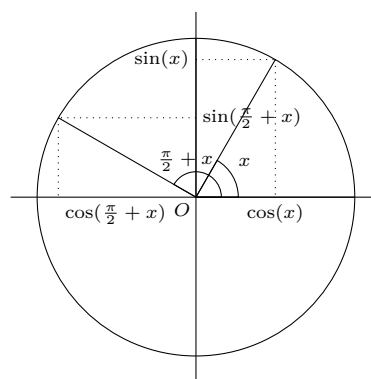
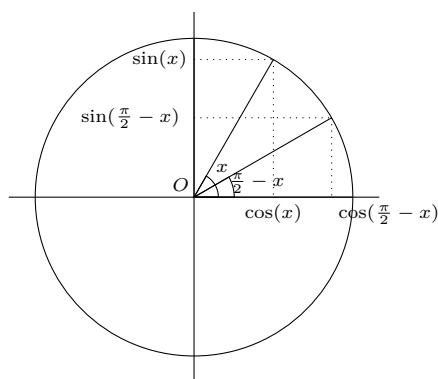
**Proposition 3.5 - Changement de ligne trigonométrique.**

Pour tout réel x ,

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$;
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$;
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$;
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$,

1. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$;
2. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$.



Remarque 3.6. Il n'est pas nécessaire d'apprendre par cœur les formules des Propositions 3.4 et 3.5. Il faut par contre savoir les retrouver (de tête) avec un dessin en moins d'une minute !

Proposition 3.7 - Formules d'addition.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$;
2. $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$;
3. $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$;
4. $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$.

Si de plus, $a, b, a + b$ et $a - b$ ne sont pas des éléments de $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors :

1. $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$;
2. $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$.

Démonstration $\frac{III}{\Rightarrow}$. • Soit a et b deux réels. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On place sur le cercle trigonométrique le point M de coordonnées $(\cos(a); \sin(a))$ et le point N de coordonnées $(\cos(a + b); \sin(a + b))$. On a donc

$$\overrightarrow{ON} = \cos(a + b)\vec{i} + \sin(a + b)\vec{j}.$$

On note K l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées de K dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont donc $(-\sin(a); \cos(a))$.

Ainsi, $(O; \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OK})$ forme un repère orthonormé du plan. Dans ce repère, $\overrightarrow{ON}$ forme un angle b avec l'axe des abscisses, donc ses coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OK})$ sont $(\cos(b), \sin(b))$. D'où

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OK} \\ &= \cos(b)(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}) + \sin(b)(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a))\vec{j} \end{aligned}$$

Les coordonnées d'un vecteur dans une base étant uniques, on en déduit que

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

- En appliquant ces deux relations à a et $-b$, on en déduit que

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

- Si $\tan(a)$, $\tan(a + b)$ et $\tan(b)$ existent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tan(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \quad (\text{on divise par } \cos(a)\cos(b) \text{ pour faire apparaître les tangentes}) \\ &= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

De même, avec l'impairité de la tangente, on obtient, lorsque $\tan(a - b)$, $\tan(a)$ et $\tan(b)$ sont définies :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

□

Remarque 3.8. Ces relations donnent immédiatement les formules des Propositions 3.4 et 3.5.

Corollaire 3.9 - Formules de duplication.

Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Si de plus, a n'est pas un élément de $\{\pi/4 + k\pi/2, \pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, alors :

3. $\cos(2a) = \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)}$;
4. $\sin(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 + \tan^2(a)}$;
5. $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

Démonstration ♥.

On applique la proposition précédente avec $b = a$. □

Exercice d'application 3.10. Déterminer la valeur du réel positif $\cos(\pi/8)$.

➡

Exercice d'application 3.11. Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. Exprimer $\cos^2(a)$ puis $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.
2. Si $\cos(2a) \neq -1$ et $\tan(a)$ existe, exprimer $\tan^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.

➡

Corollaire 3.12 - Transformation de produits en sommes.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

1. $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$;
2. $\sin(a)\sin(b) = -\frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2}$;
3. $\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$;
4. $\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$.

Démonstration ♥.

On rappelle que :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (3.1)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \quad (3.2)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (3.3)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (3.4)$$

- En ajoutant (3.3) et (3.4), on obtient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$, donc $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$.

- De même, en ajoutant (3.1) et (3.2), on obtient le point 3.
- En soustrayant (3.4) et (3.3), on obtient 2.
- Enfin, en soustrayant (3.1) et (3.2), on en déduit 4. □

Corollaire 3.13 - Transformation de sommes et produits.

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$
2. $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right);$
3. $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$
4. $\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$

Démonstration ♥.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que

$$\begin{cases} a+b = p \\ a-b = q \end{cases} \iff \begin{cases} a = (p+q)/2 \\ b = (p-q)/2 \end{cases}$$

En remplaçant dans le corollaire précédent a par $\frac{p+q}{2}$ et b par $\frac{p-q}{2}$, on obtient les résultats attendus. □

3.3 Compléments sur les fonctions trigonométriques

Lemme 3.14.

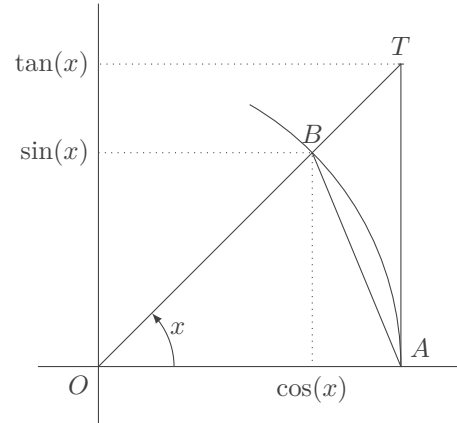
Pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) < x < \tan(x)$.

Démonstration $\frac{u}{u}$.

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$. On construit dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ le point A de coordonnées $(1, 0)$ et le point B de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$. On construit également le point T , intersection de la droite (OB) et de la droite d'équation $x = 1$. Les coordonnées de T sont donc $(1, \tan(x))$.

Par construction, l'aire du triangle OBA est strictement inférieure à l'aire du secteur de disque d'angle x qui elle-même est strictement inférieure à l'aire du triangle OTA .

- $\mathcal{A}_{OBA} = \frac{\sin(x)}{2}.$
- $\mathcal{A}_{\text{secteur}} = \pi \times \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$
- $\mathcal{A}_{OTA} = \frac{AT}{2} = \frac{\tan(x)}{2}.$



Ainsi, par comparaison des aires, on obtient $\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2}$. □

Proposition 3.15 - Encadrement d'un sinus.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

- Démonstration** $\frac{III}{\square}$. • En appliquant le lemme, on obtient que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq x$, donc $|\sin(x)| \leq |x|$.
- Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, alors $-x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc le point précédent assure que $|\sin(-x)| \leq |-x|$. Or $\sin(-x) = -\sin(x)$, donc cette inégalité se réécrit $|\sin(x)| \leq |x|$.
 - Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\sin(x)|$, d'où l'inégalité demandée.

Finalement, on a montré que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$. $\square$

Proposition 3.16 - Limites classiques.

On a

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1; \quad 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0; \quad 3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration $\frac{III}{\square}$. 1. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, d'après le lemme, on a puisque $\sin(x) > 0$, $x > 0$, $\tan(x) > 0$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{\sin(x)} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan(x)}.$$

Donc, comme $\sin(x) > 0$,

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \cos(x).$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1$ par continuité de $\cos$ en 0, donc $\frac{\sin(x)}{x}$ est encadrée deux fonctions de limite 1 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ d'après le théorème d'encadrement.

De plus, la fonction qui à x associe $\frac{\sin(x)}{x}$ est paire, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. Soit x un réel non nul dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Alors

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} = \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Or $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $\frac{1 - \cos(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

3. Soit x un réel non nul dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Alors

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2(1 + \cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x^2(1 + \cos(x))} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

Comme $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\frac{1}{1 + \cos(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$, on en déduit $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$. $\square$

Proposition 3.17 - Dérivées des fonctions trigonométriques.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$. De plus,

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos.$$

La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (où $k \in \mathbf{Z}$) et sur un tel intervalle,

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

En particulier, la fonction tangente est strictement croissante sur tout intervalle de cette forme.

Démonstration $\frac{III}{\text{a}}$. • Soit $x \in \mathbf{R}$, $h \in \mathbf{R}$. Alors, si $h \neq 0$, on a

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{x+h-x} = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} = \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}.$$

Or $\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ et $\frac{\cos(h)-1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Donc le taux d'accroissement de $\cos$ en x a une limite finie en 0 qui est $-\sin(x)$. Cela signifie que $\cos$ est dérivable en x et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

• Soit $x \in \mathbf{R}$, $h \in \mathbf{R}$. Alors, si $h \neq 0$, on a

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{x+h-x} = \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} = \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}.$$

Or $\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ et $\frac{\cos(h)-1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Donc le taux d'accroissement de $\sin$ en x a une limite finie en 0 qui est $\cos(x)$. Cela signifie que $\sin$ est dérivable en x et $\sin'(x) = \cos(x)$.

• Soit $k \in \mathbf{Z}$. Sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $\tan$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On a alors, pour tout x dans $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

□

3.4 Résolution d'équations trigonométriques

3.4.1 Relation de congruence

Définition 3.18 - Congruence modulo un réel.

Soit $(a, b, m) \in \mathbf{R}^3$. On dit que a est **congru à b modulo m** , et on note $a \equiv b [m]$, s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = b + km$ (autrement dit $a - b$ est un multiple de m).

Exemple 3.19. On a $\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} [\pi]$. En effet, $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - \pi$, ce qui montre que l'assertion

$$\exists k \in \mathbf{Z}, \quad \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + k\pi$$

est vraie.

Exercice d'application 3.20. Déterminer s'il existe un réel $a \in]0; 2\pi]$ tel que $\frac{37\pi}{4} \equiv a [2\pi]$.

➡

Proposition 3.21 - Principales propriétés de la relation de congruence.

Soit $m \in \mathbf{R}$.

1. **Réflexivité.** $\forall a \in \mathbf{R}, a \equiv a [m]$.
2. **Symétrie.** $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, a \equiv b [m] \iff b \equiv a [m]$.
3. **Transitivité.** $\forall (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, si $a \equiv b [m]$ et $b \equiv c [m]$ alors $a \equiv c [m]$.
4. **Somme.** $\forall (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, si $a \equiv c [m]$ et si $b \equiv d [m]$, alors $a + b \equiv c + d [m]$.
5. **Produit.** $\forall (a, b, \lambda) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^*$, si $a \equiv b [m]$, alors $\lambda a \equiv \lambda b [\lambda m]$.
6. **Projection.** $\forall (a, b, p) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}$, si $a \equiv b [pm]$, alors $a \equiv b [m]$.

Démonstration.

Exercice d'application 3.22. Soit x un réel vérifiant $3x + \pi \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$. Compléter : $x \equiv \dots [\dots]$.

➡

Soit θ, θ' deux réels. On a

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \cos(\theta') \\ \sin(\theta) &= \sin(\theta') \end{cases} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

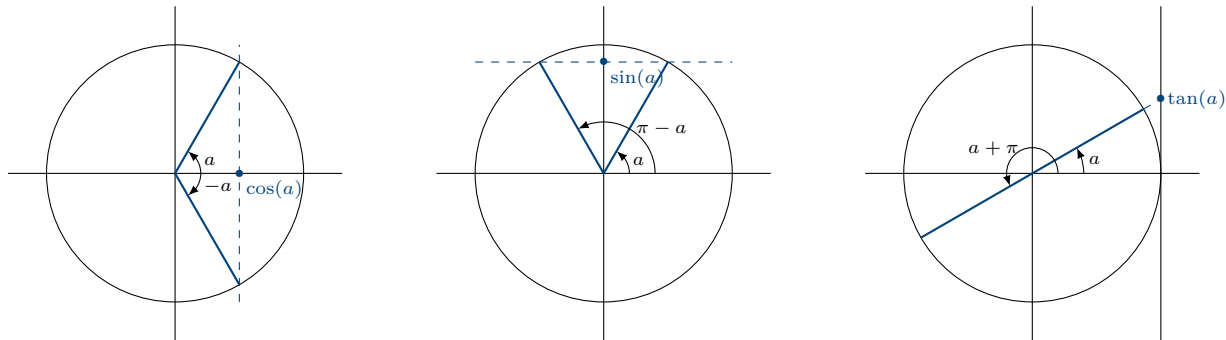
ce qui entraîne que si l'on connaît le cosinus et le sinus d'un angle, on connaît cet angle à 2π près.

3.4.2 Équations trigonométriques

La résolution d'équations trigonométriques est basée sur trois équivalences de base.

Proposition 3.23 - Égalités de sinus, de cosinus ou de tangentes.

1. Soit $x, a \in \mathbf{R}$. $\cos(x) = \cos(a)$ si et seulement si $x \equiv a [2\pi]$ ou $x \equiv -a [2\pi]$.
2. Soit $x, a \in \mathbf{R}$. $\sin(x) = \sin(a)$ si et seulement si $x \equiv a [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a [2\pi]$.
3. Soit $x, a \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$. $\tan(x) = \tan(a)$ si et seulement si $x \equiv a [\pi]$.



Exercice d'application 3.24. Résoudre l'équation $(E) : 4 \cos(x) = 2\sqrt{3}$ d'inconnue $x \in [0 ; 2\pi[$.

➡

Exercice d'application 3.25. Résoudre l'équation $(E) : 2 \sin(2x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

➡

Remarque 3.26. Il faut parfois utiliser les formules de trigonométrie pour se ramener à un des trois cas de la proposition précédente.

Exemple 3.27. Résolvons l'équation $(E) : \sin(2x) = \cos(3x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \cos(3x) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x) \\ &\iff \frac{\pi}{2} - 2x \equiv 3x \pmod{2\pi} \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 2x \equiv -3x \pmod{2\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{10} \pmod{\frac{2\pi}{5}} \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} : k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Exercice d'application 3.28. Résoudre l'équation $(E) : \sin(x) + \cos(7x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

➡

3.4.3 Inéquations trigonométriques

Pour résoudre une inéquation trigonométrique, il faut s'aider du cercle trigonométrique !

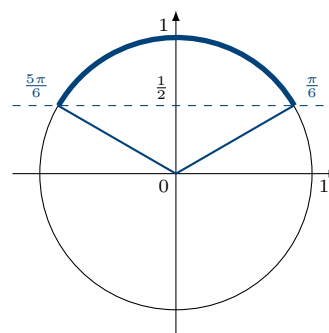
Exemple 3.29. Résolvons l'inéquation $2 \sin(2x - 4) > 1$ d'inconnue x réelle.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$2 \sin(2x - 4) > 1 \iff \sin(2x - 4) > \frac{1}{2}.$$

Or on lit sur le cercle trigonométrique que, pour $y \in \mathbf{R}$,

$$\sin(y) > \frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbf{Z}, x \in \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[$$



Reprenons le calcul précédent :

$$\begin{aligned} 2 \sin(2x - 4) > 1 &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x - 4 < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, \quad \frac{\pi}{12} + 2 + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2 + k\pi \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] \frac{\pi}{12} + 2 + k\pi; \frac{5\pi}{12} + 2 + k\pi \right[$.

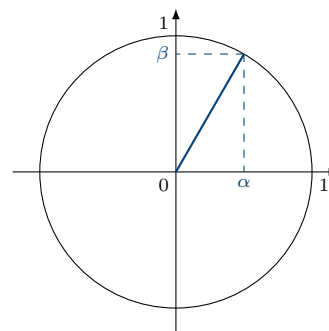
3.4.4 Somme de sinusoides

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. On admet que le système

$$\begin{cases} \cos(x) = \alpha \\ \sin(x) = \beta \end{cases}$$

d'inconnue x réelle admet une φ solution si et seulement si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (ce qui signifie que le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ appartient au cercle trigonométrique). On admet ce résultat, qu'on comprend facilement avec un schéma. On peut aussi préciser que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{cases} \iff x \equiv y [2\pi].$$



Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, soit $x \in \mathbf{R}$.

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

Puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, la remarque faite en début de paragraphe assure qu'il existe $\varphi \in \mathbf{R}$ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Donc

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

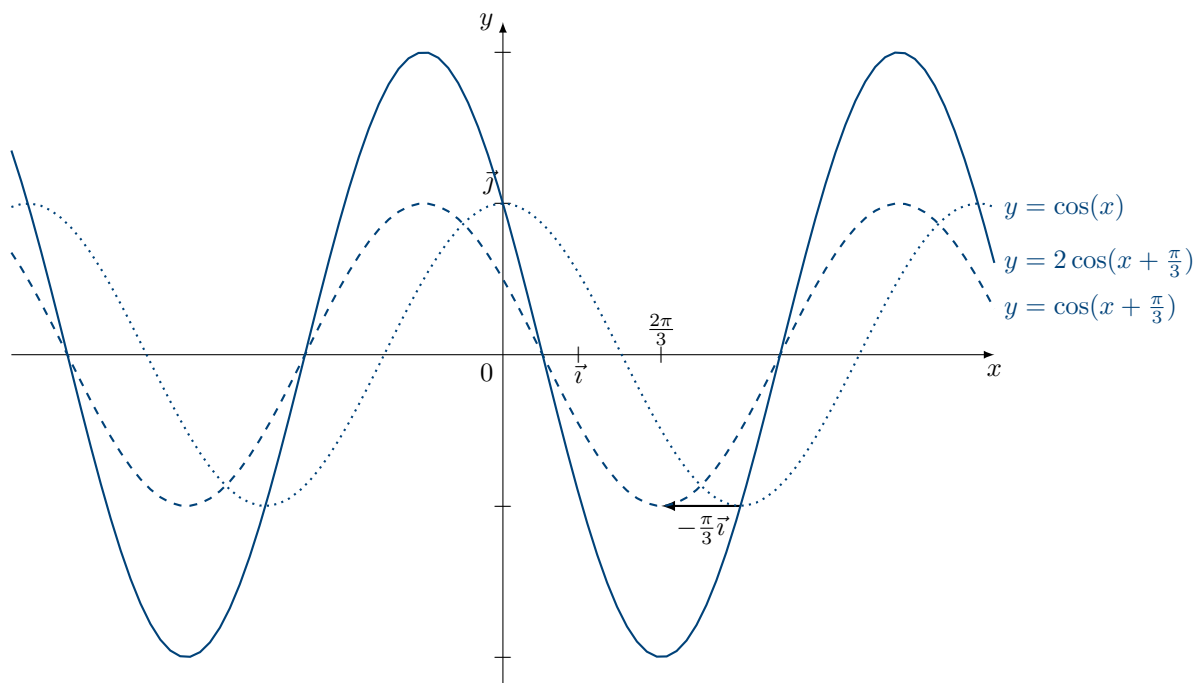
Cette transformation est à savoir refaire dans des cas pratiques !

Exemple 3.30. Cherchons comment tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x)$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On commence par factoriser par $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$:

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \sin(x) \right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

On peut ainsi représenter la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:



Cette transformation permet, en physique, de déterminer l'amplitude et la phase d'un signal de la forme $A \cos(x) + B \sin(x)$ (électromagnétique, sonore,...).

Exercice d'application 3.31. Résoudre l'équation (E) : $\sin(x) + \cos(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.



Exercice d'application 3.32. Résoudre l'inéquation $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \geq \frac{1}{2}$ d'inconnue x réelle.



Questions de cours

1. Tracer le graphe des fonctions sinus et cosinus.
2. Tracer le graphe de la fonction tangente.
3. Que vaut $\cos^2 + \sin^2$?
4. Dessiner le cercle trigonométrique avec les cosinus, sinus et tangente de tous les angles remarquables.
5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Simplifier $\cos(-x)$, $\sin(-x)$. Si $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$, simplifier $\tan(-x)$.
6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Simplifier $\cos(\pi - x)$, $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$, $\tan(\pi - x)$, $\tan(\pi + x)$ (pour les deux dernières, $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$).
7. Soit $x \in \mathbf{R}$. Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Si $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$, simplifier $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
8. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Simplifier $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$. Si de plus, a , b , $a + b$ et $a - b$ ne sont pas des éléments de $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$, alors simplifier $\tan(a + b)$ et $\tan(a - b)$.
9. Soit $a \in \mathbf{R}$. Simplifier $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$. Si de plus, a n'est pas un élément de $\{\pi/4 + k\pi/2, \pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, alors simplifier $\tan(2a)$.
10. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Simplifier $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\sin(a)\cos(b)$.
11. Soit $(p, q) \in \mathbf{R}^2$. Simplifier $\cos(p) + \cos(q)$, $\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$.
12. Donner l'encadrement usuel de sinus.
13. Donner les valeurs des limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$.
14. Donner les dérivées de cosinus, sinus et tangente (en précisant les domaines de dérivabilité à chaque fois).
15. Soit $(a, b, m) \in \mathbf{R}^3$. Donner la définition de « a est congru à b modulo m ».
16. Soit $a, b, c, d, m \in \mathbf{R}$. Si $a \equiv c [m]$ et $b \equiv d [m]$, que peut-on dire de $a + b$?
17. Soit $a, b, \lambda, m \in \mathbf{R}$ avec $\lambda \neq 0$. Si $a \equiv b [m]$, que peut-on dire de λa ?
18. Soit $x, a \in \mathbf{R}$. Compléter : $\cos(x) = \cos(a) \iff \dots$
19. Soit $x, a \in \mathbf{R}$. Compléter : $\sin(x) = \sin(a) \iff \dots$
20. Soit $x, a \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$. Compléter : $\tan(x) = \tan(a) \iff \dots$