

CHAPITRE 2

INÉGALITÉS, ÉQUATIONS
ET INÉQUATIONS2.1 Inégalités dans $\mathbf{R}$

2.1.1 Règles de calcul avec des inégalités

Définition 2.1 - Relation d'ordre.

La relation $\leq$ sur $\mathbf{R}$ est une **relation d'ordre**. Cela signifie qu'elle est

1. **réflexive** : $\forall x \in \mathbf{R}, x \leq x$;
2. **antisymétrique** : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x \leq y) \text{ et } (y \leq x) \implies x = y$;
3. **transitive** : $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, (x \leq y) \text{ et } (y \leq z) \implies x \leq z$.

Remarque 2.2. Il existe d'autres relations d'ordre qui vérifient les trois points de la définition : l'inclusion pour les ensembles, la divisibilité pour les nombres entiers, l'ordre alphabétique pour les mots.

Proposition 2.3 - Opérations autorisées pour une inégalité.

Soit a, b et c trois nombres réels.

- **Ajouter un nombre.** Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (le sens de l'inégalité ne change pas).
- **Multiplier par un nombre positif.** Si $a \leq b$ et si $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$ (le sens de l'inégalité ne change pas).
- **Multiplier par un nombre négatif.** Si $a \leq b$ et si $c \leq 0$, alors $ac \geq bc$ (le sens de l'inégalité change).

Remarque 2.4. Diviser par $c \neq 0$ revient à multiplier par $\frac{1}{c}$. Ainsi, on peut compléter la proposition précédente.

- **Diviser par un nombre strictement positif.** Si $a \leq b$ et si $c > 0$, alors $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ (le sens de l'inégalité ne change pas).
- **Diviser par un nombre strictement négatif.** Si $a \leq b$ et si $c < 0$, alors $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ (le sens de l'inégalité change).

**Méthode 2.5.** Établir une inégalité : méthode directe

Pour établir une inégalité, on peut partir d'une inégalité connue et reconstituer l'inégalité demandée. Dans cette méthode, on utilise des implications.

Exemple 2.6. Soit $x \in [1; 2]$. Encadrons l'expression $A(x) = \frac{-2x - 3}{\sqrt{7}}$.

Puisque $x \in [1; 2]$, on commence par écrire $1 \leq x \leq 2$, puis on applique les règles opératoires sur les inégalités jusqu'à

reconstituer $A(x)$.

$1 \leq x \leq 2$	
donc $-2 \times 1 \geq -2 \times x \geq -2 \times 2$	on multiplie par $2 \leq 0$
donc $-2 \geq -2x \geq -4$	on simplifie
donc $-2 - 3 \geq -2x - 3 \geq -4 - 3$	on ajoute -3
donc $-5 \geq -2x - 3 \geq -7$	on simplifie
donc $\frac{-5}{\sqrt{7}} \geq \frac{-2x - 3}{\sqrt{7}} \geq \frac{-7}{\sqrt{7}}$	on divise par $\sqrt{7} \geq 0$
donc $\frac{-5\sqrt{7}}{7} \geq A(x) \geq -\frac{7\sqrt{7}}{7}$	on simplifie

Finalement, $-\sqrt{7} \leq A(x) \leq -\frac{5\sqrt{7}}{7}$.

Exercice d'application 2.7. Soit $x \in [-1; 4]$. Encadrer les expressions suivantes :

1. $A(x) = 2x + 1$;
2. $B(x) = -\frac{3}{2}x + 7$;
3. $C(x) = \frac{x+1}{2}$.

➡

Proposition 2.8 - Opérations autorisées avec plusieurs inégalités.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels.

- **Ajouter des inégalités.** Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- **Multiplier des inégalités positives.** Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

**ATTENTION**

Toutes les autres opérations sont fausses en général. On ne multipliera donc pas des inégalités où des nombres ne sont pas positifs, on ne soustraira pas d'inégalités, on ne fera pas de quotients d'inégalités.

Exemple 2.9. On considère $x \in [1; 2]$ et $y \in [1; 3]$. Encadrons $(2x + 1)(3 - y)$. On commence par encadrer chaque facteur :

$$\begin{array}{ll} 1 \leq x \leq 2 & \\ \text{donc } 2 \leq 2x \leq 4 & \text{on multiplie par } 2 \geq 0 \\ \text{donc } 3 \leq 2x + 1 \leq 5 & \text{on ajoute } 1 \end{array}$$

De même,

$$\begin{array}{ll} 1 \leq y \leq 3 & \\ \text{donc } -1 \geq -y \geq -3 & \text{on multiplie par } -1 \\ \text{donc } 2 \geq -y + 3 \geq 0 & \text{on ajoute } 3 \end{array}$$

Ainsi, $3 \leq 2x + 1 \leq 5$ et $0 \leq -y + 3 \leq 2$. On peut multiplier ces inégalités car toutes les quantités sont positives :

$$0 \leq (2x + 1)(3 - y) \leq 10.$$

Exercice d'application 2.10. Soit $x \in [1; 3]$ et $y \in [2; 3]$. Encadrer les quantités suivantes :

1. $A(x, y) = x + y + 3$;
2. $B(x, y) = (2x + 1)(y + 5)$.

**Méthode 2.11.** Établir une inégalité : étudier le signe de la différence

Pour établir une inégalité du type $A(x) \leq B(x)$, on peut plutôt montrer que $B(x) - A(x) \geq 0$. Pour cela, on peut factoriser $B(x) - A(x)$ (c'est TOUJOURS une bonne idée pour étudier un signe!!).

Exercice d'application 2.12.

1. Démontrer que pour tous réels a et b , $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
2. En déduire que pour tous réels a et b , $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.



2.1.2 Intervalles

Notation 2.13. On rappelle que si a et b sont deux réels, on a les notations suivantes :

- $a \leq b$: a est inférieur ou égal à b ($1 \leq 2$, $1 \leq 1$) ;
- $a < b$: a est strictement inférieur à b ($1 < 2$) ; en particulier, $a \neq b$;
- $a \geq b$: a est supérieur ou égal à b ($2 \geq 1$, $1 \geq 1$) ;
- $a > b$: a est strictement supérieur à b ($2 > 1$) ; en particulier, $a \neq b$.

Définition 2.14 - Intervalle.

On dit qu'un ensemble de nombres I est un **intervalle** si et seulement si, pour tous nombres x et y dans I , tous les nombres compris entre x et y sont aussi dans I . Autrement dit, un intervalle est un ensemble de nombres « sans trou ».

Il existe dix formes d'intervalles. Soit $a, b \in \mathbf{R}$, avec $a \leq b$:

L'intervalle noté...	... est l'ensemble des réels x tels que...	Il est représenté sur une droite graduée par :	Intervalle...
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$		fermé
$]a ; b[$	$a < x < b$		ouvert
$[a ; b[$	$a \leq x < b$		semi-ouvert
$]a ; b]$	$a < x \leq b$		semi-ouvert
$[a ; +\infty[$	$a \leq x$		fermé
$]a ; +\infty[$	$a < x$		ouvert
$]-\infty ; b]$	$x \leq b$		fermé
$]-\infty ; b[$	$x < b$		ouvert
$\emptyset$	Aucun réel		ouvert et fermé
$\mathbf{R} =]-\infty ; +\infty[$	Tous les réels		ouvert et fermé

On pourra retenir aussi qu'un intervalle est un ensemble qui peut s'écrire sous l'une des dix formes précédentes (on le démontrera dans un chapitre ultérieur).

**ATTENTION**

On veillera à ne pas confondre les crochets et les accolades ! Par exemple, $[0; 2]$ est l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 2 (en particulier, $1 \in [0; 2]$) tandis que $\{0, 2\}$ désigne l'ensemble constitué uniquement des deux nombres 0 et 2 (en particulier, $1 \notin \{0, 2\}$).

Exemple 2.15. • $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle. Pour le justifier soigneusement, on peut remarquer que $-1 \in \mathbf{R}^*$, $1 \in \mathbf{R}^*$ et pourtant $0 \notin \mathbf{R}^*$ (donc tous les nombres compris entre -1 et 1 ne sont pas dans l'ensemble).

• $\mathbf{R}_+ = [0; +\infty[$, $\mathbf{R}_+^* =]0; +\infty[$, $\mathbf{R}_- =]-\infty; 0]$ et $\mathbf{R}_-^* =]-\infty; 0[$ sont des intervalles.

Définition 2.16 - Segment.

On appelle **segment** un intervalle fermé borné, c'est-à-dire un ensemble de la forme $[a; b]$, où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$.

2.2 Valeur absolue

Définition 2.17 - Valeur absolue.

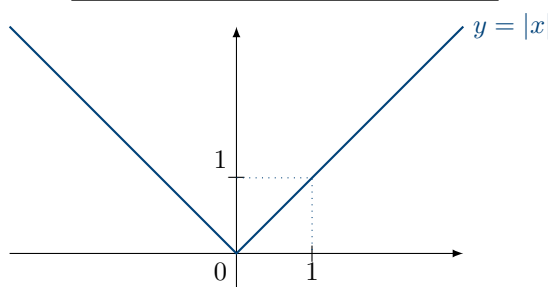
Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle **valeur absolue** de x , et on note $|x|$, le plus grand réel entre $-x$ et x . Autrement dit,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a aussi $|x| = \max\{-x, x\}$.

Puisqu'on peut définir le réel $|x|$ pour toute valeur de x réelle, on peut construire la **fonction valeur absolue**, définie sur $\mathbf{R}$, et qui à chaque x réel associe $|x|$.

Graphe de la fonction valeur absolue

**Proposition 2.18 - Propriétés importantes sur la valeur absolue.**

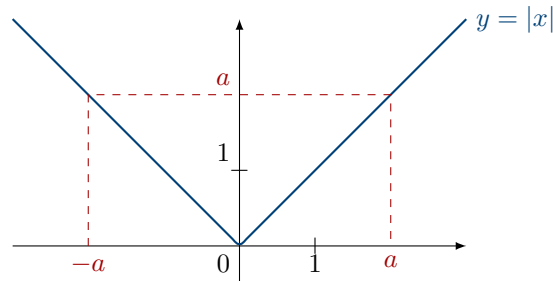
Soit x, y deux réels (avec y non nul pour la dernière formule), soit n un naturel.

- | | | |
|----------------------|-------------------------|---|
| 1. $ x \geq 0$; | 2. $ -x = x $; | 3. $ x \cdot y = x \cdot y $; |
| 4. $ x^n = x ^n$; | 5. $\sqrt{x^2} = x $; | 6. $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }$. |

Proposition 2.19 - Équation avec une valeur absolue.

Soit x , y et a trois réels.

1.
 - Si $a \geq 0$, $|x| = a \iff x = -a$ ou $x = a$;
 - Si $a < 0$, $|x| = a$ n'a pas de solution (car une valeur absolue est toujours positive).
2. $|x| = |y| \iff x = -y$ ou $x = y$.



Démonstration.

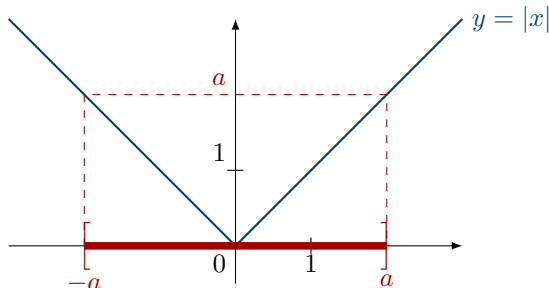
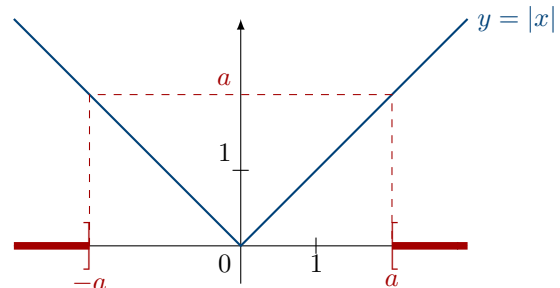
Proposition 2.20 - Inéquation avec une valeur absolue.

Soit x un réel et a un réel positif,

1. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$;
2. $|x| \geq a \iff x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Les relations restent vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Dans le cas où a est un réel strictement négatif, il faut utiliser qu'une valeur absolue est toujours positive (l'inéquation 1. n'admet pas de solution, l'inéquation 2. admet tous les réels pour solution).

Solutions de $|x| \leq a$ Solutions de $|x| \geq a$ 

Démonstration. 1. $|x| \leq a \iff \sqrt{x^2} \leq a \iff x^2 \leq a^2 \iff -a \leq x \leq a$.

2. $|x| \geq a \iff \sqrt{x^2} \geq a \iff x^2 \geq a^2 \iff x \leq -a \text{ ou } x \geq a$.

Théorème 2.21 - Inégalités triangulaires.

Soit $x, y \in \mathbf{R}$.

1. Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$.
2. Seconde inégalité triangulaire : $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Démonstration.

Corollaire 2.22 - Généralisation de l'inégalité triangulaire.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. On a :

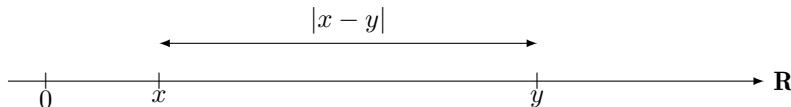
$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Démonstration.

Définition 2.23 - Distance entre deux réels.

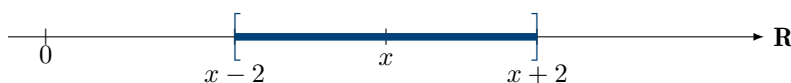
Soit $x, y \in \mathbf{R}$. On appelle **distance** entre x et y le nombre $|x - y|$.

On peut interpréter géométriquement la distance entre x et y en représentant la droite des réels :



Exemple 2.24. Sur la droite ci-dessous, x est un réel fixé. On a colorié l'ensemble des réels qui sont à une distance inférieure ou égale à 2 de x , à savoir l'ensemble :

$$\{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| \leq 2\} = \{y \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x - y \leq 2\} = \{y \in \mathbf{R} \mid x - 2 \leq y \leq x + 2\} = [x - 2; x + 2].$$



2.3 Partie entière

Définition 2.25 - Partie entière d'un réel.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle **partie entière** le plus grand entier inférieur ou égal à x . On le note $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 2.26. $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -3, 8 \rfloor = -4$.

Remarque 2.27 (♥). La définition assure que pour tout nombre réel x , $\lfloor x \rfloor$ est caractérisé par

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Cela signifie que, pour x réel, si on détermine y un entier qui vérifie $y \leq x < y + 1$, alors on peut en déduire que $y = \lfloor x \rfloor$.

Exemple 2.28 (♾). Soit $a \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Montrons que $\lfloor \sqrt{a^2 + 5} \rfloor = a$.

On remarque que $a^2 \leq a^2 + 5 < a^2 + 2a + 1$, donc $a^2 \leq a^2 + 5 < (a + 1)^2$. Or $a \in \mathbf{N}$, donc $\lfloor \sqrt{a^2 + 5} \rfloor = a$.

Proposition 2.29 - Principales propriétés de la partie entière.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
2. $\forall n \in \mathbf{Z}, \lfloor n \rfloor = n$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, (n \leq x \implies n \leq \lfloor x \rfloor)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Démonstration.

Exercice d'application 2.30. Résoudre $\lfloor x + 3 \rfloor = 2$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

➡

Exercice d'application 2.31.  Résoudre l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

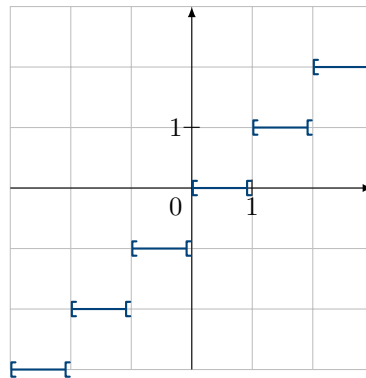
➡

Proposition 2.32 - Croissance de la partie entière.

La fonction partie entière est croissante.

Démonstration.

Graphes de la fonction partie entière.



2.4 Équations

2.4.1 Règles générales

Définition 2.33 - Équation.

Une **équation** est une assertion qui dépend d'une ou plusieurs variables qui varient dans des ensembles fixés, écrite sous forme d'égalité.

Résoudre une équation consiste à déterminer l'ensemble des valeurs des inconnues pour lesquelles cette égalité est une assertion vraie.

Quand on peut résoudre une équation par équivalences, on le fait ! Sinon, il faut plutôt réaliser une analyse/synthèse.



Méthode 2.34. Bien rédiger la résolution d'une équation par équivalences

1. Il faut avant de commencer déterminer à quels ensembles doivent appartenir les inconnues pour que chacun des termes de l'équation soit correctement défini (c'est le **domaine de définition** de l'équation). À la fin, il faut vérifier que les solutions obtenues appartiennent effectivement à ces ensembles !
2. On introduit les inconnues (avec « soit $x \in \dots$ » si x est le nom d'une inconnue).
3. On utilise une chaîne d'équivalences pour résoudre l'équation (l'idée consiste à chaque étape à simplifier l'équation).
4. On conclut en présentant toutes les solutions (souvent on présente l'ensemble des solutions).

Exercice d'application 2.35. Résoudre l'équation $\frac{x+1}{x-2} = x$ d'inconnue réelle x .



Voici ci-après les différents types d'équation que vous savez déjà résoudre (dans chaque cas, l'inconnue est le réel x).

- **Équations polynomiales de degré 1.** Ce sont les équations du type $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbf{R}$.

- **Équations polynomiales de degré 2.** Ce sont les équations du type $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbf{R}$.
- **Équations du type $|x| = a$.** Voir la Proposition 2.19.
- **Équations du type $\sqrt{x} = a$.** Si $a \geq 0$, l'ensemble des solutions est $\{a^2\}$. Si $a < 0$, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

**ATTENTION**

Cette dernière équation ne se résout pas simplement en élevant au carré. De manière générale, si $a, b \in \mathbf{R}$, on a

$$a^2 = b^2 \iff a = b \text{ ou } a = -b$$

donc l'équivalence

$$a^2 = b^2 \iff a = b$$

n'est vraie **que si a et b sont de même signe !**

**Méthode 2.36.** *Distinguer des cas quand on résout une équation*

Quand on résout une équation, on est parfois amené à distinguer des cas (on le fait souvent quand on a des valeurs absolues). Si on résout l'équation sur $\mathbf{R}$, il faut bien penser à ce que les cas incorpore tous les réels exactement une fois ! L'ensemble des solutions est alors la réunion des solutions obtenues pour chacun des cas.

Exercice d'application 2.37. Résoudre l'équation $(E) : \sqrt{x^2 + 1} = 2x + 1$ d'inconnue x réelle.

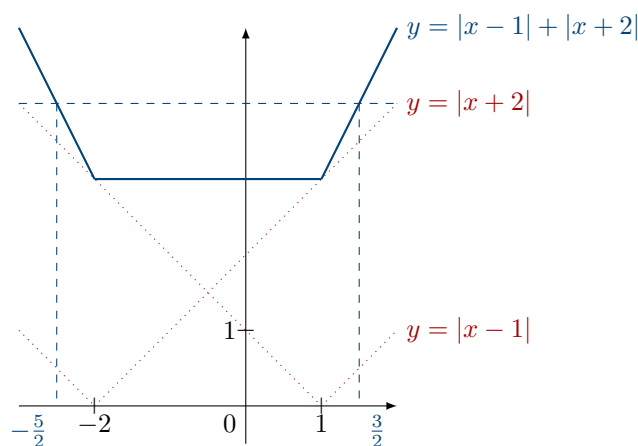


Exercice d'application 2.38.

1. Écrire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'expression $|x - 1| + |x + 2|$ sans valeurs absolues (on distinguera trois cas).
2. Résoudre l'équation $|x - 1| + |x + 2| = 4$ d'inconnue x réelle.

➡

Remarque 2.39. Notons qu'on a :



2.4.2 Équations sous forme factorisée

Quand on a plusieurs fractions, on peut multiplier l'équation par les dénominateurs. Quand on peut factoriser, on le fait !

Proposition 2.40 - Produit nul, quotient nul.

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul (on rappelle qu'un dénominateur n'est jamais nul!).

**ATTENTION**

Quand on a une équation du type $A(x) \times B(x) = A(x) \times C(x)$, il est faux de simplifier par $A(x)$!! Il faut plutôt écrire :

$$\begin{aligned} A(x) \times B(x) &= A(x) \times C(x) \iff A(x) \times B(x) - A(x) \times C(x) = 0 \\ &\iff A(x) \times (B(x) - C(x)) = 0 \\ &\iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) - C(x) = 0. \end{aligned}$$

Par exemple, considérons l'équation $x(2x + 1) = x(x + 2)$. Si x est un réel quelconque et qu'on divise de chaque côté par x , on obtient $2x + 1 = x + 2$ et donc 1 comme unique solution (on a commis une erreur puisqu'on a divisé par une quantité qui peut s'annuler). Si on résout correctement l'équation, on a plutôt :

$$x(2x + 1) = x(x + 2) \iff x(2x + 1) - x(x + 2) = 0 \iff x(x - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Exercice d'application 2.41. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^3 - x^2 = (x - 1)(x + 6)$.



Exemple 2.42. Résolvons dans $\mathbf{R}$ l'équation $(E) : x^4 \sin(x) - 16 \sin(x) - 2x^4 + 32 = 0$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} x^4 \sin(x) - 16 \sin(x) - 2x^4 + 32 &= 0 \iff (x^4 - 16) \sin(x) - (x^4 - 16) \times 2 = 0 \\ &\iff (x^4 - 16)(\sin(x) - 2) = 0 \\ &\iff (x^2 - 4)(x^2 + 4)(\sin(x) - 2) = 0 \\ &\iff x^2 - 4 = 0 \text{ ou } x^2 + 4 = 0 \text{ ou } \sin(x) - 2 = 0 \\ &\iff x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = -4 \text{ ou } \sin(x) = 2 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

En effet, l'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution (un carré est toujours positif) et $\sin(x) = 2$ n'a pas de solution (puisque $\sin \geq -1$). Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-2, 2\}$.

2.5 Inéquations

2.5.1 Règles générales

Définition 2.43 - Inéquation.

Une **inéquation** est une assertion qui dépend d'une ou plusieurs variables qui varient dans des ensembles fixés, écrite sous forme d'inégalité (large ou stricte).

Résoudre une inéquation consiste à déterminer l'ensemble des valeurs des inconnues pour lesquelles cette inégalité est une assertion vraie.

En général, on résout les inéquations par équivalence. L'analyse/synthèse est difficile pour les inéquations, car il y a souvent une infinité de candidats-solutions à tester dans la phase de synthèse.

Les règles de rédaction des équations s'appliquent aux inéquations.

Exercice d'application 2.44. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue x réelle.

$$(E) : \frac{-2x + 3}{5} \leq 1.$$

➡

2.5.2 Inéquations sous forme factorisée

Quand on a plusieurs fractions, on se ramène à un unique quotient nul. Si on peut factoriser, on le fait ! Ensuite, on peut utiliser un tableau de signes pour conclure.



ATTENTION



On ne multiplie ni ne divise JAMAIS par une expression qui dépend de l'inconnue dans une inéquation (sauf si on connaît son signe).

Exemple 2.45. Considérons l'équation suivante, d'inconnue x réelle.

$$(E) : (x + 1)(2x + 5) < (x + 1)(4x + 1).$$

Le domaine de définition de l'inéquation est $\mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} (x + 1)(2x + 5) < (x + 1)(4x + 1) &\iff (x + 1)[(2x + 5) - (4x + 1)] < 0 && \text{on ne DIVISE PAS par } x + 1 \\ &\iff (x + 1)(2x + 5 - 4x - 1) < 0 \\ &\iff (x + 1)(-2x + 4) < 0. \end{aligned}$$

On peut maintenant s'aider d'un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$	—	0	+	+
$-2x + 4$	+	0	+	—
$(x + 1)(-2x + 4)$	—	0	+	—

Puisque l'inéquation à laquelle on s'est ramené est $(x + 1)(-2x + 4) < 0$, il faut chercher les valeurs strictement négatives du tableau. On trouve que l'ensemble des solutions est $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

Exercice d'application 2.46. Résoudre l'inéquation $(E) : \frac{7x - 5}{x^2 + 2x + 1} > 1$ d'inconnue x réelle.

➡

Exemple 2.47 ($\frac{11}{2}$). Soit pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance entre $f(x)$ et 1 est inférieure à $\frac{1}{2}$.

La distance entre $f(x)$ et 1 est $|f(x) - 1|$. On demande donc ici de résoudre l'inéquation $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$. L'ensemble de définition de cette inéquation est $\{x \in \mathbf{R} \mid x+2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Soit $x \neq -2$.

$$\begin{aligned}
 & |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+1}{x+2} - 1 \geq -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x+1}{x+2} - 1 \leq \frac{1}{2} && \text{d'après la Proposition 2.20} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2(x+1)}{2(x+2)} - \frac{2(x+2)}{2(x+2)} + \frac{x+2}{2(x+2)} \geq 0 \text{ et } \frac{2(x+1)}{2(x+2)} - \frac{2(x+2)}{2(x+2)} - \frac{x+2}{2(x+2)} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{2x+2-2x-4+x+2}{2(x+2)} \geq 0 \text{ et } \frac{2x+2-2x-4-x-2}{2(x+2)} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x}{2(x+2)} \geq 0 \text{ et } \frac{-x-4}{2(x+2)} \leq 0
 \end{aligned}$$

Il nous reste deux inéquations sous forme de quotient à étudier, on utilise des tableaux de signes !

- On a

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x				
$x+2$				
$\frac{x}{2(x+2)}$				

Donc l'ensemble des solutions de $\frac{x}{2(x+2)} \geq 0$ est $] -\infty ; -2[\cup [0 ; +\infty[$.

- On a

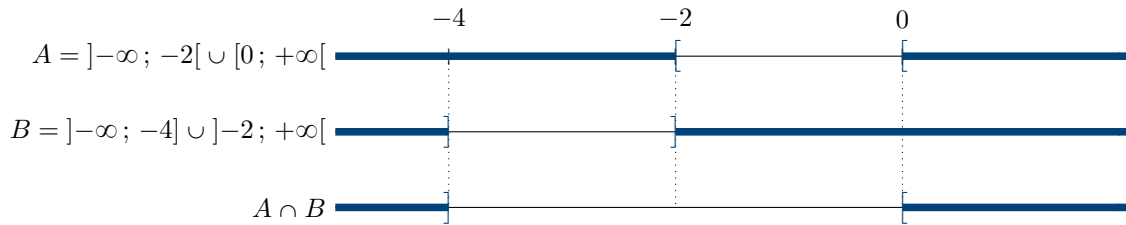
x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$
$-x-4$				
$x+2$				
$\frac{-x-4}{2(x+2)}$				

Donc l'ensemble des solutions de $\frac{-x-4}{2(x+2)} \leq 0$ est $] -\infty ; -4] \cup] -2 ; +\infty[$.

Finalement, comme les deux inéquations précédentes doivent être vérifiées simultanément (car on a un « et » entre les deux), l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\left(] -\infty ; -2[\cup [0 ; +\infty[\right) \cap \left(] -\infty ; -4] \cup] -2 ; +\infty[\right) =] -\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[.$$

Pour mieux voir cette dernière simplification, on peut s'aider d'un schéma :



2.6 Résolution des systèmes linéaires

2.6.1 Présentation du problème

Définition 2.48 - Équation linéaire.

On appelle **équation linéaire** à p inconnues toute équation du type

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ éléments de $\mathbf{R}$, et avec $a_1, a_2, \dots, a_p, b$ des éléments de $\mathbf{R}$ fixés.

On appelle $a_1, a_2, \dots, a_p$ les **coefficients** et b le **second membre**.

Remarque 2.49. L'équation $x + y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ n'est **pas** une équation linéaire (à cause de la puissance 2 au niveau de y).

Exemple 2.50. • Prenons $p = 2$, et notons x et y les inconnues, a, b les coefficients réels et $c \in \mathbf{R}$ le second membre. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, dans le plan muni d'un repère orthonormé (direct) $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = c$ est une droite de vecteur directeur $-b\vec{u} + a\vec{v}$ et de vecteur normal $a\vec{u} + b\vec{v}$.

- Prenons $p = 3$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. L'équation $ax + by + cz = d$ d'inconnue (x, y, z) correspond à l'équation d'un plan si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, de vecteur normal $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, si l'on se place dans un repère orthonormé (direct) $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exemple 2.51. • L'équation linéaire $x + 3 = 1$ admet une unique solution, qui est 2.

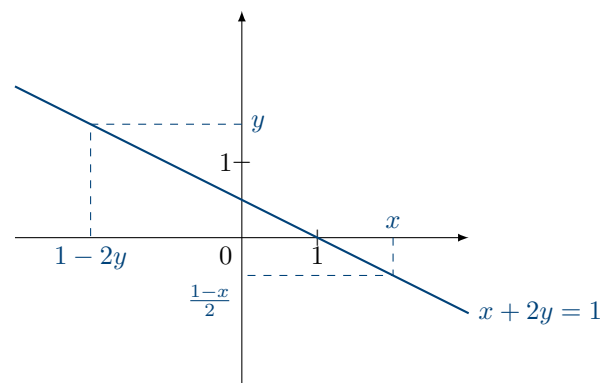
- L'équation linéaire $x + 2y = 1$ admet une infinité de solutions. En effet, on peut exprimer x en fonction de y avec $x = 1 - 2y$: chaque nouvelle valeur de y génère une nouvelle solution. Par exemple, pour $y = 0$, on a $x = 1$ donc le couple $(1, 0)$ est solution. Pour $y = 2$, on a $x = -3$ donc le couple $(-3, 2)$ est solution, etc. On note

$$\{(1 - 2y, y) : y \in \mathbf{R}\}.$$

l'ensemble des solutions de cette équation. On dit que y est une **inconnue secondaire** tandis que x est une **inconnue principale**.

Remarque. On aurait pu choisir plutôt x comme inconnue secondaire et y comme inconnue principale : $x + 2y = 1$ équivaut à $y = \frac{1-x}{2}$. Dans ce cas, on obtient l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \left(x, \frac{1-x}{2} \right) : x \in \mathbf{R} \right\}.$$



Exercice d'application 2.52. Déterminer l'ensemble des solutions de $2x + 4y = 6$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.



Exercice d'application 2.53. Déterminer l'ensemble des solutions de $x + y + z = 1$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.



Définition 2.54 - Système linéaire, inconnue, système homogène.

On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues tout système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \quad (\text{S})$$

où $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{R}$. Un tel système est d'**inconnue** $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p$.

Un système dont le second membre (tous les termes à droite du symbole $=$ dans (S)) est nul est dit **homogène**.

On dit qu'un système est **compatible** s'il admet au moins une solution (dans le cas contraire, on dit qu'il est **incompatible**).

Résoudre un système linéaire c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Exemple 2.55. Le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

est un système linéaire de deux équations à trois inconnues $(x, y \text{ et } z)$. Ce système n'est pas homogène car le second membre n'est pas nul. Le système homogène associé est donné par :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Il admet $(0, 0, 0)$ comme solution.

Remarque 2.56. Notons qu'un système homogène est toujours compatible (il admet toujours $(0, \dots, 0)$ pour solution).

Exemple 2.57. • Un système linéaire de n équations à 2 inconnues correspond à l'intersection de n droites du plan. Cette interprétation permet de comprendre qu'un tel système peut n'avoir aucune solution (si les droites sont parallèles), une unique solution (si les droites sont concourantes : la solution est alors le couple de coordonnées du point d'intersection des droites) ou une infinité de solutions (si les droites sont confondues : les solutions décrivent les coordonnées de tous les points de cette unique droite).

- Un système linéaire de n équations à 3 inconnues correspond à l'intersection de n plans de l'espace, qui peut être vide (si les plans sont parallèles), une droite (si les plans s'intersectent tous en la même droite) ou un plan.

2.6.2 Opérations élémentaires

On considère dans ce paragraphe le système suivant, où $L_1, \dots, L_n$ sont les différentes lignes du système.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Définition 2.58 - Opérations élémentaires.

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes du système toute opération d'un des trois types suivants.

1. Échange de deux lignes i et j , qu'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne i par un nombre **non nul** $\alpha \in \mathbf{R}^*$, qu'on note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
3. Ajout à une ligne i un multiple $\beta \in \mathbf{R}$ d'une autre $j \neq i$, qu'on note $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.

Notons qu'on utilise très souvent les dernières opérations en même temps : $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ (avec $\alpha \neq 0$ toujours!).

Définition 2.59 - Systèmes équivalents.

On dit que deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont **équivalents** s'ils possèdent le même ensemble de solutions. On admettra (pour l'instant) que deux systèmes sont équivalents si l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $(S_1) \Longleftrightarrow (S_2)$.

Exemple 2.60. On considère le système $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -x + 7y = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ \boxed{-1} x + 7y = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 11y = 7 \\ \boxed{-1} x + 7y = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

Sous cette forme, le système est bien plus simple à résoudre ! En effet, la variable x n'apparaît plus sur la première ligne !

**Méthode 2.61.** Réduire une colonne avec des opérations élémentaires

On peut annuler tous les coefficients d'une colonne sauf un fixé à l'aide d'opérations élémentaires. Par exemple, si $a_{1,1} \neq 0$,

$$\begin{cases} \boxed{a_{1,1}} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ a_{2,1} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ a_{3,1} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{a_{1,1}} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet & L_2 \leftarrow a_{1,1} L_2 - a_{2,1} L_1 \\ \bullet y + \bullet z = \bullet & L_3 \leftarrow a_{1,1} L_3 - a_{3,1} L_1 \end{cases}$$

(dans cette représentation, $\bullet$ représente un réel quelconque).

Exercice d'application 2.62. On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

Déterminer un système équivalent de la forme :

$$\begin{cases} \boxed{1} x + 2y + 3z = 4 \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases}$$

Vous préciserez les opérations effectuées.



Exemple 2.63. Dans l'Exemple 2.60, on aurait pu continuer sur le même principe : faire une opération sur la première ligne pour que y n'apparaissent plus dans la deuxième :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{11} y = 7 \\ \boxed{-1} x + 7y = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{11} y = 7 \\ \boxed{-11} x = -38 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow 11L_2 - 7L_1$$

C'est sur cette idée qu'est basée la méthode de Gauss, présentée après. L'intérêt du dernier système est qu'il est immédiat à résoudre !

2.6.3 Méthode de Gauss

On décrit ci-dessous un algorithme permettant de simplifier un système linéaire via des opérations élémentaires.



Méthode 2.64. Algorithme de réduction de Gauss

On explique sur un exemple de système. La méthode se généralise ensuite immédiatement.

1. On commence par réordonner les inconnues du système (on les met dans le même ordre sur chaque ligne et on « aligne en colonne » les inconnues) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \end{array} \right.$$

2. On cherche un **pivot**, c'est-à-dire un élément non nul qui n'est pas sur la même ligne ou la même colonne qu'un pivot sélectionné précédemment (la première fois, on choisit n'importe quel élément non nul). On l'encadre pour le marquer.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \boxed{\bullet} z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \end{array} \right.$$

En pratique, avec des coefficients entiers, on a toujours intérêt à choisir comme pivot un coefficient dont la valeur absolue est la plus petite possible. Les meilleurs pivots sont les 1 et les -1 .

3. Par des opérations élémentaires sur les lignes du type $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ (où i est la ligne qu'on veut modifier, j la ligne du pivot et α est un réel non nul), on fait disparaître les inconnues de la colonne du pivot dans les lignes **autre** que la ligne du pivot. L'inconnue avec pivot subsiste donc à la fin de cette étape !

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \boxed{\bullet} z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \end{array} \right.$$

4. Si on peut encore choisir des pivots (c'est-à-dire s'il reste des coefficients non nuls sur une ligne ne contenant pas déjà un pivot), on continue le processus en retournant à l'étape 2. Sur notre exemple, voici comment pourrait se passer la suite :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \bullet x + \boxed{\bullet} y + \bullet z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \boxed{\bullet} z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z + \bullet t = \bullet \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} \bullet x + \boxed{\bullet} y + \bullet z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \boxed{\bullet} z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z + \boxed{\bullet} t = \bullet \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \bullet x + \boxed{\bullet} y + \bullet z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \boxed{\bullet} z + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z + \boxed{\bullet} t = \bullet \end{array} \right. \end{aligned}$$

5. Lorsqu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot, le processus s'arrête. Le système obtenu est facile à résoudre. Les inconnues dans des colonnes avec un pivot (facilement identifiables car les pivots sont encadrés) sont les **inconnues principales** tandis que les colonnes sans pivot correspondent aux **inconnues secondaires**. Dans notre exemple, y, z, t sont les inconnues principales, x est l'inconnue secondaire.

Exemple 2.65. Appliquons la méthode de Gauss au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - y - z - t = 3 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \\ x - y + z - 2t = 2 \end{array} \right.$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{1} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - y - z - t = 3 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \\ x - y + z - 2t = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1} x - 2y + z - t = 1 \\ 3y - 3z + t = 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3y + \boxed{1} z + 3t = -1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ y - t = 1 \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1} x - 5y - 4t = 2 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ 12y + 10t = -2 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ 3y + \boxed{1} z + 3t = -1 \\ \boxed{1} y - t = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1} x - 9t = 7 \quad L_1 \leftarrow L_1 + 5L_4 \\ \boxed{22} t = -14 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 12L_4 \\ \boxed{1} z + 6t = -4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \\ \boxed{1} y - t = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{22} x = 28 \quad L_1 \leftarrow 22L_1 + 9L_2 \\ \boxed{22} t = -14 \quad L_2 \leftarrow 22L_2 - 6L_3 \\ \boxed{22} z = -4 \quad L_3 \leftarrow 22L_3 - 6L_2 \\ \boxed{22} y = 8 \quad L_4 \leftarrow 22L_4 + L_2 \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement que l'unique solution est $\left(\frac{28}{22}, \frac{8}{22}, -\frac{4}{22}, -\frac{14}{22}\right) = \left(\frac{14}{11}, \frac{4}{11}, -\frac{2}{11}, -\frac{7}{11}\right)$.

Exercice d'application 2.66. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

➡



Méthode 2.67. Résoudre un système linéaire avec une ou plusieurs inconnues secondaires

Si à la fin du processus de réduction de Gauss il reste des colonnes sans pivot, alors ces colonnes correspondent à des inconnues secondaires (tandis que toutes les colonnes contenant un pivot sont des inconnues principales).

$$\begin{cases} \bullet x + \boxed{\bullet} y + \bullet t = \bullet \\ \bullet x + \bullet t + \boxed{\bullet} u = \bullet \\ \bullet x + \boxed{\bullet} z + \bullet t = \bullet \end{cases}$$

Sur cet exemple, les inconnues principales sont y , z et u , qu'on exprimera en fonction des inconnues secondaires x et t quand on écrira l'ensemble des solutions, qui aura ici pour forme

$$\{(x, \dots, \dots, t, \dots) : (x, t) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Exemple 2.68. On veut résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$.

$$(S) : \begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ y + z + 2t = 1 \end{cases}$$

Comme la colonne avec x est déjà réduite, on peut considérer le 2 devant x comme un pivot. Il reste un pivot à choisir pour finir l'algorithme de réduction de Gauss.

$$\begin{cases} \boxed{2} x + y - z + t = 0 \\ \boxed{1} y + z + 2t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{2} x & - 2z - t = -1 \\ \boxed{1} y + z + 2t = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Ainsi, x et y sont les inconnues principales (les inconnues correspondant à une colonne avec un pivot) tandis que z et t sont les inconnues secondaires (les inconnues correspondant à une colonne sans pivot). On exprime donc les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires :

$$(S) \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + z + \frac{1}{2}t \\ y = 1 - z - 2t \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\left\{ \left(-\frac{1}{2} + z + \frac{t}{2}, 1 - z - 2t, z, t \right) : (z, t) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

Exercice d'application 2.69. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$.

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + z - t = 0 \\ 4x - 2y + z - t = 2 \end{cases}$$

➡



Méthode 2.70. Réduite de Gauss avec une ou plusieurs lignes de 0

On suppose qu'après réduction de Gauss on obtient une ligne sans inconnue, comme sur l'illustration ci-après (ici α est un paramètre fixé par l'énoncé, pas une inconnue) :

$$\begin{cases} \boxed{\bullet} x & & + \bullet t = \bullet \\ & \boxed{\bullet} y & + \bullet t = \bullet \\ & & \boxed{\bullet} z + \bullet t = \bullet \\ & & & 0 = \alpha \end{cases}$$

- Si $\alpha = 0$, le système est compatible (la dernière équation s'écrit $0 = 0$).
- Si $\alpha \neq 0$, le système est incompatible.

Exemple 2.71. Soit $a \in \mathbf{R}$. On veut résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 3z = a + 1 \\ x + y + 4z = 2a \\ x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

On applique la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \boxed{1}x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 3z = a + 1 \\ x + y + 4z = 2a \\ x + 4y - z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \boxed{1}x + 2y + z = a \\ -\boxed{1}y + z = 1 - a \\ y + 3z = a \\ 2y - 2z = -a \end{cases} &\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{1}x - z = 3a - 2 \\ \boxed{1}y + z = 1 - a \\ \boxed{4}z = 1 \\ -4z = a - 2 \end{cases} &\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{4}x - 4y = 12a - 7 \\ \boxed{4}y = 3 - 4a \\ \boxed{4}z = 1 \\ 0 = a - 1 \end{cases} &\begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

- Si $a \neq 1$, alors $a - 1 \neq 0$ et le système est incompatible (l'ensemble des solutions est $\emptyset$).
- Si $a = 1$, alors l'unique solution est $\left(\frac{12a - 7}{4}, \frac{3 - 4a}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Remarque 2.72. On dit que $a - 1 = 0$ est une **condition de compatibilité** du système.

Exercice d'application 2.73. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 3y - 3z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

➡

Exercice d'application 2.74. Résoudre le système linéaire suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

➡

**Méthode 2.75.** Cas d'un système paramétré

Si un paramètre apparaît « du côté » des inconnues (et non du second membre) il faut être très vigilant, car on ne peut pas choisir un pivot nul. Cela peut amener à discuter suivant la nullité ou non du paramètre. Si par exemple on a

$$\begin{cases} \boxed{\bullet} x & + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \alpha z = \bullet \end{cases}$$

il faudra distinguer deux cas.

- Si $\alpha \neq 0$, on peut alors choisir α comme pivot :

$$\begin{cases} \boxed{\bullet} x & & = \bullet \\ & \bullet y & = \bullet \\ & & \boxed{\alpha} z = \bullet \end{cases}$$

et on peut achever la résolution du système.

- Si $\alpha = 0$, on a

$$\begin{cases} \boxed{\bullet} x & + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ & 0 = \bullet \end{cases}$$

et on peut achever la résolution du système.

Exemple 2.76. Soit $m \in \mathbf{R}$. On veut résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{cases} (m-1)x + y = -3 \\ mx + 3y = 8 \end{cases}$$

On commence par choisir un pivot sans paramètre :

$$\begin{cases} (m-1)x + \boxed{1} y = -3 \\ mx + 3y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} (m-1)x + \boxed{1} y = -3 \\ (3-2m)x = 17 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

- Si $m = \frac{3}{2}$, alors le système devient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -3 \\ 0 = 17 \end{cases}$$

et la dernière ligne assure que le système est incompatible.

- Si $m \neq \frac{3}{2}$, alors $3 - 2m \neq 0$ et on peut choisir $3 - 2m$ comme pivot :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (m-1)x + \boxed{1} y = -3 \\ \boxed{(3-2m)} x = 17 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \boxed{(3-2m)} y = 8 - 11m & L_1 \leftarrow (3-2m)L_1 - (m-1)L_2 \\ \boxed{(3-2m)} x = 17 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

car $(3-2m) \times (-1) - (m-1) \times 17 = 8 - 11m$. Finalement, l'unique solution est $\left(\frac{17}{3-2m}, \frac{8-11m}{3-2m} \right)$.

Questions de cours

1. Quelles sont les opérations possibles pour une inégalité (il y a trois cas, un avec une somme et deux avec un produit) ? Vous préciserez si le sens de l'inégalité change ou non.
2. Quelles sont les opérations possibles pour deux inégalités (il y a deux cas, un avec une somme et un avec un produit) ?
3. Donner la définition d'intervalle.
4. Donner la définition de segment.
5. Donner la définition de valeur absolue.
6. Tracer le graphe de la fonction valeur absolue.
7. Compléter les formules suivantes, pour $x, y \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$: $|-x| = \dots$, $|x \cdot y| = \dots$, $|x^n| = \dots$, $\sqrt{x^2} = \dots$ et $\left| \frac{x}{y} \right| = \dots$ si $y \neq 0$.
8. Soit $x, a \in \mathbf{R}$. Compléter $|x| = a \iff \dots$ (vous pourrez distinguer des cas suivant les valeurs de a).
9. Soit $x, y \in \mathbf{R}$. Compléter $|x| = |y| \iff \dots$.
10. Soit $x, a \in \mathbf{R}$. Compléter $|x| \leq a \iff \dots$ et $|x| \geq a \iff \dots$ (vous pourrez distinguer des cas suivant les valeurs de a).
11. Donner la première et la seconde inégalité triangulaire pour des réels.
12. Définir la notion de distance entre deux réels.
13. Définir la notion de partie entière.
14. Soit $x \in \mathbf{R}$. Donner l'encadrement caractéristique $[x]$.
15. Tracer le graphe de la fonction partie entière.
16. Après résolution d'un système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbf{R}$, on obtient

$$\begin{cases} \boxed{2}x + 4y = 6 \\ 3y + \boxed{1}z = 5 \\ 0 = a + 1 \end{cases}$$

Dans ce système, quelles sont les inconnues principales et les inconnues secondaires ? Comment appelle-t-on l'équation $a + 1 = 0$? Si $a = -1$, quel est l'ensemble des solutions du système ? Et pour $a \neq -1$? On peut bien entendu vous donner un autre système ☺

17. Qu'est-ce qu'un système linéaire homogène ? Qu'est-ce qu'un système linéaire compatible ?